ハイブリッド普遍性定理の極限定理について

鈴鹿工業高等専門学校・電子情報工学科　遠藤健太
Kenta Endo
Department of Electronic and Information Engineering,
National Institute of Technology, Suzuka College

概要

1979 年, Gonek は Dirchlet L-関数の同時ハイブリッド普遍性定理を証明し, その応用として Hurwitz ゼータ関数のパラメータが有理数の場合の普遍定理を示した. Voronin の普遍性定理は, さまざまな方向に発展していったが, ハイブリッド普遍性定理はそのような発展の方向の一つである. 一方で, 普遍性定理定理の証明手法自体も発展した. 現在, 証明手法を大きく分けると, Voronin の原証明と Bagchi による確率論的手法による証明がある. Bagchi の手法は, 普遍性定理を証明するのに標準的な手法となっている. しかしながら, ハイブリット普遍性定理に関しては, その証明に特有の難しさがあり, Bagchi 流の証明は開発されてこなかった. 本稿では, ハイブリッド普遍性定理の確率論的手法による証明法について概説する.

1　導入

1.1　ハイブリッド普遍性定理について

まずは, 1975 年に証明された Voronin [8] の普遍性定理を紹介する.

定理 1.1. $\mathcal{K}$ を帯領域 $\{s \in \mathbb{C}\ ;\ 1/2 < \sigma < 1\}$ に含まれる, 補集合が連結なコンパクト集合とし, f を $\mathcal{K}$ において零点を持たない連続関数で, $\mathcal{K}$ の内部で正則な関数とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \left\{ \tau \in [0,T]\ ;\ \max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \epsilon \right\} > 0.$$

が成り立つ. ただし, meas は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を表す.

この定理の発表後, さまざまな方向への発展がなされてきた. 例えば, 一般のゼータ関数への拡張, 同時普遍性定理, 混合普遍性定理, ハイブリッド普遍性定理, Euler 積を持たないゼータ関数への拡張などである. 詳しい発展に関しては, 普遍性定理のサーベイ [5] が参考になるので参照されたい. 本稿では, ハイブリッド普遍性定理について扱う.

ハイブリッド普遍性定理とは, 1979 年に Gonek の学位論文 [1] において発表された定理で, Voronin の普遍性定理と Kronecker-Weyl の近似定理を融合したものを指す. ここで, Kronecker-Weyl の近似定理の特別な場合を思い出しておく. 本稿を通して, p_n は n 番目の素数を表すとする.

定理 1.2. 正の整数 N と実数 $\theta_1, \ldots, \theta_N$ を任意にとる. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] \; ; \; \max_{1\le n\le N} \left\| \tau \frac{\log p_n}{2\pi} - \theta_n \right\| < \epsilon \right\} > 0.$$

が成り立つ. ただし, $\|x\|$ は, 実数 x と最も近い整数との距離を表す.

さて, 上記で紹介した 2 つの定理を融合した, ハイブリッド普遍性定理の主張を述べる.

定理 1.3. $\mathcal{K}$ を帯領域 $\{s \in \mathbb{C} \; ; \; 1/2 < \sigma < 1\}$ に含まれる, 補集合が連結なコンパクト集合とし, f を $\mathcal{K}$ において零点を持たない連続関数で, $\mathcal{K}$ の内部で正則な関数とする. 正の整数 N と実数 $\theta_1, \ldots, \theta_N$ を任意にとる. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Bigg\{\tau \in [0,T] \; ; \; &\max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \epsilon \quad \text{and} \\ &\max_{1\le n\le N} \left\| \tau \frac{\log p_n}{2\pi} - \theta_n \right\| < \epsilon \Bigg\} > 0.\end{aligned}$$

が成り立つ.

上記は Riemann ゼータ関数に関するハイブリッド普遍性定理であるが, Gonek が実際に証明したのは Dirichlet L-関数に関するハイブリッド同時普遍性定理であることに注意しておく. 本稿では, 説明を簡略化するために, Riemann ゼータ関数のみを扱うこととする. また, 上記の形は Gonek が証明した主張よりも現代的な Kaczorowski–Kulas [3] にある形で述べた. その他の重要な発展としては, [6], [7] などを見られたい.

1.2 普遍性定理の証明手法について

普遍性定理の証明手法は, 大きく分けると, Voronin の原証明と Bagchi による確率論的手法による証明がある. 種々の普遍性定理の証明では, 両手法とも用いられてはいるが, 現在おそらく最も標準的に用いられているのは Bagch の手法であるといえる. しかしながら, ハイブリッド普遍性定理の証明には, 特有の難しさがあり, Bagchi 流の確率論的手法による証明は開発されてこなかった. 実際, Kaczorowski–Kulas は, 論文 [3] の中で, ハイブリット普遍性定理の確率論的手法による証明は, 概念的に込み入ったものになるであろうと述べている. 現状では, Bagchi 流で証明されている普遍性定理のハイブリッド化を考える際には,

Voronin 流の手法に焼き直す必要があるという問題がある．そのため, 種々の普遍性定理のハイブリット化があまり進んでいないように感じる．ここでは, 講演中では述べられなかった, Voronin の手法と Bagchi の手法を簡単に比べてみることにする．

Voronin の手法. ゼータ関数の値分布論では, ゼータ関数を和が有限の Dicichlet 級数で近似する手法が用いられる．これに注意すると,

$$\begin{aligned}\zeta(s+i\tau) &\underset{\text{mean}}{\approx} \prod_{p\le X}\left(1-\frac{1}{p^{s+i\tau}}\right)^{-1}\\ &= \prod_{p\le X}\left(1-\frac{\exp\left(-2\pi i\tau\frac{\log p}{2\pi}\right)}{p^s}\right)^{-1}\end{aligned}$$

と「平均的な意味」で近似できる．ここで述べている「平均的な意味」とは, X が十分大きいときに二つの関数の差の二乗平均の誤差が小さくなることを表す．また, Kronecker の近似定理は, $\tau\in[0,T]$ のときの

$$\left(p_1^{-i\tau},\dots,p_N^{-i\tau}\right)=\left(\exp\left(-2\pi i\tau\frac{\log p_1}{2\pi}\right),\dots,\exp\left(-2\pi i\tau\frac{\log p_N}{2\pi}\right)\right)$$

の平均的な挙動と $(\theta_{p_1},\dots,\theta_{p_N})\in[0,1)^N$ のときの

$$(\exp(2\pi i\theta_{p_1}),\dots,\exp(2\pi i\theta_{p_N}))$$

の平均的な挙動が, T が十分を大きいときに, ほとんど等しいことを主張していることに注意する．これらに注意して Voronin の手法を大雑把に述べると, 以下のような戦略になる．

1. 任意の零に値をとらない正則関数 $f(s)$ に対して, ある $\underline{\theta}_X^{(0)}=\left(\theta_p^{(0)}\right)_{p\le X}$, $\theta_p^{(0)}\in\mathbb{R}$ で

$$\zeta_X(s,\underline{\theta}_X^{(0)})=\prod_{p\le X}\left(1-\frac{\exp(2\pi i\theta_p^{(0)})}{p^s}\right)^{-1}\approx f(s)$$

   を満たすものを見つける．
2. 平均値

$$\frac{1}{T}\int_{A_T}\int_K\left|\zeta(s+i\tau)-\zeta_X(s+i\tau)\right|^2 d\mu_2(s)d\tau,$$

   を計算する．ただし, μ_2 は $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視したときの Lebesgue 測度を表し,

$$A_T=\left\{\tau\in[0,T]\ ;\ \max_{p\le X}\left\|\tau\frac{\log p}{2\pi}-\theta_p\right\|<\epsilon\right\}.$$

   である．

実際には, Voronin の論文で扱っているのは, $\log \zeta(s)$ である．上記から結論を導くには, かなり複雑な計算を要するが, 詳細については省略する．

Bagchi の手法. 区間 $[0, T]$ 上の確率測度 $\mathbb{P}_T$ を $\mathbb{P}_T = T^{-1}\,\mathrm{meas}(\ \cdot\ )$ で定義し, 関数 $\zeta(s+i\tau)$ を正則関数の空間に値を取る確率変数とみなす.

また, Riemann ゼータ関数のランダムモデル

$$\zeta(s, \omega) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

を考える．ただし, $\omega = (\omega_p)_p$ であり, $\omega(p)$ は複素単位円周上 $\mathbb{T}$ を動くものとする．そして, $\zeta(s, \omega)$ は複素単位円周の無限直積空間 $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ 上に Haar 測度を入れた確率空間から正則関数の空間に値を取る確率変数とみなす．以上の準備の下で, Bagchi の戦略は以下のようになる．

1. 分布収束
$$\zeta(s+i\tau) \to \zeta(s, \omega) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p))}{p^s}\right)^{-1}$$
を示す．これは, 平均的な $\zeta(s+i\tau)$ の挙動は, $\zeta(s, \omega)$ の平均的な挙動とほとんど等しいことを示している．
2. 任意に零に値を取らない正則関数 $f(s)$ に対して, ある $\omega_0 = (\omega_0(p))_p$, $\omega_0(p) \in \mathbb{T}$ で
$$\zeta(s, \omega_0) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega_0(p))}{p^s}\right)^{-1} \approx f(s).$$
を満たすものを見つける．

上記の証明の概略を見比べると, ハイブリット普遍性定理の主張とは一見, Voronin の手法の方が Kronekcer-Weyl の近似定理との相性が良さそうであるのが, これまで Bagchi 流の証明は開発されてこなかった背景にあると考えられる．

2 主結果

まずは, 記号や定義を用意する．前セクションと同じ記号や定義もあるが, 主張を正確に述べるために改めて定義をする．集合 D を $D = \{s \in \mathbb{C}\ ;\ 1/2 < \sigma < 1\}$ とおき, $H(D)$ を領域 D 上の正則関数の集合で, 広義一様収束による位相が備わっているものとする．$\mathbb{T}$ を複素平面上の単位円周とし, 任意の素数 p に対して, $\mathbb{T}_p = \mathbb{T}$ とおく．また, $\Omega = \prod_p \mathbb{T}_p$ とする．ただし, 積は素数 p 全体に渡るものとする．$\omega(p)$ を $\omega \in \Omega$ の座標空間 $\mathbb{T}_p$ への射影とする．このとき, Ω はコンパクトな可換群なので, 全測度が 1 となる Haar 測度 $\boldsymbol{m}$ が存在する．

これらの準備の下で, 値分布における Riemann ゼータ関数のランダムモデルとなる確率変数を定義する. $H(D)$ に値をとる確率変数 $\zeta(s,\omega)$ を

$$\zeta(s,\omega)=\prod_{p}\left(1-\frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

で定義する. この確率変数は, 確率測度 $\boldsymbol{m}$ に関して $\sigma>1/2$ においてほとんど至るところで収束することが知られている.

さらに, 次の 2 つの確率測度を定義する. 任意の正の整数 N を固定する. 確率測度 $\mu_{T,N}$ と μ_N を, 任意の $\boldsymbol{A}\in\mathcal{B}\left(H(D)\times\mathbb{T}^N\right)$ に対して,

$$\begin{aligned}\nu_{T,\,N}(\boldsymbol{A})&=\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{\tau\in[0,T]\ ;\ \left(\zeta(s+i\tau),\,(p_n^{i\tau})_{n=1}^N\right)\in\boldsymbol{A}\right\},\\ \nu_N(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{m}\left(\left\{\omega\in\Omega\ ;\ \left(\zeta(s,\omega),\,(\omega(p_n))_{n=1}^N\right)\in\boldsymbol{A}\right\}\right)\end{aligned}$$

と定義する. ただし, $\mathcal{B}(S)$ は, 位相空間 S から生成される σ 加法族とする.

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1. 上記の記号と定義の下で, 次の主張が成り立つ:

(i) 確率測度 $\nu_{T,\,N}$ は, $T\to\infty$ のとき, μ_N に弱収束する.

(ii) 確率測度 μ_N の台は,

$$\{f\in H(D)\ ;\ f(s)\neq 0\ \mathit{for}\ s\in D\ \text{or}\ f\equiv 0\}\times\mathbb{T}^N$$

と一致する.

注意 2.2. 上記の定理はより一般のゼータ関数のクラスへ拡張できる. 実際, 筆者はプレプリント [2] において, Steuding クラスの元である条件をみたすものに対して, ハイブリッド同時普遍性定理を証明している.

3 証明の概略

定理 2.1 の (i) のみを概説する. Kowalski [4] の手法を用いる. 関数空間上では, 確率測度の Fourier 変換が使えないため, Bagchi の手法では, Prokhorov の定理, Birkhoff-Khinchin のエルゴード定理を用いる必要があった. Kowalski の手法は, 上記 2 つの定理を用いずに証明を行うことができる.

3.1 準備

位相空間 $H(D) \times \mathbb{T}^N$ は, 距離付可能である. 以下のように距離付けをする: 集合 D のコンパクトな部分集合の列 $\{K_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ を以下を満たすようにとる.

- $D = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell$,
- 任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して, $K_\ell \subset K_{\ell+1}^{\circ}$ が成り立つ, ただし, A° は集合 A の内部を表す,
- 任意のコンパクト部分な集合 $K \subset D$ に対して, ある $\ell \in \mathbb{N}$ が存在して, $K \subset K_\ell$ が成り立つ.

また, $H(D)$ 上の距離の列 $\{d_{\ell,\zeta}\}_{\ell=1}^{\infty}$ を, $f, g \in H(D)$ に対して,

$$d_{\ell,\zeta}(f,g) = \sup_{s \in K_\ell} |f(s) - g(s)|$$

で定義する. さらに, $H(D)$ 上に距離 d_ζ を

$$d_\zeta(f,g) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{d_{\ell,\zeta}(f,g) \wedge 1}{2^\ell}$$

で定義する. ただし, $a \wedge b$ は実数 a と b の最小値を表す. この距離 $H(D)$ から定まる位相は, 広義一様収束による位相に一致することが証明できる.

次に, 任意の素数 p に対して, $\mathbb{T}_p$ に距離を定義する. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と $\mathbb{T}_p$ が距離空間として以下のように同一視する. 任意の $\theta_1 + \mathbb{Z}, \theta_2 + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して, $d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ を

$$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(\theta_1 + \mathbb{Z},\, \theta_2 + \mathbb{Z}) = \|\theta_1 - \theta_2\|$$

と定義すると, $d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の距離になる. 写像 $T_p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}_p$ を $\theta + \mathbb{Z} \mapsto \exp(2\pi i \theta_p) \in \mathbb{T}_p$ で定義すると T_p は同型となる. よって, 任意の $x_p, y_p \in \mathbb{T}_p$ に対して,

$$d_p(x_p, y_p) = d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\left(T_p^{-1}(x_p), T_p^{-1}(y_p)\right)$$

とすると, d_p は $\mathbb{T}_p$ に距離を定める.

最後に, 距離 d を $H(D) \times \mathbb{T}^N$ 上に, 任意の $(f, \boldsymbol{x}) = \left(f, (x_{p_n})_{n=1}^{N}\right), (g, \boldsymbol{y}) = \left(g, (y_{p_n})_{n=1}^{N}\right) \in H(D) \times \mathbb{T}^N$ に対して,

$$d\left((f,\boldsymbol{x}), (g,\boldsymbol{y})\right) = d_\zeta(f,\, g) + \sum_{n=1}^{N} d_{p_n}(x_{p_n},\, y_{p_n})$$

で定める.

3.2 証明の概略

滑らかな実関数 $\lambda(x)$ でコンパクトな台を持ち, 任意の $x \in [0,1]$ に対して $\lambda(x)=1$ で, 任意の $x \in [0,\infty)$ に対して $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ を満たすようにとる.

任意の $X \geq 2$ に対して, 関数 $\zeta_X(s)$ を

$$\zeta_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n/X)}{n^s}$$

で定義する.

このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 3.1. 集合 C を D のコンパクトな部分集合とする. このとき,

$$\lim_{X\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \max_{s\in C} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_X(s+i\tau)|\, d\tau = 0.$$

が成り立つ.

次に, ランダムな場合の補題 3.1 を用意する. 任意の $\omega \in \Omega$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $n=1$ のときは $\omega(1)=1$, $n \geq 2$ のときは

$$\omega(n) = \prod_{j=1}^{k} \omega(p_j)^{r_j}$$

と定義する. ただし, $n = p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ は, n の素因数分解を表す.

以下において, 確率空間 $(M, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ と実数値確率変数 X に対して, X の期待値を

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X] = \int_M X(\omega) d\,\mathbb{P}(\omega)$$

で表す.

このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 3.2. 集合 C を D のコンパクトな部分集合とする. このとき,

$$\lim_{X\to\infty} \mathbb{E}^{\boldsymbol{m}}\left[\max_{s\in C} |\zeta(s,\omega) - \zeta_X(s,\omega)|\right] = 0.$$

が成り立つ.

以上の準備のもとで証明を行う.

定理 2.1 の証明. X を十分大きい正の実数とする. 区間 $[0,T]$ 上の確率 $\mathbb{P}_T$ を

$$\mathbb{P}_T(E) = \frac{1}{T}\operatorname{meas}(E), \quad E \in \mathcal{B}([0,T]).$$

で定義する．また, 有界な Lipschitz 連続関数 $F : H(D) \times \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}$ を任意にとる．このとき, 弱収束の性質から

$$\left|\mathbb{E}^{\nu_{T,N}}[F] - \mathbb{E}^{\nu_N}[F]\right| \to 0$$

を示せば十分である．F は有界な Lipschitz 連続関数なので, ある正の実数 $M(F)$, $C(F)$ が存在して,

$$|F(f, \boldsymbol{x})| \leq M(F) \quad \text{かつ} \quad |F(f, \boldsymbol{x}) - F(g, \boldsymbol{y})| \leq C(F) \cdot d\left((f, \boldsymbol{x}),\, (g, \boldsymbol{y})\right)$$

が任意の $(f, \boldsymbol{x}) = \left(f, (x_{p_n})_{n=1}^N\right)$, $(g, \boldsymbol{y}) = \left(g, (y_{p_n})_{n=1}^N\right) \in H(D) \times \mathbb{T}^N$ に対して成り立つ.

ここで, 記述を簡単にするために,

$$\boldsymbol{\gamma}_N(\tau) = \left(p_n^{i\tau}\right)_{n=1}^N \quad \text{と} \quad \omega_N = \left(\omega(p_n)\right)_{n=1}^N$$

と書く．このとき,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}^{\nu_{T,N}}[F] - \mathbb{E}^{\nu_N}[F]\right| \\
&= \left|\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F\left(\zeta(s+i\tau),\, \boldsymbol{\gamma}_N(\tau)\right)\right] - \mathbb{E}^{\boldsymbol{m}}\left[F\left(\zeta(s,\, \omega),\, \omega_N\right)\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F\left(\zeta(s+i\tau),\, \boldsymbol{\gamma}_N(\tau)\right)\right] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F\left(\zeta_X(s+i\tau),\, \boldsymbol{\gamma}_N(\tau)\right)\right]\right| \\
&\quad + \left|\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F\left(\zeta_X(s+i\tau),\, \boldsymbol{\gamma}_N(\tau)\right)\right] - \mathbb{E}^{\boldsymbol{m}}\left[F\left(\zeta_X(s,\, \omega),\, \omega_N\right)\right]\right| \\
&\quad + \left|\mathbb{E}^{\boldsymbol{m}}\left[F\left(\zeta_X(s,\, \omega),\, \omega_N\right)\right] - \mathbb{E}^{\boldsymbol{m}}\left[F\left(\zeta(s,\, \omega),\, \omega_N\right)\right]\right| \\
&=: \Sigma_1(T,\, X) + \Sigma_2(T,\, X) + \Sigma_3(T,\, X)
\end{aligned}$$

と上から 3 つの項で評価できる.

$\Sigma_1(T,\, X)$ に関しては, 補題 3.1 により,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(T,\, X) &\leq C(F) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[d\left(\left(\zeta(s+i\tau),\, \boldsymbol{\gamma}_N(\tau)\right),\, \left(\zeta_X(s+i\tau),\, \boldsymbol{\gamma}_N(\tau)\right)\right)\right] \\
&= C(F) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[d_\zeta\left(\zeta(s+i\tau),\, \zeta_X(s+i\tau)\right)\right] \\
&\leq C(F) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[d_\ell\left(\zeta(s+i\tau),\, \zeta_X(s+i\tau)\right)\right] \wedge 1}{2^\ell} \\
&= C(F) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{T}\int_0^T \max_{s \in K_\ell} \left|\zeta(s+i\tau) - \zeta_X(s+i\tau)\right| d\tau\right) \wedge 1}{2^\ell} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

が $\lim_{X\to\infty} \limsup_{T\to\infty}$ という極限を取ったときに成り立つ．極限と積分の交換は, Lebesgue の収束定理から保証される.

$\Sigma_2(T,\, X)$ に関しては, Kronecker-Weyl の近似定理により,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_T}\left[F\left(\zeta_X(s+i\tau),\, \boldsymbol{\gamma}_N(\tau)\right)\right] \to \mathbb{E}^{\boldsymbol{m}}\left[F\left(\zeta_X(s,\, \omega),\, \omega_N\right)\right]$$

が $T \to \infty$ のとき成り立つことが証明できるので, $\Sigma_2(T, X) \to 0$ が示される.

$\Sigma_3(T, X)$ の計算は $\Sigma_1(T, X)$ に類似している. 実際, 補題 3.2 より,

$$\Sigma_3(T, X) \leq C(F) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{E}^{\boldsymbol{m}}[\max_{s\in K_\ell} |\zeta_X(s, \omega) - \zeta(s, \omega)|]) \wedge 1}{2^\ell}$$
$$\to 0$$

が $\lim_{X\to\infty} \limsup_{T\to\infty}$ という極限を取ったときに成り立つ. 同様に, 極限と積分の交換は Lebesgue の収束定理から保証される. □

謝辞

ご講演の機会をくださいました研究集会代表者の中筋麻貴先生と研究副代表者の谷口隆先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Thesis, University of Michigan, 1979.

[2] K. Endo, *Limit theorem for the hybrid joint universality theorem on zeta and L-functions*, 2024, preprint, `https://arxiv.org/abs/2410.17575`.

[3] J. Kaczorowski and M. Kulas, *On the non-trivial zeros off the critical line for L-functions from the extended Selberg class*, Monatsh. Math. **150** (2007), 217-232.

[4] E. Kowalski, *An introduction to Probabilistic Number Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 192, Cambridge University Press, Cambridge, 2021.

[5] K. Matsumoto, *A survey of the theory of the universality for zeta and L-functions*, Number theory, 95–144, Ser. Number Theory Appl, **11**, World. Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015.

[6] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions*, Math. Z. **284** (2016), 23–39.

[7] Ł. Pańkowski, *Hybrid universality theorem for Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **141** (2010), 59-72.

[8] S. M. Voronin, *Theorem on the 'universality' of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **39** (1975), 475–486 (in Russian). English transl. : *Math. USSR, Izv.*, **9** (1975), 443–445.