エルミート行列に付随する三井ディリクレ級数について

水野義紀 (名古屋工業大学工学研究科) —Roland Matthes との共同研究—

1 数の分割

自然数 n に対し $p(n)$ を分割数とする．即ち $p(n)$ は $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ なる表示の仕方の総数である．但し $m_j \in \mathbb{N}$ $(1 \leq j \leq r)$, $r = 1, 2, 3, \cdots$ で和の順序の違いは考慮しない．例えば $5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$ から $p(5) = 7$. Rademacher (1937) は $p(n)$ の明示公式

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\ A_k(n)\ \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{k}\lambda_n\right)}{\lambda_n} \right)$$

を与えた．ここで $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$, $A_k(n) = \sum_{h \pmod k} \omega_{h,k} e^{-2\pi i \frac{hn}{k}}$ ($\omega_{h,k}$ はある 1 のべき根) である．研究の発端は Hardy-Ramanujan (1918) による漸近公式

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sum_{1 \leq k < \alpha\sqrt{n}} \sqrt{k}\ A_k(n)\ \frac{d}{dn} \left(\frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{k}\lambda_n\right) - 1}{\lambda_n} \right) + O(n^{-\frac{1}{4}})$$

(ここで α はある定数) にある．特に

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\sqrt{n}} \quad (\text{as} \ \ n \to \infty)$$

が得られる．ハーディ "ラマヌジャン" (丸善出版) の講義 VIII 参照．また, これらの結果と分析が Selberg 全集 I, 701∼706 頁にある．

証明は母関数を利用する．$\Re(\tau) > 0$ として

$$f(\tau) = \frac{1}{\prod_{n>0}(1 - e^{-n\tau})} = 1 + \sum_{n>0} p(n) e^{-n\tau} = F(e^{-\tau})$$

とおけば

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}}\ dx$$

と積分表示される．ここで C は中心 0, 半径 < 1 の円周である．この積分を上手く計算することにより漸近公式が導かれているのであるが, 重要なのは母関数 $f(\tau)$ の振舞いが分かることである．今の場合, 母関数に類似の

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z}) \qquad (\Im(z) > 0)$$

はエータ関数であり, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$ のとき

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \epsilon\,(a,b,c,d)\,\sqrt{cz+d}\;\eta(z)$$

($\epsilon\,(a,b,c,d)$ はある 1 のべき根) を満たす重さ $\frac{1}{2}$ のモジュラー形式である．

2　実二次体の分割数

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を実二次体, $d>0$ をその判別式とする．$\mathcal{O}$ で K の整数環を表す．$\nu\in\mathcal{O}$ が総正である (記号 $\nu\succcurlyeq 0$ を用いる) とは, $\nu>0$, $\nu'>0$ (ν' は ν の共役) であることを指す．$\mu\in\mathcal{O}$, $\mu\succcurlyeq 0$ に対し, 実二次体の分割数 $P(\mu)$ が $\mu=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r$ なる表示の仕方の総数として定義される．但し $\mu_j\in\mathcal{O}$, $\mu_j\succcurlyeq 0$ $(1\le j\le r)$, $r=1,2,3,\cdots$ で和の順序の違いは考慮しない．Meinardus (Math.Ann. 126 (1953)) は, $N=N(\mu)=\mu\mu'\to\infty$ のとき

$$P(\mu)=\exp\left(3\left(\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}}N\right)^{\frac{1}{3}}+\alpha_1(\log N)^2+\alpha_2\log N+\mathfrak{S}(\lambda,N)\right)\cdot\left(1+O(N^{-\frac{1}{21}})\right)$$

を証明した．ここで $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, α_1, α_2 はある定数, $\mathfrak{S}(\lambda,N)$ は無限級数で与えられる μ から定まる値であり, μ の関数として有界．三井孝美 “解析数論”(岩波書店) の第 6 章も参照.

証明にはやはり母関数 (今度は 2 変数)

$$f(\tau,\tau')=\frac{1}{\prod_{\nu\in\mathcal{O},\nu\succcurlyeq 0}(1-e^{-\nu\tau-\nu'\tau'})}=1+\sum_{\nu\in\mathcal{O},\mu\succcurlyeq 0}P(\mu)e^{-\mu\tau-\mu'\tau'}\qquad(\Re(\tau)>0,\ \Re(\tau')>0)$$

が使われている．分割数 $p(n)$ の母関数との類似は明らかである．Meinardus によれば $P(\mu)$ は

$$P(\mu)=\sqrt{d}\ e^{\mu y+\mu'y'}\int\int_{\mathfrak{P}}f(y+2\pi i\xi,y'+2\pi i\xi')e^{2\pi i(\mu\xi+\mu'\xi')}\ d\xi d\xi'$$

(ここで $y,y'>0$, $\xi=\frac{x_1+\omega x_2}{\sqrt{d}}$, $\xi'=-\frac{x_1+\omega' x_2}{\sqrt{d}}$, $\omega=\frac{d+\sqrt{d}}{2}$, $\mathfrak{Q}:|x_1|\le\frac{1}{2},|x_2|\le\frac{1}{2}$) の形に積分表示でき, $\xi\xi'$-平面の領域 $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{Q}$ の像) を原点近傍とその他に分けて評価することにより主要項を取り出すことができる．そのための y,y' は鞍部点法が応用できるように選ばれる ($y=\frac{M}{\mu},y'=\frac{M}{\mu'},M=\sqrt[3]{\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}}N(\mu)}$).

そういった計算を実行するために, 母関数 $f(\tau,\tau')$ の振舞いを把握したい．Meinardus は $f(\tau,\tau')=\exp(\log f(\tau,\tau'))$,

$$\log f(\tau,\tau')=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}g(k\tau,k\tau'),\qquad g(\tau,\tau')=\sum_{\nu\in\mathcal{O},\nu\succcurlyeq 0}e^{-\nu\tau-\nu'\tau'}$$

と表示し, 現れた $g(\tau,\tau')$ を考察した．この $g(\tau,\tau')$ は Hecke により “実二次体の幾何級数” と呼ばれている．Meinardus は $g(\tau,\tau')$ をヘッケの量指標 L 関数を用いて積分表示した．$v_0(\nu)=1$, $v_1(\nu)=\mathrm{sgn}(N(\nu))$ とすれば, まず

$$g(\tau,\tau')=\frac{1}{4}\{\Phi(\tau,\tau';v_0)+\Phi(\tau,\tau';v_1)\},$$
$$\Phi(\tau,\tau';v)=\sum_{\nu\in\mathcal{O}\setminus\{0\}}v(\nu)e^{-|\nu|\tau-|\nu'|\tau'}$$

と書け, 追加パラメータに関するフーリエ展開の特殊化を用いて

$$\Phi(\tau,\tau';v)=\frac{1}{\log\eta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_n,$$

$$H_n=\frac{e(1)}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\Gamma\left(s+inb\right)\Gamma\left(s-inb\right)}{\tau^{s+inb}\tau'^{s-inb}}\zeta_n\left(s,v\right)\ ds$$

が得られる．ただし K の基本単数を $\epsilon>1$ とするとき, $N(\epsilon)=1$ なら $\eta=\epsilon$, $e(1)=2$, $N(\epsilon)=-1$ なら $\eta=\epsilon^2$, $e(1)=4$ とおき, $b=\frac{\pi}{\log\eta}$ とした ($\eta>1$ は総正基本単数である)．さらに

$$\zeta_n\left(s,v\right)=\sum_{\nu\in(\mathcal{O}\setminus\{0\})/\mathcal{O}^\times}\frac{e^{inb\log|\nu'/\nu|}v(\nu)}{|N(\nu)|^s}\qquad(\Re(s)>1)$$

はヘッケの量指標 L 関数である．よって

$$g(\tau,\tau')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\Gamma\left(s+inb\right)\Gamma\left(s-inb\right)}{\tau^{s+inb}\tau'^{s-inb}}\frac{1}{2\log\eta}\{\zeta_n\left(s,v_0\right)+\zeta_n\left(s,v_1\right)\}\ ds$$

となる．上手い具合に $g(k\tau,k\tau')$ の中の k が分離され, 下記 $\zeta(2s+1)$ として集約されて

$$\begin{aligned}\log f(\tau,\tau')&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}g(k\tau,k\tau')\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\Gamma\left(s+inb\right)\Gamma\left(s-inb\right)}{\tau^{s+inb}\tau'^{s-inb}}\zeta(2s+1)\frac{1}{2\log\eta}\{\zeta_n\left(s,v_0\right)+\zeta_n\left(s,v_1\right)\}\ ds\end{aligned}$$

が得られる．積分路を $\Re(s)=2$ から $\Re(s)=-\frac{1}{2}$ に左へシフトすることで Meinardus は $\log f(\tau,\tau')$ の挙動を導いた．積分路を動かし留数を拾うには $\zeta_n(s,v)$ の解析的性質が必要であるが, 必要事項は Hecke によって得られている．

追加パラメータに関するフーリエ展開というのは

$$\psi(u)=\sum_{\nu\in\mathcal{O}\setminus\{0\}}v(\nu)e^{-|\nu|\tau e^{u}-|\nu'|\tau' e^{-u}}=\frac{1}{\log\eta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_n\ e^{2\pi inu/\log\eta},\qquad\psi(0)=\Phi(\tau,\tau';v)$$

のことを指す．この論法の原点は Hecke (全集の No.16 (1922)) による

$$\sum_{\nu\in\mathcal{O},\nu\succcurlyeq0}\frac{1}{(\nu+\nu')^s}\qquad(\Re(s)>2)$$

の研究にある．そこではパラメータ u を追加した級数

$$\phi(s,u)=\sum_{\nu\in\mathcal{O}\setminus\{0\}}\frac{v(\nu)}{(|\nu|e^{u}+|\nu'|e^{-u})^s}$$

が調べられている．$\phi(s,u+\log\eta)=\phi(s,u)$ ($u\mapsto u+\log\eta$ が $e^u\mapsto e^u\eta$ に対応 (よって $e^{-u}\mapsto e^{-u}\eta'$), η は総正基本単数) であることから u に関してフーリエ展開でき, フーリエ係数がヘッケ L 関数で表示される．パラメータを追加し, 調和解析を適用して, 展開の各項を解析する，といった Hecke の着想は, ヘッケ・トリックにおいて非正則アイゼンシュタイン級数をフーリエ展開により解析接続する仕方とも通じるものがある．行列類似でも有効であることが, 以下で示される．

余談になるが $d=4m$ ($m\equiv2,3\ (\mathrm{mod}\ 4)$ が平方自由) の場合 (上記 Hecke もこの場合を扱っている),

$$2^s\sum_{\nu\in\mathcal{O},\nu\succcurlyeq0}\frac{1}{(\nu+\nu')^s}=\sum_{l\geq1}\sharp\{x\in\mathbb{Z};mx^2<l^2\}l^{-s}=\frac{2}{\sqrt{m}}\zeta(s-1)-2\sum_{l\geq1}\left(\left\{\frac{l}{\sqrt{m}}\right\}-\frac{1}{2}\right)l^{-s}$$

(ここで $\{\alpha\}=\alpha-\lfloor\alpha\rfloor$ は小数部分) 等の表示をもつ．上述の着想でこれを解析接続した Hecke の論文についての久賀道郎先生のコメントを引用する (ドクトル・クーガーの数学講座 $\langle 2\rangle$, 日本評論社の 13 頁)：

“これは何を意味しているのであろうか？ とにかく, その論文を見ると, 現代/未来に通ずるショッキングな道具立てがすでに含まれていて夢をさそう．Hecke のこの頃の仕事はその学位論文や後年の仕事の様には理解されておらず, 未発掘の金鉱があるように思われる．Hecke 自身も未来を感知しながら十分展開できなかったその未来の気配が, ゴタゴタと書かれている．案外, 現在/未来における数論/保型形式論のもっとも深い部分のすぐ隣に Hecke はいたかもしれないのだ.” (引用終)

若い頃 (若くない今でもですが), こういったコメントに元気づけられたものです．

3　対称行列の分割数

実二次体の ($\phi(s,u)$ は少し違うが同じ議論が適用可能)

$$\sum_{\nu\in\mathcal{O},\nu\succcurlyeq0}\frac{1}{(\nu+\nu')^s},\qquad\phi(s,u)=\sum_{\nu\in\mathcal{O},\nu\succcurlyeq0}\frac{1}{(\nu e^{u}+\nu' e^{-u})^s}$$

の行列類似というのが考えられている．三井, 江上・佐藤, Duke-Imamoḡlu に依れば, 行列類似として

$$\sum_{T\in L_2^+}\frac{1}{\mathrm{tr}(T)^s},\qquad \phi(s,W)=\sum_{T\in L_2^+}\frac{1}{\mathrm{tr}(TW)^s}$$

が妥当である．ここで L_2^+ は 2 次実対称行列の部分格子 L_2 のうち正定値なもの全体, W $(\det(W)=1)$ は正定値実対称行列で追加パラメータに相当するものである．表題にある三井ディリクレ級数とは $\sum_{T\in L_2^+}\frac{1}{\mathrm{tr}(T)^s}$ を指す．三井先生はこの級数の解析接続の問題を提起したが, その動機は行列の分割理論にあるという．(行列の加法的理論, 1983 年度 学習院大学講義録. $g(te^u,te^{-u})$ のメリン変換が $\phi(s,u)$ になることから, $\phi(s,W)$ の由来も想像がつく.) 行列の分割数は耳にしないので, Ozeki (J.Combin.Theory. 36 (1984)) から例を引用してみよう．ここでは L_2^+ として 2 次正定値半整数対称行列全体をとり, 同じタイプの行列の和へ分割する仕方の総数を考えている．

$$T:=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac12\\\frac12&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-\frac12\\-\frac12&1\end{pmatrix}\ \text{から}\ p(T)=3.$$

級数 $\phi(s,W)$ の解析接続に関する先行結果を紹介する．証明の基本的方針は共通しており, $\phi(s,W)$ が適当な離散群 $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(L_2)=\{g\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R});\ {}^tgL_2g=L_2\}$ の作用で不変なことと同一視 $\{W\in\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R});\ W\text{ は正定値}, \det(W)=1\}\cong\mathbb{H}^2=\{\tau\in\mathbb{C};\Im(\tau)>0\}$ を利用し, 関連するスペクトル理論を $\phi(s,\tau)\in L^2(\Gamma\setminus\mathbb{H}^2)$ に適用することにある．実二次体の場合の単数群の作用 ($\log\eta$ の平行移動) は, Γ の作用 (一次分数変換) と読み替えられる．そして, フーリエ展開の類似がスペクトル展開というのである．伊吹山先生が注意されたことであるが, この読み替えはヒルベルト・モジュラー形式/ジーゲル・モジュラー形式それぞれの逆定理の定式化においても共通した原理である．

Duke-Imamoḡlu (Internat.Math.Res.Notices (2004)) ：3 次元錐体に含まれる格子点の数え上げを動機として, $\Gamma\setminus\mathbb{H}^2$ がコンパクトの場合に解析接続を得た．動機については, 前頁の余談, 第 2 の表示を参照 (そちらは三角形に含まれる格子点の数え上げと関係している).

Diehl (学位論文 (2011)) ：Duke-Imamoḡlu の一般化を意図した研究で, L_2 は半整数対称行列全体, $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で $\Gamma\setminus\mathbb{H}^2$ はコンパクトでない．この場合, スペクトル展開にアイゼンシュタイン級数からの寄与が生じる．その部分に関連して現れる新谷ゼータの解析的性質を仮定したうえで解析接続が得られている (条件付きの解決). https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/153492

Egami (RIMS Kokyuroku 886 (1994)) ：三井の問題を動機として Duke-Imamoḡlu と同じ問題を解決.

Egami-Sato (RIMS Kokyuroku 1060 (1998)) ：三井の問題を動機として Diehl と同じ問題を条件なしで解決．詳細は未発表.

4　主定理と証明の概要

三井の級数をエルミート行列の場合に調べてみた．自身のこれまでの成果が応用できそうであったこと, 余コンパクトでない場合をはっきり出来たらと思ったこと (と, 久賀先生のコメントおよび風変わりなものへの強い愛着) による．実際, 三井の級数は Koecher-Maass 級数というものに近い対象である．エルミート行列の場合の三井の級数を次で定義する (さっきは $\phi(s,W)$ と書いた．また, s を $2s$ に変えた.)：

$$\phi(W,s)=\sum_{T\in L_2^+}\mathrm{tr}(TW)^{-2s},\qquad L_2^+=\left\{T=\begin{pmatrix}a&b/2\\\bar b/2&d\end{pmatrix};\ a,d\in\mathbb{Z}>0,b\in\mathbb{Z}[i],4\det T>0\right\}.$$

ここで W は 2 次正定値複素エルミート行列, $\det(W)=1$, $s\in\mathbb{C}$, $\Re(s)\gg0$ (十分大きい) としている．

主定理　$\phi(W,s)$ は全複素 s 平面に有理型に解析接続される．

この場合も $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])\subset\mathrm{Aut}(L_2)$ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ で余コンパクトではないので用いるスペクトル展開にアイゼンシュタイン級数からの寄与が生じ, 解析接続の問題はより難しくなる．

4.1　3 次元上半空間 $\mathbb{H}^3$ とその上の保型関数

Elstrodt-Grunewald-Mennicke (1998) の教科書が基本的文献になる. $\mathbb{H}^3 = \{P = z+rj; z \in \mathbb{C}, r > 0\}$ ($\{1, i, j, k\}$ は四元数の基底) を 3 次元上半空間とする. $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ が $P = z + rj \in \mathbb{H}^3$ に

$$gP = \frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}r^2}{|cz+d|^2 + |c|^2r^2} + \frac{r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}j$$

で作用している. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の作用で不変な $\mathbb{H}^3$ の体積要素と線素は, $P = x + yi + rj$ として

$$dv_{\mathbb{H}^3}(P) = \frac{dxdydr}{r^3}, \quad ds_{\mathbb{H}^3}(P)^2 = \frac{dx^2+dy^2+dr^2}{r^2}$$

で与えられる. $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$ をガウス整数環とする (2 章の $\mathcal{O}$ とは異なる). 関数 $\mathcal{U} : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}$ が $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する保型関数であるとは, 次を満たすことをいう.

(i) $\mathcal{U}(\gamma P) = \mathcal{U}(P)$ $(\forall\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$,

(ii) $\mathcal{U}(P)$ は C^2 級で, $-\Delta\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U}$ $(\exists\lambda \in \mathbb{C})$, ここで $\Delta = r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) - r\frac{\partial}{\partial r}$,

(iii) $r \to \infty$ のとき z について一様に $\mathcal{U}(P) = O(r^N)$ となる $N > 0$ が存在する.

$\mathcal{U}$ がフーリエ展開の定数項をもたない $(\int_0^1\int_0^1 \mathcal{U}(P)dxdy = 0)$ とき, $\mathcal{U}$ をカスプ関数と呼ぶことにする. $\mathbb{H}^3$ の他のモデルとして 2 次正定値複素エルミート行列全体 $\mathcal{P}_2$ の行列式 1 の部分集合 $\mathcal{SP}_2 \subset \mathcal{P}_2$ がある. 対応は

$$\mathcal{SP}_2 \ni W = \begin{pmatrix} (|z|^2+r^2)r^{-1} & zr^{-1} \\ \bar{z}r^{-1} & r^{-1} \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad P_W = z + rj \in \mathbb{H}^3$$

で与えられる. そこで $Y = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{P}_2$ に対し, この対応を通して

$$\mathcal{U}(Y) = \mathcal{U}(P_Y), \quad P_Y = b/d + (\sqrt{\det Y}/d)j$$

とおくことにより, $\mathcal{U}$ を $\mathcal{SP}_2$ 上の (より一般に $\mathcal{P}_2$ 上の) 関数とみなすことができる. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の作用は次の意味で整合的である: $P_{[g]Y} = gP_Y$ $(Y \in \mathcal{P}_2, g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$. ここで $[U]Y = UY{}^t\overline{U}$ とした (Siegel の記号). $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \setminus \mathbb{H}^3$ の基本領域として

$$\mathcal{F} = \left\{P = x+yi+rj \in \mathbb{H}^3;\ |x| \le 1/2,\ 0 \le y \le 1/2,\ x^2+y^2+r^2 \ge 1\right\}$$

を固定しておく.

条件 “$f \in C^2(\mathbb{H}^3)$, f, $\Delta f \in L^2(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\setminus\mathbb{H}^3)$, $f(P)\overline{E(P,i\eta)}$ は $\mathcal{F}\times[0,T]$ 上で絶対可積分 $(\forall T \ge 0)$” の下, f の (各点収束する) スペクトル展開が得られる：

$$f(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, \mathcal{U}_m\rangle\, \mathcal{U}_m(P) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle f, E(\ , i\eta)\rangle\, E(P, i\eta)\, d\eta.$$

ここで $\mathcal{U}_0(P) = \pi/\sqrt{2\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(2)}$ は定数関数, $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ はカスプ関数からなる正規直交系 (ヘッケ作用素の同時固有関数に選ぶことができる), そして $E(P, i\eta)$ はアイゼンシュタイン級数

$$E(P,u) = \frac{1}{4}\sum_{\substack{c,d\in\mathcal{O} \\ (c,d)=\mathcal{O}}} \left(\frac{r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}\right)^{1+u}, \quad \Re(u) > 1$$

を解析接続して得られ, 内積

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{F}} f(P)\overline{g(P)}\, dv_{\mathbb{H}^3}(P)$$

は通常のものである. ラプラス固有値 λ_m $(-\Delta\mathcal{U}_m = \lambda_m\mathcal{U}_m\ (m = 1, 2, 3, \cdots))$ に関する事実として,

(a) $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$ (非減少) $\to \infty$,

(b) $\lambda_m > 1$ (よって $\lambda_m = 1 - \mu_m^2$, $\mu_m \in i\mathbb{R}$ と表せる),

(c) Weyl 型の漸近公式

$$\sharp\{m \in \mathbb{N};\ \lambda_m \le X\} \sim \frac{\int_{\mathcal{F}} dv_{\mathbb{H}^3}(P)}{3\pi^4} X^{3/2} = \frac{1}{3\pi^4} X^{3/2} \quad \text{as} \quad X \to \infty$$

が既知である.

以上を基礎として三井の級数を考察する. 空間 $\mathbb{H}^3$ と $\mathcal{SP}_2$ の対応により

$$\phi(P,s) = \phi(W,s) = \sum_{T \in L_2^+} \mathrm{tr}(TW)^{-2s}$$

と表示して誤解は生じない. $\Re(s) \gg 0$ なら $\phi(W,s)$ は絶対収束し, $\phi([U]W,s) = \phi(W,s)$ $(\forall U \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$, 即ち $\phi(UP,s) = \phi(P,s)$ $(\forall U \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}))$ となる. さらにスペクトル展開の条件が満たされることも確認できる. 展開係数は $\mathcal{U} \in \{\mathcal{U}_m\}_{m \ge 0} \cup \{E(\cdot, i\eta); \eta \in \mathbb{R}\}$, $\lambda = 1 - \mu^2$ ($-\Delta$ の固有値) に対し,

$$\langle \phi(\cdot, s), \mathcal{U} \rangle = \pi \frac{\Gamma(s - 1/2 + \mu/2)\Gamma(s - 1/2 - \mu/2)}{\Gamma(2s)} D(\overline{\mathcal{U}}, s)$$

で与えられる. ここで $D(\mathcal{U}, s)$ はマースの量指標 L 関数と呼ばれるものであり, 以下の様に定義される. $\mathbb{H}^3$ 上の定数関数と $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関するカスプ関数全体の集合を $\mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \setminus \mathbb{H}^3)$ とおく. 任意の $\mathcal{U} \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \setminus \mathbb{H}^3) \cup \{E(\cdot, i\eta); \eta \in \mathbb{R}\}$ に対し, $\Re(s) \gg 0$ のとき

$$D(\mathcal{U}, s) = \sum_{T \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \setminus L_2^+} \frac{\hat{\mathcal{U}}(T)}{\epsilon(T)(\det T)^s}$$

と定める. ここで $\hat{\mathcal{U}}(Y) = \mathcal{U}(Y^{-1})$ $(= \mathcal{U}(P_{Y^{-1}}))$ とおき, 和の T は $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 作用 $T \mapsto [U]T = UT{}^t\overline{U}$ の代表系を渡り, $\epsilon(T) = \sharp\{U \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}); [U]T = T\}$ は T の単数群の位数である. $D(\mathcal{U}, s)$ は $\Re(s) > 2$ で絶対収束し, そこで正則になる. 詳細は Matthes-Mizuno (J.Math.Anal.Appl. 509 (2022)) 参照. $D(\mathcal{U}, s)$ はヘッケの L 関数と類似の役割を果たすこととなる.

マースの L 関数をディリクレ級数表示すると

$$D(\mathcal{U}, s) = 4^s \sum_{l \ge 1} \frac{b_{\mathcal{U}}(l)}{l^s}, \qquad b_{\mathcal{U}}(l) = l^{-1} \sum_{T \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \setminus L_2^+,\ 4\det T = l} \frac{\mathcal{U}(P_T)}{\epsilon(T)}$$

を得る. ($4\det T$ は自然数なので, この値でくくる. また, $b_{\mathcal{U}}(l) = b_{\hat{\mathcal{U}}}(l)$ を用いている.) 以下に見るように, このディリクレ級数は $\Gamma_0(4)$ のある実解析的モジュラー形式のメリン変換になる. 負の番号 $(l < 0)$ のフーリエ係数も自然に現れるため, $b_{\mathcal{U}}(l)$ の不定値類似物も準備しておく必要がある.

自然数 $l \in \mathbb{N}$ と $\mathcal{U} \in \mathcal{A}_0(\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \setminus \mathbb{H}^3)$ に対し,

$$b_{\mathcal{U}}(-l) = (4\pi)^{-1} l^{-1} \sum_{T \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \setminus L_2,\ 4\det T = -l} \int_{E(T) \setminus \mathscr{S}_T} \mathcal{U}(P)\ d\sigma$$

とおく. ここで $L_2 = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ \bar{b}/2 & d \end{pmatrix}; a, d \in \mathbb{Z}, b \in \mathcal{O} \right\}$ であり, $T = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$, $a, d \in \mathbb{Z}$, $b \in \frac{1}{2}\mathcal{O}$, $4\det T < 0$ に対し $\mathscr{S}_T$ は

$$\mathscr{S}_T = \{P = z + rj \in \mathbb{H}^3; a - b\overline{z} - \overline{b}z + d(|z|^2 + r^2) = 0\}$$

と定義され, また $d\sigma$ は $ds_{\mathbb{H}^3}$ から誘導される $\mathscr{S}_T$ の面積要素, そして $E(T) = \{U \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}); [U]T = T\}$ は T の単数群である.

カトック・サルナック型対応 (Matthes-Mizuno, Forum Math. 26 (2014)) $\mathbb{H}^3$ 上の $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ に関する任意のカスプ関数 $\mathcal{U}$ ($-\Delta\mathcal{U} = (1 - \mu^2)\mathcal{U}$) に対し, $b_{\mathcal{U}}(l)$ をフーリエ係数にもつ $\mathbb{H}^2 = \{\tau = u + iv; v > 0\}$ 上の実解析的なモジュラー形式 $f_{\mathcal{U}}$ (重さ -1, 指標 $\chi_{-4} = (\frac{-4}{\cdot})$, $\Gamma_0(4)$ に関するもの) が存在する. 詳しくは

$$f_{\mathcal{U}}\left(\frac{a\tau + b}{4c\tau + d}\right) = \chi_{-4}(d) \frac{|4c\tau + d|}{4c\tau + d} f_{\mathcal{U}}(\tau), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

$$f_{\mathcal{U}}(\tau) = \sum_{0\neq l\in\mathbb{Z}} b_{\mathcal{U}}(l) W_{-\frac{\mathrm{sgn}(l)}{2},\frac{\mu}{2}}(4\pi|l|v)e(lu).$$

ここで $e(x) = e^{2\pi ix}$, $W_{\alpha,\beta}(v)$ は Whittaker 関数である.

上で見た実解析的なモジュラー形式 $f_{\mathcal{U}}$ から

$$g_{\mathcal{U}}(4\tau) = -2i \sum_{0\neq l\in\mathbb{Z},\ 4|l} b_{\mathcal{U}}(l) W_{-\frac{\mathrm{sgn}(l)}{2},\frac{\mu}{2}}(4\pi|l|v)e(lu)$$

を作ると

$$\frac{1}{i}\frac{\tau}{|\tau|} f_{\mathcal{U}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 2i g_{\mathcal{U}}(\tau/4)$$

が成り立つ. そこで $\Re(s) \gg 0$, 符号を $\delta = +$ or $\delta = -$ として付随するディリクレ級数を次で定める：

$$L^{\delta}(f_{\mathcal{U}}, s) = \sum_{\delta l\geq 1} \frac{b_{\mathcal{U}}(l)}{|l|^s}, \qquad L^{\delta}(g_{\mathcal{U}}, s) = -2i \sum_{\delta l\geq 1,\ 4|l} \frac{b_{\mathcal{U}}(l)}{|l|^s}.$$

スペクトル係数に現れたディリクレ級数との関係は $D(\overline{\mathcal{U}}, s) = 4^s L^+(f_{\overline{\mathcal{U}}}, s)$ である. 従って, スペクトル係数を $\mathbb{H}^2$ 上の実解析的モジュラー形式の保型性を利用して調べることができる.

関数等式と帯領域での評価 (Müller, Monatsh.Math. 113 (1992)) Müller の結果により, $L^{\pm}(f_{\mathcal{U}}, s)$, $L^{\pm}(g_{\mathcal{U}}, s)$ は s の整関数として解析接続でき, 次の関数等式を満たすことが分かる：

$$\begin{aligned} L^{\pm}(f_{\mathcal{U}}, s) &= 2i(\pi/2)^{2s}\Gamma(1/2+\mu/2-s)\Gamma(1/2-\mu/2-s) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\pi}\sin\pi(s\mp 1/2)L^{\pm}(g_{\mathcal{U}}, -s) + \epsilon(\mp 1/2, \mu/2)L^{\mp}(g_{\mathcal{U}}, -s)\right). \end{aligned}$$

また, 任意の垂直帯領域 $\mathcal{V}$ を与えたとき, 次を満たす ($\mathcal{V}, \mathcal{U}$ に依存する) 定数 $M > 0$, $c > 0$ が存在する：

$$|L^{\pm}(f_{\mathcal{U}}, s)| \leq M e^{c|\Im(s)|}, \qquad |L^{\pm}(g_{\mathcal{U}}, s)| \leq M e^{c|\Im(s)|} \quad (\forall s \in \mathcal{V}).$$

ここで $\epsilon(\alpha, \rho) = (\Gamma(\alpha+1/2+\rho)\Gamma(\alpha+1/2-\rho))^{-1}$ とした.

Phragmén-Lindelöf の定理を使いたいので, 次を準備する.

補題 $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{H}^3$ 上のカスプ関数からなる正規直交系 (ヘッケ作用素の同時固有関数から選んでおく), $-\Delta\mathcal{U}_m = \lambda_m\mathcal{U}_m$ とし, $\mathcal{U}_m$ に対応する $\mathbb{H}^2$ 上の実解析的モジュラー形式を $f_{\mathcal{U}_m}$ とする. 十分大きい $\sigma \gg 0$ を固定する. このとき, 次を満たす定数 $M > 0$, $A > 0$ が存在する：

$$|L^{\pm}(f_{\overline{\mathcal{U}_m}}, \sigma + it)| \leq M\lambda_m^A, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

証明の概要は次のとおりである. $L^{\pm}(f_{\overline{\mathcal{U}_m}}, \sigma + it)$ の係数は, $l \in \mathbb{N}$ として

$$b_{\overline{\mathcal{U}_m}}(l) = l^{-1} \sum_{T\in\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\backslash L_2^+,\ 4\det T = l} \frac{\overline{\mathcal{U}_m(P_T)}}{\epsilon(T)}$$

$$b_{\overline{\mathcal{U}_m}}(-l) = (4\pi)^{-1} l^{-1} \sum_{T\in\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\backslash L_2,\ 4\det T = -l} \int_{E(T)\backslash\mathscr{S}_T} \overline{\mathcal{U}_m(P)}\, d\sigma$$

であった. Blomer-Harcos-Milićević (Duke Math.J. 165 (2016)) により, $m \in \mathbb{N}$ には依存しない定数 $A > 0$, $C_0 > 0$ が存在して

$$\sup_{P\in\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\backslash\mathbb{H}^3} |\mathcal{U}_m(P)| \leq C_0\lambda_m^A.$$

従って補題の証明は定数関数 1 の場合に帰着する. そのうえ

補題 (a) 任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$\sum_{T \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \backslash L_2^+,\ \det(2T)=l} \frac{1}{\epsilon(T)} = \frac{l}{24}\left(\sum_{d|l} \chi_K(d) d^{-1} - \sum_{d|l} \chi_K(l/d) d^{-1}\right) = O_\epsilon(l^{1+\epsilon}).$$

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対し,

$$\sum_{T \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \backslash L_2,\ \det(2T)=-l} \int_{E(T)\backslash \mathscr{S}_T} d\sigma = O_\epsilon(l^{2+\epsilon}).$$

(a) は Mizuno (J.Number Theory. 128 (2008)) にある. (b) の証明は不定値ジーゲル・ゼータを利用する (サイズ 4, 符号 (1, 3)). 大雑把に言えば

$$\int_{E(T)\backslash \mathscr{S}_T} d\sigma \fallingdotseq \text{表現の体積},$$

$$\sum_{l \geq 1} \left(\sum_{T \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \backslash L_2,\ \det(2T)=-l} \int_{E(T)\backslash \mathscr{S}_T} d\sigma \right) l^{-s} \fallingdotseq \text{不定値二次形式のゼータ関数}.$$

従ってジーゲル・ゼータの収束性 (Siegel, Math.Z. 43 (1983), Sato, Tohoku Math.J. 35 (1983)) から補題が従う.

$L^+(f_{\overline{\mathcal{U}_m}}, s)$ の関数等式 ($-\Delta \mathcal{U}_m = \lambda_m \mathcal{U}_m$ なら $-\Delta \overline{\mathcal{U}_m} = \lambda_m \overline{\mathcal{U}_m}$ に注意) と上の補題, Stirling 公式および Phragmén-Lindelöf の定理により各垂直帯領域での評価が得られる. 結果として次も従う.

命題 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対し, 次を満たす定数 $M' > 0$, $A' > 0$ が存在する：

$$|L^+(f_{\overline{\mathcal{U}_m}}, s)| \leq M' \lambda_m^{A'}, \qquad \forall s \in K, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

カスプ関数からの寄与 部分和の方法を利用する. 複素数列 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ と C^1 級の関数 $g : [\lambda_1, x] \to \mathbb{C}$, および非減少な実数列 $\{\lambda_m\}_{m \geq 1}$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to \infty$) に対して

$$\sum_{\lambda_m \leq x} a(m) g(\lambda_m) = \left(\sum_{\lambda_m \leq x} a(m)\right) g(x) - \int_{\lambda_1}^{x} \left(\sum_{\lambda_m \leq t} a(m)\right) g'(t)\ dt$$

が成り立つ (松本先生の本, 33 頁, 補題 3.1). 命題と Weyl 型の漸近公式 Blomer-Harcos-Milićević 評価, Stirling 公式など援用して, カスプ関数からの寄与である

$$\sum_{m=1}^{\infty} \langle \phi(\cdot, s), \mathcal{U}_m \rangle\, \mathcal{U}_m(P),$$

$$\langle \phi(\cdot, s), \mathcal{U} \rangle = \pi \frac{\Gamma(s - 1/2 + \mu/2)\Gamma(s - 1/2 - \mu/2)}{\Gamma(2s)} 4^s L^+(f_{\overline{\mathcal{U}}}, s)$$

は, 各項の正則領域の共通部分に含まれるコンパクト集合上で絶対一様収束することが分かり, この級数はその領域で正則である. (各項の極の和集合は集積点をもたない.)

アイゼンシュタイン級数からの寄与 $\phi(P, s + 1/2)$ へのアイゼンシュタイン級数からの寄与は

$$J(P, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \phi(\cdot, s + 1/2), E(\cdot, i\eta) \rangle E(P, i\eta)\ d\eta$$

であった.

- $E(P,u)$ の極は $\{u\in\mathbb{C}; -1<\Re(u)<0,\ \zeta_{\mathbb{Q}(i)}(1+u)=0\}\cup\{1\}$ に含まれる.
- $\exists C>0$ s.t.

$$|E(P,u)|\le r^{1+\Re(u)}+\left|\frac{u+1}{u-1}\right|r^{1-\Re(u)}+C\frac{(|u|+1)^4}{r^{\Re(u)+2}}$$

$(\forall z\in\mathbb{C},\ \forall r=r(P)>0,\ \forall u\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\ \Re(u)\ge 0)$,

および $\zeta(s), L(s,\chi)$ のよく知られた評価を利用することになる.

命題 積分 $J(P,s)$ は $\Re(s)>1$ で絶対収束し, そこで正則になる. そのうえ $J(P,s)$ は全複素平面に有理型に解析接続できる.

<u>証明の概略</u> スペクトル係数は

$$\langle\phi(\cdot,s),E(\cdot,i\eta)\rangle=\pi\frac{\Gamma(s-1/2+i\eta/2)\Gamma(s-1/2-i\eta/2)}{\Gamma(2s)}\sum_{T\in\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\backslash L_2^+}\frac{E(P_T,-i\eta)}{\epsilon(T)(\det T)^s}$$

であった. Mizuno (J.Number Theory. 128 (2008)) を利用すれば $\zeta(s)$, $L(s,\chi_{-4})$ で表示できる. 見やすいように “$s\to s+1/2$” として

$$\begin{aligned}&\langle\phi(\cdot,s+1/2),E(\cdot,i\eta)\rangle\\&=\pi\frac{\Gamma(s+i\eta/2)\Gamma(s-i\eta/2)}{\Gamma(2s+1)}\frac{4^{s+i\eta/2}\zeta(-i\eta)}{L(1-i\eta,\chi_{-4})}\\&\times\left(\zeta\left(s+\frac{i\eta}{2}\right)L\left(s-\frac{i\eta}{2},\chi_{-4}\right)-L\left(s+\frac{i\eta}{2},\chi_{-4}\right)\zeta\left(s-\frac{i\eta}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

従って

$$J(s,P)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle\phi(\cdot,s+1/2),E(\cdot,i\eta)\rangle E(P,i\eta)\,d\eta=\frac{\pi}{\Gamma(2s+1)}\left(J^+(P,s)-J^-(P,s)\right).$$

但し

$$J^+(P,s)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma\left(s+\frac{i\eta}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{i\eta}{2}\right)\frac{4^{s+i\eta/2}\zeta(-i\eta)}{L(1-i\eta,\chi_{-4})}\zeta\left(s+\frac{i\eta}{2}\right)L\left(s-\frac{i\eta}{2},\chi_{-4}\right)E(P,i\eta)\,d\eta,$$

とおいた. $J^-(P,s)$ の定義も同様である. 変数変換 $(z=i\eta)$ して

$$J^+(P,s)=\frac{1}{i}\int_{\Re(z)=0}\Gamma\left(s+\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{z}{2}\right)\frac{4^{s+z}\zeta(-z)}{L(1-z,\chi_{-4})}\zeta\left(s+\frac{z}{2}\right)L\left(s-\frac{z}{2},\chi_{-4}\right)E(P,z)\,dz.$$

この積分 $J^+(P,s)$ の解析接続には Elstrodt-Grunewald-Mennicke (1998) の教科書 282 頁, Proposition 4.5 の証明 (双曲距離関数から定まるポアンカレ級数を解析接続する方法) が適用できる. もうひとつの積分 $J^-(P,s)$ も同様である.

定数関数 $\mathcal{U}_0(P)=\pi/\sqrt{2\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(2)}$ からの寄与 Mizuno (同上 (2008)) による

$$\sum_{T\in\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\backslash L_2^+}\frac{1}{\epsilon(T)(\det T)^s}=\frac{4^s}{24}\left(\zeta(s-1)L(s,\chi_{-4})-L(s-1,\chi_{-4})\zeta(s)\right)$$

を使えば, スペクトル展開におけるこの部分も全 s 平面に有理型に解析接続できている.

以上を併せて主定理が得られる. □

謝辞 講演の機会を頂いた中筋先生・谷口先生に感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 JP17K05175, JP22K03230 の助成を受けたものです。

参考文献 本文に記載した著者名・誌名・出版年度と MathSciNet, ZbMath からある程度分かると思いますので, 紙数の都合 (上限 9 頁) により文献表は割愛します.