Compact operators in Morrey spaces

中央大学・理工学研究科・澤野嘉宏 *
バンドン工科大学・理工学研究科・Denny Ivanal Hakim †

Denny Ivanal Hakim
Department of Mathematics, Bandung Institute of Technology, Bandung, Indonesia.
Yoshihiro Sawano
Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering,
Chuo University, 13-27 Kasuga 1-chome, Bunkyoku, Tokyo, Japan.

Mathematics Subject Classification 2010 : 42B35, 42B20, 42B25.

Abstract

VMO 関数と特異積分作用素によって生成される交換子はモレー空間においてコンパクトであることが知られている．本稿の目的は，このモレーコンパクト性結果を，モレー空間の閉部分空間を使って改良することである．結果として，そのような交換子がモレー空間を異なる層に写像することが分かる．具体的には，コンパクト交換子はモレー空間をそのティルダ閉部分空間に写像することを報告する．また，関数空間のコンパクト集合には種類があることを考察する．

1 導入

まず，モレー空間の定義を思い出す．$B(x,r)$ を半径 $r>0$ の中心 x にある開球とする．$1 \le q \le p < \infty$ とし，$L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$-関数 f について，そのモレーノルムは

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+} \frac{1}{|B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q {\rm d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$

と定義される．モレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は，ノルム $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$ が有限なすべての $f \in L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ の集合である．なお，$\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n)$ はルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ である．交換子は，$[S,T]$ という形式の作用素であり，ここで S と T は何らかの作用素である．本稿では，S が関数 a によるかけ算作用素である場合を考える．この論文では，a が $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 関数であると仮定する．すなわち，a の BMO ノルムは

$$\|a\|_* := \sup_{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |a(y) - m_{B(x,r)}(a)|{\rm d}y < \infty$$

と定義される．ここで，$m_{B(x,r)}(a)$ は $B(x,r)$ 上での a の平均値を表す．さらに，a に対して追加の仮定をおき，a が $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ クラスに属することを要求することがある．すなわち，$\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$a - a_j \to 0$ as $j \to \infty$ とする．作用素 T の候補として，主にふたつのクラスの作用素を考える．

*E-mail address: **yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp**
†E-mail address: **dennyivanalhakim@gmail.com**

- $K \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\})$ とする．標準的な特異積分作用素のクラス核 K を持つ を特異積分作用素とは以下の条件に適う $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界線形作用素 T のことである．

  (1) すべての $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\mathrm{supp}(f)$ の外でほとんどいたるところ，

  $$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

  が成り立つ．

  (2) 定数 D_1 と D_2 が存在して，K が次の 2 条件を満たす．

  (i) 【サイズ条件】$x \neq y$ ならば，

  $$|K(x,y)| \leq D_1|x-y|^{-n} \tag{2}$$

  が成り立つ．

  (ii) 【Hörmander 条件】$0 < 2|x-y| < |z-x|$ ならば，

  $$|K(x,z) - K(y,z)| + |K(z,x) - K(z,y)| \leq D_2 \frac{|x-y|}{|x-z|^{n+1}} \tag{3}$$

  が成り立つ．

- $0 < \alpha < n$ の場合の分数積分作用素 I_α は適当な関数 f に対して次の式

  $$I_\alpha f(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{4}$$

  で与えられる．

本稿で考える作用素は次のふたつである．

- T が K を核に持つ特異積分作用素の場合，$a \in BMO(\mathbb{R}^n)$ と特異積分作用素 T によって生成される交換子 $[a,T]$ を

  $$[a,T]f(x) := \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\epsilon)} (a(x) - a(y))K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

  と定義する．

- もし T が分数積分作用素 I_α であるならば，

  $$[a,T]f(x) := a(x)I_\alpha f(x) - I_\alpha(af)(x)$$

  と定義する．

2　既存の結果

既存の結果をおさらいする．

Theorem 2.1. [3] $0 < \alpha < n$, $1 < q \leq p < \infty$, $1 < t \leq s < \infty$, $a \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, T を特異積分作用素とする．

1. T を任意の特異積分作用素とする．$[a,T]$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である．

2. $\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}, \dfrac{t}{s}=\dfrac{q}{p}$ と仮定する．$[a,I_\alpha]$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である．

上述の有界性はどちらの場合も $a\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ であるための必要条件でもある．

Theorem 2.2. [1, 2] $a\in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ と仮定する以外は定理 2.1 と同じ設定を考える．

1. $[a,T]$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ へのコンパクト作用素である．

2. $\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}, \dfrac{t}{s}=\dfrac{q}{p}$ と仮定する．$[a,I_\alpha]$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ から $\mathcal{M}^s_t(\mathbb{R}^n)$ へのコンパクト作用素である．

上述のコンパクト性はどちらの場合も $a\in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ であるための必要条件でもある．

3 コンパクト性の改良とコンパクト集合に対するひとつの洞察

$\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ における $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ の閉包とする．p と q が違うときは $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ とは違う空間であることに注意されたい．われわれは次の結果を得ることができた．

Theorem 3.1. [5] 定理 2.2 と同じ設定を考える．このとき，実際は値域をそれぞれ $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と $\widetilde{\mathcal{M}}^s_t(\mathbb{R}^n)$ に置き換えることができる．

ここで，一つの洞察が生まれる．つまり，$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ におけるコンパクト集合には種類があるということである．実際に，$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ におけるコンパクト集合の一部は交換子によって実現されるが，それとは異なるコンパクト集合があるということである．たとえば，$f_0\in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)\setminus\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ として，ランク 1 の作用素

$$f\mapsto f_0\int_{[0,1]^n} f(y)\mathrm{d}y$$

を考えると，このコンパクト作用素に対応するコンパクト集合つまり単位球の像の閉包は $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ とは交わりが 0 関数しかない．

このように $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ のコンパクト集合には種類があり，特徴づけは困難であるが，$\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ のコンパクト集合ならば，特徴づけが可能である．

Theorem 3.2. [4] 有界閉集合 K がバナッハ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}^p_q(\mathbb{R}^n)$ におけるコンパクト集合であるための必要十分条件は

$$\lim_{R\to\infty}\left(\sup_{f\in K}\|f-f\chi_{[0,R^{-1}]}-f\chi_{[R,\infty)}\|_{\mathcal{M}^p_q}\right)=\lim_{r\downarrow 0}\left(\sup_{|y|\le r}\sup_{f\in K}\|f-f(\cdot-y)\|_{\mathcal{M}^p_q}\right)=0$$

が成り立つことである．

References

[1] Y.P. Chen, Y. Ding and X. Wang, Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey spaces, Potential Anal. **30** (2009), no. 4, 301–313.

[2] Y.P. Chen, Y. Ding and X. Wang, Compactness of commutators for singular integrals on Morrey spaces, Canad. J. Math. **64** (2012), no. 2, 257–281.

[3] G. Di Fazio and M.A.G. Ragusa, Commutators and Morrey spaces, Boll. Un. Mat. Ital. **A (7) 5** (1991), no. 3, 323–332.

[4] D.I. Hakim and Y. Sawano, A compactness criterion of subsets in subspaces spanned by compactly supported smooth functions, in preparation.

[5] D.I. Hakim, Y. Sawano and D. Takesako, Compactness of commutators in Morrey spaces, in preparation.