Various types of multiple polylogarithms and related zeta values

金子 昌信 （九州大学）・ 津村 博文 （東京都立大学）
Masanobu Kaneko (Kyushu Univ.)
Hirofumi Tsumura (Tokyo Metropolitan Univ.)

この論説では, 既に出版されている [10,11] に含まれている**レベル 4 の多重 L 値**や 2 変数の**多重ポリログ**に関する結果を含むような, より一般的な枠組みにおける結果を紹介する. 具体的には, 既存のものとは異なる多重ポリログを, [1] で考察されている手法がうまく働くような形で定義し, 多重ゼータ値の一般化にあたる概念を定義することで, それらの値の間の関係式を与える. 具体例として, 多重 L 値や多重ポリログの既知の関係式に加えて, これまでに知られていないような多重級数の値の間の関係式も与えることができる. これらの詳細や証明については, 現在準備中の [12] を参照いただきたい.

1. Introduction

1 変数の**多重ポリログ**

$$\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;z)=\sum_{m_1<\cdots<m_r}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\qquad(|z|<1;\ k_1,\ldots,\ k_r\in\mathbb{Z})$$

は, 数学の様々な分野に登場するが, とくに admissible index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ $(k_r\geq 2)$ について定義される**多重ゼータ値**

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\ldots,k_r):=\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;1)$$

の研究においても重要な役割を果たしている. 良く知られているように $r=1$ の場合, $\mathrm{Li}(k;z)$ は帰納的な関係

$$\mathrm{Li}(k;z)=\int_0^z\frac{\mathrm{Li}(k-1;u)}{u}\,du\qquad(k\geq 2)$$

を満たし, さらに $k_1,\ldots,\ k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z\frac{\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r-1;u)}{u}\,du & (k_r>1),\\ \displaystyle\int_0^z\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_{r-1};u)\mathrm{Li}'(1;u)\,du & (k_r=1)\end{cases}$$

という関係が成り立つ. これを踏まえて, $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, **Arakawa-Kaneko ゼータ関数** が

$$\xi(k_1,\ldots,k_r;s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;1-e^{-t})}{e^t-1}\,dt\quad(\mathrm{Re}(s)>0)\tag{1.1}$$

により定義されている ([1]). この関数は, 全平面に解析接続されて

$$\xi(k_1,\ldots,k_r;-n)=(-1)^nC_n^{(k_1,\ldots,k_r)}\quad(n\geq 0)$$

を満たす. ここで $C_n^{(k_1,\ldots,k_r)}$ は C 型ポリベルヌーイ数と呼ばれるもので

$$\frac{\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;1-e^{-t})}{e^t-1}=\sum_{n=0}^\infty C_n^{(k_1,\ldots,k_r)}\frac{t^n}{n!}$$

によって定義される ([5]).

とくに $\mathrm{Li}(1;z)=-\log(1-z)$, すなわち $\mathrm{Li}(1;1-e^{-t})=t$ から

$$\xi(1;s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{t}{e^t-1}\,dt=s\zeta(s+1)$$

が成り立つ. ここで $\underline{f(t) = 1 - e^{-t}}$ とおくと, $f^{-1}(z) = -\log(1-z) = \mathrm{Li}(1; z)$ が成り立ち, 対数微分を考えると

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1}$$

が成り立つ. このことから

$$\xi(1; s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{f^{-1}(f(t))\, f'(t)}{f(t)}\, dt \tag{1.2}$$

となって, $\xi(1; s)$ は $f(t)$ **から決まる**ことがわかる. この (1.2) が Arakawa-Kaneko ゼータ関数の一般化を構成する上での重要な表示である.

例えば $f(t)$ の代わりに, [8, 9] で扱われた

$$g(t) = \tanh(t/2) = \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

を考えると,

$$g^{-1}(z) = 2\tanh^{-1}(z) = 2\sum_{m=0}^\infty \frac{z^{2m+1}}{2m+1} = \mathrm{Li}(1; z) - \mathrm{Li}(1; -z)$$

となり, これがレベル 2 のポリログで位数が 1 のものであり, [9] で $A(1; z)$ と書かれた関数である. 一般に $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, **レベル 2 の多重ポリログ**とその $z = 1$ での値として**多重 T 値**が

$$A(k_1, \ldots, k_r; z) = 2^r \sum_{\substack{m_1 < \cdots < m_r \\ m_j \equiv j \bmod 2}} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_r^{k_r}},$$

$$T(k_1, \ldots, k_r) = A(k_1, \ldots, k_r; 1) \quad (k_r \geq 2)$$

で定義され, 対応する**レベル 2 の Arakawa-Kaneko ゼータ関数**が (1.1) の類似として

$$\psi(k_1, \ldots, k_r; s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{A(k_1, \ldots, k_r; \tanh(t/2))}{\sinh t}\, dt \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

で定義された ([8, Def. 7]). この関数も全平面に解析接続されて, とくに $r = 1, k_1 = 1$ の場合,

$$\psi(1; s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{t}{\sinh t}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{g^{-1}(g(t))\, g'(t)}{g(t)}\, dt \tag{1.3}$$

とあらわされて, (1.2) において $f(t)$ を $g(t)$ で置き換えた形になっていることがわかる.

以下では, $f(t)$ や $g(t)$ の一般化となるような $h(t)$ のクラスを考え, 既知の結果を含むような一般的な枠組みでの結果を導出することを目的とする.

2. 一般化多重ポリログ

この節では $f(t), g(t)$ を含む一般的な関数の枠組みを考察するために, 次の条件を満たす $h(t)$ を考える:

Assumption. $h(t)$ は有理型関数で次の 3 つの条件を満たすものとする：

(C-1) $h(t)$ は原点で正則で, $h'(0) \neq 0$.
(C-2) $h(t)$ は $\alpha \in \mathbb{C}$ で 1 位の零点を持つ. ここで, α は原点からもっとも近い零点である.
(C-3) 複素数列 $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ で $\gamma_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ となるものが存在して, 以下の級数表示が成り立つ：

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \sum_{n=1}^\infty \gamma_n e^{-nt} \quad (\mathrm{Re}(t) > 0).$$

Example 1. 上述の $f(t) = 1 - e^{-t}$, $g(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}$ について, ともに $\alpha = 0$ で,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^\infty e^{-nt}, \quad \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = 2\sum_{m=0}^\infty e^{-(2m+1)t}.$$

まず, 位数 1 のポリログである $\mathrm{Li}(1;z)\,(=f^{-1}(t))$ や $A(1;z)(=g^{-1}(t))$ の一般化となるような（h に付随する）位数 1 のポリログ $\mathrm{Li}_h(1;z)=h^{-1}(t)$ を以下のように定義する. 条件 (C-2) より, $h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)\neq 0$ から, **複素関数の逆関数定理**より, ある原点の近傍において, 逆関数 $h^{-1}(z)$ が存在して, $h^{-1}(0)=\alpha$ が成り立つ.

Definition 1. ある開円板 $\{z\mid |z|<R_h\}$ において, $h(t)$ の逆関数として, h **に付随する位数 1 のポリログ**が定義されて, 以下のような級数表示をもつ：

$$\mathrm{Li}_h(1;z):=h^{-1}(z)=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}z^n\quad (c_n\in\mathbb{C}\ (n\geq 1)).$$

ここで α は原点からもっとも近い $h(t)$ の零点で, その位数は 1 位である. とくに $\mathrm{Li}_h(1;h(t))=t$ から, $\mathrm{Li}_h(1;z)$ は $z=h(0)$ で零点を持つ： $\mathrm{Li}_h(1;h(0))=h^{-1}(h(0))=0$.

Example 2. $h(t)$ が $f(t)=1-e^{-t}$, $g(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}$ のとき, $R_f=R_g=1$ で $\alpha=0$ から,

$$\mathrm{Li}_f(1;z)=f^{-1}(z)=\mathrm{Li}(1;z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n\ \ (|z|<1),\quad \mathrm{Li}(1;0)=0;$$

$$\mathrm{Li}_g(1;z)=g^{-1}(z)=A(1;z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}z^{2m+1}\ \ (|z|<1),\quad A(1;0)=0.$$

Definition 2 (h に付随する多重ポリログ). $k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ について,

$$\mathrm{Li}_h(k;z):=\int_{h(0)}^{z}\frac{\mathrm{Li}_h(k-1;u)}{u}\,du.$$

さらに, $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ について,

$$\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_r;z):=\begin{cases}\displaystyle\int_{h(0)}^{z}\frac{\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r-1;u)}{u}\,du & (k_r>1),\\ \displaystyle\int_{h(0)}^{z}\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_{r-1};u)\mathrm{Li}_h'(1;u)\,du & (k_r=1).\end{cases}$$

仮定から $h(t)$ は原点で**高々1 位**の零点を持つので, $\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_r;h(0))=0$ から, 以下の展開により h に付随する多重ポリベルヌーイ数 $\{B_{n,h}^{(k_1,\ldots,k_r)}\}$ が定義できる.

Definition 3 (h に付随する多重ポリベルヌーイ数). $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_r;h(t))\frac{h'(t)}{h(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,h}^{(k_1,\ldots,k_r)}\frac{t^n}{n!}. \tag{2.1}$$

ただし, 右辺の展開の収束半径は $h(t)$ の零点 α の位置によって決まる.

Remark 1. 定義から, 以下が成り立つ：

$$\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_r;h(t))=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r-1;h(u))\frac{h'(u)}{h(u)}\,du & (k_r>1),\\ \displaystyle\int_0^t\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_{r-1};h(u))\mathrm{Li}_h'(1;h(u))\frac{h'(u)}{h(u)}\,du & (k_r=1).\end{cases}$$

$\mathrm{Li}_h(1;h(t))=t$ より, 帰納的に $\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_r;h(t))$ は全平面に有理型接続されて, とくに条件 (C-3) より $\mathrm{Re}(t)>0$ では正則である. さらに帰納的に, 以下のオーダー評価も得られる：

$$\mathrm{Li}_h(k_1,\ldots,k_r;h(t))=O\left(t^{k_1+\cdots+k_r}\right)\ \ (t\to\infty). \tag{2.2}$$

条件 (C-3) より, $h'(t)/h(t)=O(e^{-t})\ (t\to\infty)$ がわかるので, (2.2) とあわせて次の定義が与えられる.

Definition 4 (h **に付随する Arakawa-Kaneko ゼータ関数**)**.** $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ について

$$\xi_h(k_1,\dots,k_r;s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{Li}_h(k_1,\dots,k_r;h(t))\,\frac{h'(t)}{h(t)}\,dt \quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

これは全平面に解析接続されて, 次が成り立つ：

$$\xi_h(k_1,\dots,k_r;-n) = (-1)^n B_{n,h}^{(k_1,\dots,k_r)} \quad (n\geq 0).$$

この関数の自然数での値 $\xi_h(k_1,\dots,k_r;m)$ $(m\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$ は, 以下の定理で示す通り, 次の一般化された多重ゼータ値であらわされる.

Definition 5 (h **に付随する多重ゼータ値**)**.** admissble index $(l_1,\dots,l_r)$ に対して,

$$\zeta_h(l_1,\dots,l_r) := \sum_{m_1,\dots,m_r\geq 1}\frac{\gamma_{m_1}\cdots\gamma_{m_r}}{m_1^{l_1}(m_1+m_2)^{l_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{l_r}}.$$

ここで $\{\gamma_n\}$ は条件 (C-3) で定まる数列である.

Remark 2. Example 1 から, 次がわかる：

$$\zeta_f(l_1,\dots,l_r)=\zeta(l_1,\dots,l_r),\quad \zeta_g(l_1,\dots,l_r)=T(l_1,\dots,l_r),$$
$$\xi_f(k_1,\dots,k_r;s)=\xi(k_1,\dots,k_r;s),\quad \xi_g(k_1,\dots,k_r;s)=\psi(k_1,\dots,k_r;s).$$

Arakawa-Kaneko の手法 ([1,2]) を用いると, 次の結果が得られる. これは $h(t)=f(t)$, $g(t)$ の場合に, それぞれ [1, Theorem 9 (1)], [8, Theorem 5.5] と一致する.

Theorem 1. $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\xi_h(\overbrace{1,\dots,1}^{r-1},k;m+1) = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_k\geq 0\\ j_1+\cdots+j_k=m}}\binom{j_k+r}{j_k}\cdot\zeta_h(j_1+1,\dots,j_{k-1}+1,j_k+r+1).$$

$\xi_h(\overbrace{1,\dots,1}^{r-1},k;m+1)$ を計算することで, 次の**高さ 1 の双対公式**の一般化が得られる.

Theorem 2. $k,r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ について,

$$\zeta_h(\underbrace{1,\dots,1}_{k-1},r+1) = \mathrm{Li}_h(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1},k+1;h(\infty)).$$

Remark 3. Theorem 2 で $h(t)=f(t)$, $g(t)$ の場合は, $f(\infty)=g(\infty)=1$ から, 多重ゼータ値, 多重 T 値の（高さ 1 の）双対公式 (cf. [9, Theorem 3.1]) と一致する.

さらに [1] の手法を適用すると, 以下の定理が得られる. これは $h(t)=f(t)$, $g(t)$ の場合に, それぞれ [1, Corollary 11], [8, Theorem 5.7] と一致する.

Theorem 3. $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathrm{Re}(s)>0$ について,

$$\begin{aligned}\xi_h(\overbrace{1,\dots,1}^{r-1},k;s) &= (-1)^{k-1}\sum_{\substack{j_1,\dots,j_k\geq 0\\ j_1+\cdots+j_k=r}}\binom{s+j_k-1}{j_k}\cdot\zeta_h(j_1+1,\dots,j_{k-1}+1,j_k+s)\\ &\quad+\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta_h(\underbrace{1,\dots,1}_{k-j-2},r+1)\,\zeta_h(\underbrace{1,\dots,1}_{j},s).\end{aligned}$$

さらに双対公式の一般化を考える. 通常の記号のように, 数列 $\varepsilon_i\in\{0,1\}$ $(1\leq i\leq k)$ で $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_k=0$ となるものに対し

$$I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) := \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\Omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\Omega_{\varepsilon_k}(t_k),\quad \widetilde{I}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) := \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\widetilde{\Omega}_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\widetilde{\Omega}_{\varepsilon_k}(t_k)$$

とおく. ただし, 条件 (C-3) で定義された $\{\gamma_n\}$ と Definition 1 で定義された $\{c_n\}$ に対し,

$$\Omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \quad \Omega_1(t) = \mathrm{Li}'_h(1;t)\,dt = \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{n-1}\right) dt,$$

$$\widetilde{\Omega}_0(t) = \frac{dt}{t}, \quad \widetilde{\Omega}_1(t) = \frac{h'(-\log t)}{h(-\log t)}\frac{dt}{t} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n t^{n-1}\right) dt.$$

このとき, 変数変換 $s = h(-\log t)$ について, $\Omega_0(s) = -\widetilde{\Omega}_1(t)$, $\Omega_1(s) = -\widetilde{\Omega}_0(t)$ を満たすことがすぐにわかる. ここで $h(0) = 0$ を満たせば, Definition 2 から

$$\mathrm{Li}_h(l_1, \ldots, l_r; z) = \sum_{m_1,\ldots,m_r \geq 1} \frac{c_{m_1} \cdots c_{m_r}}{m_1^{l_1}(m_1+m_2)^{l_2} \cdots (m_1+\cdots+m_r)^{l_r}}.$$

さらに $h(\infty) = 1$ を満たせば, 多重ゼータ値の双対公式と同様に $s_i = h(-\log t_{k-i+1})$ によって,

$$I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \widetilde{I}(1-\varepsilon_k, \ldots, 1-\varepsilon_1)$$

が確かめられる. よって Ω_i, $\widetilde{\Omega}_i$ の定義から, 次が成り立つ.

Theorem 4 (**双対公式**). *h が $h(0) = 0$, $h(\infty) = 1$ を満たすとき, admissible index $\mathbf{k}$ と dual index $\mathbf{k}^\dagger$ に対し*

$$\zeta_h(\mathbf{k}) = \mathrm{Li}_h(\mathbf{k}^\dagger; 1).$$

とくに $h = f, g$ の場合は, 多重ゼータ値, 多重 T 値の双対公式と一致する.

3. いくつかの例

この節では, §2の結果の具体例を与える.

3.1. **2変数多重ポリログ.** $|x|$, $|y| \leq 1$, $x \neq 0$, $y \neq 1$, $xy \neq 1$ を満たす $x, y \in \mathbb{C}$ について,

$$h_{x,y}(t) = \frac{1 - xe^{-t}}{1 - xye^{-t}}$$

とおく. とくに $(x, y) = (1, 0)$ のとき, $h_{1,0}(t) = 1 - e^{-t} (= f(t))$ となる. $h(t) = h_{x,y}(t)$ に関して, §2の記号では, $\alpha = \log x$, $h_{x,y}(0) = (1-x)/(1-xy)$,

$$\mathrm{Li}_{h_{x,y}}(1; z) \left(= h_{x,y}^{-1}(z)\right) = \log x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-y^m}{m} z^m \quad (\text{i.e. } c_m = 1 - y^m),$$

$$\mathrm{Li}_{h_{x,y}}(k_1, \ldots, k_r; z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{(1-x)/(1-xy)}^{z} \frac{\mathrm{Li}_{h_{x,y}}(k_1, \ldots, k_{r-1}, k_r - 1; u)}{u}\, du & (k_r > 1) \\ \displaystyle\int_{(1-x)/(1-xy)}^{z} \frac{\mathrm{Li}_{h_{x,y}}(k_1, \ldots, k_{r-1}; u)}{\mathrm{Li}'_{h_{x,y}}(1; u)}\, du & (k_r = 1), \end{cases}$$

$$\frac{h'_{x,y}(t)}{h_{x,y}(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-y^n)e^{-nt} \quad (\text{i.e. } \gamma_n = x^n(1-y^n))$$

となる. また, 対応する多重ゼータ値

$$\zeta_{h_{x,y}}(l_1, \ldots, l_r) = \sum_{m_1,\ldots,m_r \geq 1} \frac{\prod_{j=1}^{r} x^{m_j}(1-y^{m_j})}{m_1^{l_1}(m_1+m_2)^{l_2} \cdots (m_1+\cdots+m_r)^{l_r}} \tag{3.1}$$

は本質的に2変数の多重ポリログであるため, これを $\mathcal{L}(l_1, \ldots, l_r; x, y)$ とあらわす.

Remark 4. Chapoton [4] は, パラメータ $c \in [-1, 1]$ に対し, $h_{1,c}(t)$ を考えて, 1-パラメータの多重 T 値として, $\zeta_{h_{1,c}}(l_1, \ldots, l_r)$ を考察している. Kamano [6] は（実質2変数の）多重ポリログとして, $\mathrm{Li}_c(l_1, \ldots, l_r; z) = \zeta_{h_{z,c}}(l_1, \ldots, l_r)$ を考察しているが, 本論説では, これを多重ゼータ値 (3.1) と見なしている.

$h_{x,y}(\infty) = 1$ より, Theorem 2 から次を得る：

Theorem 5 (**高さ 1 の双対公式**). $r, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $x, y \in \mathbb{C}$ が $|x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |(1-x)/(1-xy)| \leq 1,$ $y \neq 1,\ xy \neq 1$ を満たすとき,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1}, k+1; x, y) = \mathrm{Li}_{h_{x,y}}(\underbrace{1,\dots,1}_{k-1}, r+1; 1) \\
&= (-1)^k \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=r+k+1 \\ \forall j_i \geq 1}} \mathcal{L}(\underbrace{1,\dots,1}_{j_{k+1}-1}; x, y)\, \mathcal{L}(j_1,\dots,j_k; \frac{1-x}{1-xy}, y) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \mathcal{L}(\underbrace{1,\dots,1}_{r-1}, k+1-j; 1, y)\, \mathcal{L}(\underbrace{1,\dots,1}_{j}; \frac{1-x}{1-xy}, y).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし $\mathcal{L}(\varnothing; x, y) = 1$ とする.

Remark 5. $\mathcal{L}(k_1,\dots,k_r; x, 0) = \mathrm{Li}(k_1,\dots,k_r; x),\quad \mathcal{L}(k_1,\dots,k_r; x, -1) = A(k_1,\dots,k_r; x)$ から, $y = 0, -1$ の場合はそれぞれ 1 変数の多重ポリログの関係式 [7, Remark 3.7], [13, Theorem 4.14] と一致する.

とくに (3.2) で $(k, r) = (1, 1)$ の場合は,

$$\mathcal{L}(2; x, y) = -\mathcal{L}(2; \frac{1-x}{1-xy}, y) - \mathcal{L}(1; x, y)\, \mathcal{L}(1; \frac{1-x}{1-xy}, y) + \mathcal{L}(2; 1, y)$$

となり, $\mathcal{L}(k; x, y) = \mathrm{Li}(k; x) - \mathrm{Li}(k; xy)$ に注意すると, 容易に **dilog の 5 項関係式** ([16, Chap. 1]) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}(2; x) + \mathrm{Li}(2; y) + \mathrm{Li}(2; 1-xy) + \mathrm{Li}\left(2; \frac{1-x}{1-xy}\right) + \mathrm{Li}\left(2; \frac{1-y}{1-xy}\right) \\
&= 3\zeta(2) - \log x \log(1-x) - \log y \log(1-y) - \log\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) \log\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)
\end{aligned}$$

に変形できる. 注として, $(x, y) \to (1, 0)$ とすると, 自明な双対公式 $\zeta(2) = \zeta(2)$ を得るため, 上記の 5 項関係式がある種の双対公式として得られるのは自然である.

さらに, (3.2) で $(k, r) = (1, 2)$ の場合から, 2 変数 2 重ポリログ

$$\mathrm{Li}(k_1, k_2; x_1, x_2) = \sum_{1 \leq m < n} \frac{x_1^m x_2^n}{m^{k_1} n^{k_2}} \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ |x_1| < 1,\ |x_2| < 1)$$

に関する双対公式が得られる.

Example 3. $x, y \in \mathbb{C}$ が $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |(1-x)/(1-xy)| \leq 1, y \neq 1, xy \neq 1$ を満たすとき,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}\,(1, 2; 1, x) - \mathrm{Li}\,(1, 2; y, x) - \mathrm{Li}\left(1, 2; y^{-1}, xy\right) + \mathrm{Li}\,(1, 2; 1, xy) \\
&= \zeta(3) - \mathrm{Li}\left(3; \frac{1-x}{1-xy}\right) - \mathrm{Li}\,(3; y) + \mathrm{Li}\left(3; \frac{(1-x)y}{1-xy}\right) \\
&\quad + (\log x)\left\{\mathrm{Li}\left(2; \frac{1-x}{1-xy}\right) - \mathrm{Li}\left(2; \frac{(1-x)y}{1-xy}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left(\log \frac{1-x}{1-xy}\right)^2 \log x.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

とくに $(x, y) \to (1, 0)$ とすると, Euler の双対公式 $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$ を得る.
注として, (3.3) は, 既知の $\mathrm{Li}(2, 1; x, y)$ に関する関係式 ([17, (2.48)]) からも得られる.

3.2. Dirichlet 指標に付随する多重ポリログ.

導手 N の 2 次原始 Dirichlet 指標 χ_N について,

$$h_{\chi_N}(t) := \prod_{a=1}^{N} \left(1 - \zeta_N^{-a} e^{-t}\right)^{\chi_N(a)} = \frac{\prod_{\chi_N(a)=1} \left(1 - \zeta_N^{-a} e^{-t}\right)}{\prod_{\chi_N(b)=-1} \left(1 - \zeta_N^{-b} e^{-t}\right)} \tag{3.4}$$

とおく. ここで $\zeta_N = e^{2\pi i/N}$ を 1 の原始 N 乗根とする.

注として, 導手 $N = 1$ の単位指標 χ_1 に対して, h_{χ_1} を (3.4) で定義すると, $h_{\chi_1}(t) = 1 - e^{-t} = f(t)$, つまり $h_{\chi_1}^{-1}(t) = \mathrm{Li}(1; t)$ となる.

そこでその一般化として, $\chi = \chi_{_N}$ として, $N > 1$ を仮定し, $G(\chi) = \sum_{a=1}^{N} \chi(a)\zeta_N^a$ を**ガウス和**とする. $h(t) = h_\chi(t)$ に関して, §2 の記号では, $\alpha = -2\pi i/N$,

$$h_\chi(0) = \prod_{a=1}^{N} \left(1 - \zeta_N^{-a}\right)^{\chi(a)} = e^{-G(\chi)\,L(1,\chi)}.$$

ただし $L(s;\chi)$ は Dirichlet L 関数である. このとき,

$$\mathrm{Li}_\chi(1;z) \left(= h_\chi^{-1}(z)\right) = -\frac{2\pi i}{N} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{m,\chi}}{m} z^m,$$

$$\mathrm{Li}_\chi(k_1,\dots,k_r;z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{h_\chi(0)}^{z} \frac{\mathrm{Li}_\chi(k_1,\dots,k_{r-1},k_r-1;u)}{u}\,du & (k_r > 1) \\ \displaystyle\int_{h_\chi(0)}^{z} \mathrm{Li}_\chi(k_1,\dots,k_{r-1};u)\mathrm{Li}'_\chi(1;u)\,du & (k_r = 1), \end{cases}$$

$$\frac{h'_\chi(t)}{h_\chi(t)} = \chi(-1)\,G(\chi)\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)e^{-nt} \quad (\text{i.e. } \gamma_n = \chi(-1)\,G(\chi)\,\chi(n)),$$

$$\zeta_{h_\chi}(k_1,\dots,k_r) = (\chi(-1)\,G(\chi))^r L_{ш}(k_1,\dots,k_r;\chi,\dots,\chi).$$

となる. ここで

$$L_{ш}(k_1,\dots,k_r;\chi,\dots,\chi) = \sum_{m_1,\dots,m_r=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{r} \chi(m_j)}{\prod_{j=1}^{r} (\sum_{\nu=1}^{j} m_\nu)^{k_j}}$$

は [2, § 1.1] で定義された**(ш-型)多重 L 値**である. さらに χ に付随する多重ポリベルヌーイ数と Arakawa-Kaneko ゼータ関数は

$$\frac{\mathrm{Li}_\chi(k_1,\dots,k_r;h_\chi(t))\,h'_\chi(t)}{G(\chi)\,h_\chi(t)} = \sum_{a=0}^{N-1} \frac{\mathrm{Li}_\chi(k_1,\dots,k_r;h_\chi(t))\,\chi(a)e^{at}}{e^{Nt}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi}^{(k_1,\dots,k_r)} \frac{t^n}{n!},$$

$$\xi(k_1,\dots,k_r;s;\chi) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1}\,\mathrm{Li}_\chi(k_1,\dots,k_r;h_\chi(t))\,\frac{h'_\chi(t)}{h_\chi(t)}\,dt.$$

Remark 6. $N = 4$ の場合は既に [10] で扱っており, この論説ではその一般化を与えている. 実際, $h(t) = h_{\chi_4}(t)$ に関する Theorem 1-3 の結果は [11, § 4] の結果と一致する.

$N = 3$ の場合は, $N = 4$ の場合の類似として, Uchida ([15]) により導手 3 の(ш-型)多重 L 値の間の関係式が与えられているが, それらを踏まえて, 数値実験により以下の次元予想を与える.

Conjecture. 導手 3 で重さが k の(ш-型)多重 L 値の張る $\mathbb{Q}$ 上の線形空間の次元を $d_k^{(3)}$ とおくとき, 以下が成り立つ:

$$d_0^{(3)} = 1,\ \ d_{2n+1}^{(3)} = 3^n,\ \ d_{2n+2}^{(3)} = 2\cdot 3^n \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (\text{cf. OEIS: A182522}).$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_k^{(3)}$	1	1	2	3	6	9	18	27	54	81	162

3.3. **多重指数関数に付随する多重ポリログ.** Bell ([3]) は多重指数関数 (Iterated exponential function) を以下のように定義している:

Definition 6 (多重指数関数). $\{E_n(t) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を以下で定義する:

$$E_0(t) = e^t, \quad E_n(t) = \begin{cases} e^{E_{n-1}(t)-1} & (n \geq 1), \\ 1 + \log(E_{n+1}(t)) & (n \leq -1). \end{cases}$$

Example 4. 定義から, $E_{-1}(t) = 1 + t$, $E_{-2}(t) = 1 + \log(1 + t)$. また $n = 1$ の場合：

$$E_1(t) = e^{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{B}_n \frac{t^n}{n!}$$

として定義される $\boldsymbol{B}_n$ は**ベル数**と呼ばれ, 組合せ論的に興味深い性質をもっている ([14] 参照).

多重指数関数に付随して, 関数列 $\{F_n(t) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を

$$F_n(t) = 1 - E_{n-1}(-t) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

によって定義する. これは $F_1(t) = 1 - e^{-t} = f(t)$ の一般化と見なせるもので, $F_0(t) = t$ であって

$$F_{-1}(t) = -\log(1 - t) = \mathrm{Li}(1; t) = f^{-1}(t)$$

となり, 帰納的に $F_{-n}(F_n(t)) = t \ (n \in \mathbb{Z})$ が成り立つことが示せる.

そこで $F_1(t)$ の代わりに $F_n(t)$ $(n \geq 2)$ を考えることで, $f(t) = F_1(t)$ に関する既知の結果の一般化が期待される. 注として, 帰納的に以下が容易にわかる：

$$F_{-n}(t) = \underbrace{\mathrm{Li}(1; \mathrm{Li}(1; \cdots \mathrm{Li}}_{n}(1; t)) \cdots).$$

ここでは $n = 2$ の場合, つまり

$$h_B(t) := \frac{1}{1 - e^{-1}} F_2(t) = \frac{1 - e^{e^{-t} - 1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \boldsymbol{B}_n \frac{t^n}{n!}$$

について考察する. 関連して, 以下の古典的な数列 $\{a(n)\}$ を定義する (OEIS:A003713)：

$$\log \frac{1}{1 + \log(1 - z)} \ (= F_{-2}(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{z^n}{n!} \quad \left(|z| < 1 - e^{-1}\right).$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(n)$	1	2	7	35	228	1834	17582	195866	2487832	35499576

Remark 7. 第 1 種スターリング数を $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ とすると, 以下が知られている：

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} (k - 1)! \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad (n \geq 1).$$

このとき, $h(t) = h_B(t)$ に関して, § 2 の記号では, $\alpha = 0$ であり, 付随するポリログは

$$\mathrm{Li}_B(1; z) = h_B^{-1}(z) = F_{-2}((1 - e^{-1})z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)(1 - e^{-1})^n}{(n - 1)!} \frac{z^n}{n},$$

$$\mathrm{Li}_B(k_1, \ldots, k_r; z) = \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{r} a(m_j)(1 - e^{-1})^{m_j}}{\prod_{j=1}^{r} (m_j - 1)! \, (\sum_{\nu=1}^{j} m_\nu)^{k_j}} z^{m_1 + \cdots + m_r}.$$

また

$$\frac{h_B'(t)}{h_B(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Li}(1 - n; e^{-1})}{(n - 1)!} e^{-nt} \qquad \left(\text{i.e.} \quad \gamma_n = \frac{\mathrm{Li}(1 - n; e^{-1})}{(n - 1)!}\right),$$

$$\zeta_B(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{r} \mathrm{Li}(1 - m_j; e^{-1})}{\prod_{j=1}^{r} (m_j - 1)! \, (\sum_{\nu=1}^{j} m_\nu)^{k_j}}$$

となる. このとき, Eulerian polynomial $\{A_n(x)\}_{n \geq 0}$：

$$A_0(x) = 1, \quad A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k(x)(x - 1)^{n-1-k} \ (n \geq 1)$$

に対して, 以下が良く知られている：

$$\mathrm{Li}_{-n}(x) = \frac{x\,A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \quad (n \geq 0).$$

$h_B(0) = 0,\ h_B(\infty) = 1$ より, Theorem 4 から双対公式が成り立つ：

Theorem 6. *admissible index* $\mathbf{k}$ とその *dual index* $\mathbf{k}^\dagger$ に対し, $\zeta_B(\mathbf{k}) = \mathrm{Li}_B(\mathbf{k}^\dagger; 1)$.

Example 5. $k = 2$ のとき, $\zeta_B(2) = \mathrm{Li}_B(2; 1)$, つまり

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Li}(1-m; e^{-1})}{(m-1)!\,m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\,(1-e^{-1})^m}{(m-1)!\,m^2} \ (= 1.2067\cdots)$$

が成り立つ. 実際, $m \to \infty$ のとき,

$$\mathrm{Li}(1-m; e^{-1}) \sim (m-1)!\,, \quad a(m)\left(1-e^{-1}\right)^m \sim (m-1)!$$

であることが知られている. $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = (1, 2),\ \mathbf{k}^\dagger = (3)$ のとき, $\zeta_B(1, 2) = \mathrm{Li}_B(3; 1)$, つまり

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Li}(1-m; e^{-1})\mathrm{Li}(1-n; e^{-1})}{(m-1)!(n-1)!\,m(m+n)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\,(1-e^{-1})^m}{(m-1)!\,m^3} \ (= 0.8031\cdots)$$

が成り立つ.

References

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189–209.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, On multiple L-values, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 967–991.

[3] E. T. Bell, The iterated exponential integers, Ann. Math. **39** (1938), 539–557.

[4] F. Chapoton, Multiple T-values with one parameter, Tsukuba J. Math. **46** (2022), 153–163.

[5] K. Imatomi, M. Kaneko and E. Takeda, Multi-poly-Bernoulli numbers and finite multiple zeta values, J. Integer Seq. **17** (2014), Article 14.4.5.

[6] K. Kamano, Poly-Bernoulli numbers with one parameter and their generating functions, Comment. Math. Univ. St. Pauli **71** (2023), 37–50.

[7] M. Kaneko and H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, Nagoya Math. J. **232** (2018), 19–54.

[8] M. Kaneko and H. Tsumura, Zeta functions connecting multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers, Adv. Stud. Pure Math. **84**, 2020, pp. 181–204.

[9] M. Kaneko and H. Tsumura, On multiple zeta values of level two, Tsukuba J. Math. **44** (2020), 213–234

[10] M. Kaneko and H. Tsumura, Multiple L-values of level four, poly-Euler numbers, and related zeta functions, Tohoku Math. J. **76** (2024), 361–389.

[11] M. Kaneko and H. Tsumura, Two formulas for certain double and multiple polylogarithms in two variables, Comment. Math. Univ. St. Pauli, to appear.

[12] M. Kaneko and H. Tsumura, Generalized multiple polylogarithms and related zeta values, in preparation.

[13] M. Pallewatta, On polycosecant numbers and level two generalization of Arakawa-Kaneko zeta functions, Doctoral thesis, Kyushu University, 2020.

[14] R. P. Stanley, A survey of alternating permutations, Combinatorics and graphs, 165–196, Contemp. Math., 531, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[15] M. Uchida, On multiple L-values of conductor 3, Master thesis, Tokyo Metropolitan University, 2025 (in Japanese).

[16] D. Zagier, The dilogarithm function, Frontiers in number theory, physics, and geometry. II, 3–65, Springer, Berlin, 2007.

[17] J. Zhao, Multiple Zeta Functions, Multiple Polylogarithms and Their Special Values, Ser. Number Theory and Its Appl. **12**, World Sci. Publ., 2016.

(M. Kaneko) Faculty of Mathematics, Kyushu University Motooka 744, Nishi-ku Fukuoka 819-0395 JAPAN
E-mail address: kaneko.masanobu.661@m.kyushu-u.ac.jp

(H. Tsumura) Department of Mathematical Sciences,Tokyo Metropolitan University, 1-1, Minami-Ohsawa, Hachioji, Tokyo 192-0397, JAPAN
E-mail address: tsumura@tmu.ac.jp