レベル N の多重 Eisenstein 級数と反復積分の Goncharov 余積

東北大学・理学研究科数学専攻　菅野　隼
Hayato Kanno
Mathematical Institute, Tohoku University

概 要

本稿は, 2024 年度 RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」における筆者の講演「Multiple Eisenstein series of level N and Goncharov's coproduct for the iterated integrals」に関する報告である. 本稿では, レベル N の多重 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開と反復積分の Goncharov 余積との間の関係を紹介し, シャッフル正規化多重 Eisenstein 級数の構成を紹介する. また, それらの満たす線形関係式についても述べる.

1　背景

多重 Eisenstein 級数は, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ およびその合同部分群に対するモジュラー形式である正則 Eisenstein 級数を多重化した, 複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の一変数正則関数である.

定義 1.1 (Gangl–Kaneko–Zagier [5] ($r = 2$)). 多重 Eisenstein 級数は 2 以上の自然数 $n_1, \dots, n_r \geq 2$ ($r \geq 1$) に対して, 次で定義される:

$$G_{n_1,\dots,n_r}(\tau) := \lim_{L\to\infty}\lim_{M\to\infty} \sum_{\substack{0 \prec l_1\tau+m_1 \prec \cdots \prec l_r\tau+m_r \\ l_i\in\mathbb{Z}_L, m_i\in\mathbb{Z}_M}} \frac{1}{(l_1\tau+m_1)^{n_1}\dots(l_r\tau+m_r)^{n_r}}.$$

ただし, $\tau \in \mathbb{H}$, $\mathbb{Z}_L = \{-L, -(L-1), \dots, L-1, L\}$ である. また, 格子点の順序は

$$l\tau + m \succ l'\tau + m' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{「} l = l' \text{ かつ } m > m' \text{」または「} l > l' \text{」}.$$

とする.

注意 1.2. $G_{n_1,\dots,n_r}(\tau)$ は, $n_r \geq 3$ のとき, $\mathbb{H}$ 上絶対広義一様収束する.

Gangl–Kaneko–Zagier [5] は, 適当な正規化の下で, 二重 Eisenstein 級数 $G_{n_1,n_2}(\tau)$ が, 一般複シャッフル関係式と呼ばれる $\mathbb{Q}$-線形関係式を満たすことを明らかにした.

その後, Bachmann–Tasaka [4] は多重 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開と, シャッフル代数に対して定まる Goncharov 余積との非自明な関係を発見した. さらに彼らはそれを用いて, 多重 Eisenstein 級数のシャッフル正規化を構成した.

一方, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群に対する Eisenstein 級数の一般化として, レベル付きの多重 Eisenstein 級数に関する研究がいくつかなされている. Kaneko–Tasaka [8] はレベル 2 の二重 Eisenstein 級数に対して, Gangl–Kaneko–Zagier [5], Kaneko [7] と類似の結果を得た. また, Kina [10] はレベル 4 の二重 Eisenstein 級数を考察し, Gangl–Kaneko–Zagier [5], Kaneko [7] と類似の結果を得た. さらに, Yuan–Zhao [12] はレベル N ($N \geq 1$) の二重 Eisenstein 級数を考察し, Gangl–Kaneko–Zagier [5] と類似の結果を得た. 筆者は [9] において, 一般のレベル, 一般の深さの多重 Eisenstein 級数を考察し, その Fourier 級数と Goncharov 余積との関係を示した. また, それを用いてシャッフル正規化多重 Eisenstein 級数を構成した.

2 レベル N の多重ゼータ値

Yuan–Zhao [13] はレベル N の多重ゼータ値を導入し, それらが調和積とシャッフル積と呼ばれる二つの積公式を満たすことを示した. さらに彼らは二つの積に関する正規化をそれぞれ構成し, それらが一般複シャッフル関係式をみたすことを明らかにした. 本節では, 彼らが示したレベル N の多重ゼータ値の二つの積公式を, 語の代数の言葉を用いて述べる.

定義 2.1 (Yuan–Zhao [13]). 正整数 $n_1, \dots, n_{r-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し, レベル N の多重ゼータ値は

$$\zeta\binom{n_1, \dots, n_r}{a_1, \dots, a_r} \coloneqq \sum_{\substack{0<k_1<\cdots<k_r \\ \forall i, k_i \equiv a_i \, (\mathrm{mod}\ N)}} \frac{1}{k_1^{n_1} \cdots k_r^{n_r}}$$

で定義される.

注意 2.2. レベル N の多重ゼータ値は次の反復積分表示を持つことが知られている:

$$\begin{aligned}\zeta\binom{n_1, \dots, n_r}{a_1, \dots, a_r} &= \int_0^1 \underbrace{\frac{t^{a_1-1}dt}{1-t^N}\left(\frac{dt}{t}\right)^{n_1-1}}_{n_1} \underbrace{\frac{t^{a_2-a_1-1}dt}{1-t^N}\left(\frac{dt}{t}\right)^{n_2-1}}_{n_2} \cdots \underbrace{\frac{t^{a_r-a_{r-1}-1}dt}{1-t^N}\left(\frac{dt}{t}\right)^{n_r-1}}_{n_r} \\ &= \int_{0<t_1<t_2<\cdots<t_n<1} \underbrace{\frac{t_1^{a_1-1}dt_1}{1-t_1^N}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{n_1}}{t_{n_1}}}_{n_1} \cdots \underbrace{\frac{t_{n-n_r+1}^{a_r-a_{r-1}-1}dt_{n-n_r+1}}{1-t_{n-n_r+1}^N}\frac{dt_{n-n_r+2}}{t_{n-n_r+2}}\cdots\frac{dt_n}{t_n}}_{n_r}.\end{aligned}$$

ただし, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ とする.

レベル N の多重ゼータ値は級数表示と積分表示からそれぞれ, 調和積とシャッフル積と呼ばれる二つの積公式を満たす. 例えば, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned}\zeta\binom{n_1}{a_1}\zeta\binom{n_2}{a_2} &\overset{\text{調和積}}{=} \zeta\binom{n_1, n_2}{a_1, a_2} + \zeta\binom{n_2, n_1}{a_2, a_1} + \delta_{a_1,a_2}\zeta\binom{n_1+n_2}{a_1} \\ &\overset{\text{シャッフル積}}{=} \sum_{\substack{i+j=n_1+n_2 \\ i,j\geq 1}} \left\{\binom{j-1}{n_2-1}\zeta\binom{i\ ,\quad j}{a_1\, , a_1+a_2} + \binom{j-1}{n_1-1}\zeta\binom{i\ ,\quad j}{a_2\, , a_1+a_2}\right\}\end{aligned}$$

が成り立つ.

調和積とシャッフル積を語の代数を用いて定式化する. $\mathbb{Q}$-代数 $\mathfrak{H}^1$ を文字 $z_{n,a}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) の生成する非可換自由代数として定める:

$$\mathfrak{H}^1 \coloneqq \mathbb{Q}\left\langle z_{n,a} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right\rangle.$$

調和積

$\mathbb{Q}$-双線形写像 $\widetilde{*} : \mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ を次を満たすように, 語の長さに関して帰納的に定める:

(T1) $w \widetilde{*} 1 = 1 \widetilde{*} w = w$,

(T2) $z_{n_1,a_1}w_1 \widetilde{*} z_{n_2,a_2}w_2 = z_{n_1,a_1}(w_1 \widetilde{*} z_{n_2,a_2}w_2) + z_{n_2,a_2}(z_{n_1,a_1}w_1 \widetilde{*} w_2) + \delta_{a_1,a_2} z_{n_1+n_2,a_1+a_2}(w_1 \widetilde{*} w_2)$.

ただし, $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ は語, $\delta_{a,a'}$ は Kronecker のデルタである. 調和積 $\widetilde{*}$ は, $\mathfrak{H}^1$, およびその部分空間 $\widetilde{\mathfrak{H}^0} \coloneqq \mathbb{Q} + \sum_{n\geq 2, a\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \mathfrak{H}^1 z_{n,a}$ に可換結合代数の構造を与える.

命題 2.3. レベル N の多重ゼータ値は調和積 $\widetilde{*}$ を満たす. すなわち, 任意の語 $w_1, w_2 \in \widetilde{\mathfrak{H}^0}$ に対して,

$$\zeta(w_1 \widetilde{*} w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2)$$

が成り立つ. ただし, $\zeta : \widetilde{\mathfrak{H}^0} \to \mathbb{R}$ は語 $z_{n_1,a_1} \cdots z_{n_r,a_r}$ を $\zeta\begin{pmatrix} n_1, \ldots, n_r \\ a_1, \ldots, a_r \end{pmatrix}$ へ送る $\mathbb{Q}$-線形写像.

<u>シャッフル積</u>

$\mathfrak{H}^1$ は文字 x, y_a $(a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の生成する非可換自由 $\mathbb{Q}$-代数の部分代数と同型である. すなわち,

$$\mathfrak{H}^1 \simeq \mathbb{Q} + \sum_{b\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} y_b \mathbb{Q}\langle x, y_a \mid a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\rangle,\ z_{n,a} \mapsto y_a x^{n-1}.$$

$z_{n,a}$ と $y_a x^{n-1}$ の同一視の下, シャッフル積 $\widetilde{⧢} : \mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ を

$$w_1 \,\widetilde{⧢}\, w_2 \coloneqq \rho^{-1}\left(\rho(w_1) ⧢ \rho(w_2)\right)$$

で定まる $\mathbb{Q}$-双線形写像とする. ただし, $\rho : \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ は

$$\rho(z_{n_1,a_1} \cdots z_{n_r,a_r}) = z_{n_1,a_1} z_{n_2,a_2-a_1} \cdots z_{n_r,a_r-a_{r-1}}$$

で定まる $\mathbb{Q}$-線形写像とし, $⧢ : \mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ は, 次を満たすように語の長さに関して帰納的に定まる $\mathbb{Q}$-双線形写像とする:

(S1) $w ⧢ 1 = 1 ⧢ w = w$,

(S2) $u_1 w_1 ⧢ u_2 w_2 = u_1(w_1 ⧢ u_2 w_2) + u_2(u_1 w_1 ⧢ w_2)$.

ただし, $u_1, u_2 \in \{x, y_a \mid a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$ であり, w, w_1, w_2 は x, y_a の生成する語.

命題 2.4. レベル N の多重ゼータ値はシャッフル積 $\widetilde{⧢}$ を満たす. すなわち, 任意の語 $w_1, w_2 \in \widetilde{\mathfrak{H}^0}$ に対して,

$$\zeta(w_1 \,\widetilde{⧢}\, w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2)$$

が成り立つ.

注意 2.5. 調和積とシャッフル積の記号 $\widetilde{*}$, $\widetilde{⧢}$ に関して, Arakawa–Kaneko [1] における多重 L-値の調和積 $*$, シャッフル積 $⧢$ と区別するため, それぞれにチルダをつけている.

3 レベル N の多重 Eisenstein 級数とその Fourier 級数展開

本節では, レベル N の多重 Eisenstein 級数を定義し, その Fourier 級数展開を与える. $\mathfrak{H}^1$ の部分空間 $\mathfrak{H}^2$ を

$$\mathfrak{H}^2 \coloneqq \mathbb{Q}\left\langle z_{n,a} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right\rangle$$

で定める.

定義 3.1. 2 以上の正整数 $n_1,\dots,n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と $a_1,\dots,a_r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ $(r \geq 0)$ に対して, レベル N の多重 Eisenstein 級数を

$$G\binom{n_1,\dots,n_r}{a_1,\dots,a_r};\tau) := \lim_{L\to\infty}\lim_{M\to\infty}\sum_{\substack{0\prec l_1N\tau+m_1\prec\cdots\prec l_rN\tau+m_r \\ l_i\in\mathbb{Z}_L, m_i\in\mathbb{Z}_M, m_i\equiv a_i \ (\mathrm{mod}\ N)}} \frac{1}{(l_1N\tau+m_1)^{n_1}\dots(l_rN\tau+m_r)^{n_r}}$$

で定める. ただし, $G(\varnothing;\tau)=1$ とする. また, $\mathbb{Q}$-線形写像 $G:\mathfrak{H}^2\to\mathcal{O}(\mathbb{H})$ を $G(z_{n_1,a_1}\cdots z_{n_r,a_r}) = G\left(\begin{matrix}n_1,\dots,n_r\\a_1,\dots,a_r\end{matrix};\tau\right)$ で定める.

注意 3.2. $n_r \geq 3$ のとき, $G\left(\begin{matrix}n_1,\dots,n_r\\a_1,\dots,a_r\end{matrix};\tau\right)$ は $\mathbb{H}$ 上絶対広義一様収束する.

古典的な Eisenstein 級数との関係として, 例えば, $k\geq 3$ のとき,

$$G\left(\begin{matrix}k\\a\end{matrix};\tau\right)+(-1)^kG\left(\begin{matrix}k\\-a\end{matrix};\tau\right) = \sum_{\substack{(l,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\} \\ l\equiv 0, m\equiv a \pmod N}} \frac{1}{l\tau+m}$$

は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_1(N)$ に関する, 重さ k のモジュラー形式である.

命題 3.3. レベル N の多重 Eisenstein 級数は調和積 $\widetilde{*}$ を満たす. すなわち, $G:(\mathfrak{H}^2,\widetilde{*})\to\mathcal{O}(\mathbb{H})$ は代数準同型.

多重 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開はレベル N の多重ゼータ値とレベル N の多重約数関数を用いて表される.
多重約数関数は Bachmann–Kühn [3] により導入された形式的冪級数である. 彼らは多重ゼータ値の q-類似として多重約数関数を考察した. その後, Yuan–Zhao [13] はレベル N の多重約数関数を導入し, Bachmann–Kühn [3] と類似の結果を得た.

定義 3.4 (Bachmann–Kühn [3] $(N=1)$, Yuan–Zhao [13] $(N\geq 1)$)**.** $\eta = e^{2\pi i/N}$ とする. 任意の $n_1,\dots,n_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して, レベル N の多重約数関数を

$$g\left(\begin{matrix}n_1,\dots,n_r\\a_1,\dots,a_r\end{matrix};q\right) := \left(\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{N}\right)^{n_1+\cdots+n_r}\sum_{\substack{0<d_1<\cdots<d_r\\c_1,\dots,c_r>0}}\prod_{i=1}^{r}\frac{\eta^{a_ic_i}c_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!}q^{c_id_i}\in\mathbb{C}[\![q]\!]$$

とする. また, $\mathbb{Q}$-線形写像 $g:\mathfrak{H}^1\to\mathbb{C}[\![q]\!]$ を $g(z_{n_1,a_1}\cdots z_{n_r,a_r}) = g\left(\begin{matrix}n_1,\dots,n_r\\a_1,\dots,a_r\end{matrix};q\right)$ で定める.

レベル N の多重 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開は多重ゼータ値と多重約数関数を用いて次のように明示的に与えられる.

命題 3.5 (Bachmann [2] $(N=1)$, K. [9] $(N\geq 1)$)**.** 任意の $n_1,\dots,n_r\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

に対して,

$$G\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r};\tau\Big) = \sum_{\substack{0\le h\le r\\0<t_1<\cdots<t_h<r+1}} \zeta\binom{n_1,\ldots,n_{t_1-1}}{a_1,\ldots,a_{t_1-1}} \sum_{\substack{t_1\le q_1\le t_2-1\\ \vdots \\ t_h\le q_h\le r}} \sum_{\substack{k_{t_j}+\cdots+k_{t_{j+1}-1}\\=n_{t_j}+\cdots+n_{t_{j+1}-1}\\(1\le j\le h),k_i\ge 1}}$$
$$\times\prod_{j=1}^{h}\left\{(-1)^{l_j}\left(\prod_{\substack{p=t_j\\p\neq q_j}}^{t_{j+1}-1}\binom{k_p-1}{n_p-1}\right)\zeta\binom{k_{q_j-1},\ldots,k_{t_j}}{a_{q_j}-a_{q_j-1},\ldots,a_{q_j}-a_{t_j}}\right.$$
$$\left.\times\zeta\binom{k_{q_j+1},\ldots,k_{t_{j+1}-1}}{a_{q_j+1}-a_{q_j},\ldots,a_{t_{j+1}-1}-a_{q_j}}\right\}g\left(\begin{matrix}k_{q_1},\ldots,k_{q_h}\\a_{q_1},\ldots,a_{q_h}\end{matrix};q\right)$$

が成り立つ. ただし, $l_j = n_{t_j}+\cdots+n_{t_{j+1}-1}+n_{q_j}+k_{q_j+1}+\cdots+k_{q_{j+1}-1}$.

4 形式的反復積分と Goncharov 余積

Goncharov [6] は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\setminus\{a_1,\ldots,a_m,\infty\}$ 上の反復積分

$$\int_{a_0}^{a_{m+1}}\frac{dt}{t-a_1}\cdots\frac{dt}{t-a_m}\quad(a_0,\ldots,a_{m+1}\in\mathbb{C}),$$

に対応する形式的反復積分のなす代数を導入し, それが Hopf 代数の構造を持つことを明らかにした. また, Goncharov はその余積の明示公式も与えた. 本節では, レベル N の多重ゼータ値の積分表示に対応する形式的反復積分を構成し, その余積公式を与える.

$S=\{\eta^0,\eta^1,\ldots,\eta^{N-1}\}\cup\{0\}$ とする.

定義 4.1. 次数付き可換 $\mathbb{Q}$-代数 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} \coloneqq \mathbb{Q}\left[\mathrm{I}(a_0;a_1,\ldots,a_m;a_{m+1}) \mid m\ge 0, a_i\in S\right]/_{\text{(i)}\sim\text{(iv)}}$$

で定め, $\mathcal{I}$ の元を形式的反復積分とよぶ. ここで, 次数は $\deg(\mathrm{I}(a_0;a_1,\ldots,a_m;a_{m+1}))=m$ とし, 関係式 (i) $\sim$ (iv) は次で定める：

(i) $\mathrm{I}(a;b)=1,\quad(a,b\in S)$

(ii) (シャッフル積公式) $a,b,a_1,\ldots,a_{n+m}\in S$ に対して,

$$\mathrm{I}(a;a_1,\ldots,a_n;b)\mathrm{I}(a;a_{n+1},\ldots,a_{n+m};b)=\sum_{\sigma\in Sh_n^{(n+m)}}\mathrm{I}(a;a_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,a_{\sigma^{-1}(n+m)};b),$$

ただし,

$$Sh_n^{(n+m)}\coloneqq\{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m}\mid\sigma(1)<\cdots<\sigma(n),\sigma(n+1)<\cdots<\sigma(n+m)\}.$$

(iii) (パスの連結公式) $x,a_0,\ldots,a_{m+1}\in S$ に対して,

$$\mathrm{I}(a_0;a_1,\ldots,a_m;a_{m+1})=\sum_{i=0}^{m}\mathrm{I}(a_0;a_1,\ldots,a_i;x)\mathrm{I}(x;a_{i+1},\ldots,a_m;a_{m+1}).$$

(iv) $\mathrm{I}(a;a_1,\ldots,a_m;a)=0, \quad (a,a_1,\ldots,a_m\in S, m\geq 1)$

定理 4.2 (Goncharov [6])**.** $\mathcal{I}$ は次数付き Hopf 代数の構造を持つ. また, その余積 $\Delta:\mathcal{I}\to\mathcal{I}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathcal{I}$ は

$$\begin{aligned}&\Delta(\mathrm{I}(a_0;a_1,\ldots,a_m;a_{m+1}))\\ &\coloneqq \sum_{0=i_0<i_1<\cdots<i_k<i_{k+1}=m+1}\prod_{p=0}^{k}\mathrm{I}(a_{i_p};a_{i_p+1},\ldots,a_{i_{p+1}-1};a_{i_{p+1}})\otimes\mathrm{I}(a_0;a_{i_1},\ldots,a_{i_k};a_{m+1}).\end{aligned}$$

で与えられる.

$\mathfrak{a}$ を $\{\mathrm{I}(0;0;a)\mid a\in S\setminus\{0\}\}$ の生成する $\mathcal{I}$ のイデアルとし, $\mathcal{I}^0=\mathcal{I}/\mathfrak{a}$ とする.

命題 4.3 (cf. Bachmann–Tasaka [4])**.** $(\mathcal{I}^0,\Delta)$ は Hopf 代数である.

関係式 (i) $\sim$ (iv) と $\mathcal{I}^0$ 上 $I(0;0;a)=1$ であることを用いて, $\mathcal{I}^0$ の線形基底をなす形式的反復積分が特定できる. それらを

$$\mathrm{I}_a\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}\coloneqq\mathrm{I}(0;\eta^{a_1},\{0\}^{n_1-1},\ldots,\eta^{a_r},\{0\}^{n_r-1};\eta^a),$$
$$\mathrm{I}\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}\coloneqq\mathrm{I}_0\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}$$

と置き, $\mathcal{I}^0$ の部分空間 $\mathcal{I}^1$ を

$$\mathcal{I}^1\coloneqq\left\langle \mathrm{I}\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}\in\mathcal{I}^0\;\middle|\; r\geq 0, n_i>0, a_i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

とする. また, $\mathbb{Q}$-線形写像 $\mu:\mathcal{I}^0\twoheadrightarrow\mathcal{I}^1$ を

$$\mu\left(\mathrm{I}_a\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}\right)=\mathrm{I}\binom{n_1\quad,\ldots,\quad n_r}{a_1-a,\ldots,a_r-a}.$$

で定める.

注意 4.4. 概形的に述べると, $\mathcal{I}^0$ は $\mathcal{I}$ に反復積分の正規化に対応する関係式を加えた空間であり, $\mathcal{I}^1$ はそれに加えて, 積分の変数変換に対応する関係式を加えたような空間である.

このとき, $\mathcal{I}^1$ もまた Hopf 代数の構造を持つことがわかる.

命題 4.5. $(\mathcal{I}^1,\Delta_\mu)$ は Hopf 代数である. ここで, 余積 $\Delta_\mu:\mathcal{I}^1\to\mathcal{I}^1\otimes\mathcal{I}^1$ は

$$\Delta_\mu\coloneqq(\mu\otimes\mu)\circ\Delta|_{\mathcal{I}^1}.$$

次に, 多重ゼータ値の積分表示に対応する形式的反復積分とそれらのなす空間を導入する. レベル N の多重ゼータ値は収束する範囲において, 次のような反復積分の線形和で表されることが知られている (cf. Yuan–Zhao [13]):

$$\zeta\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}=\frac{(-1)^r}{N^r}\sum_{b_1,\ldots,b_r\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\eta^{\rho(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}\int_0^1\frac{dt}{t-\eta_N^{b_1}}\left(\frac{dt}{t}\right)^{n_1-1}\cdots\frac{dt}{t-\eta_N^{b_r}}\left(\frac{dt}{t}\right)^{n_r-1}.$$

この表示に倣い, レベル N の多重ゼータ値に対応する形式的反復積分を

$$\widetilde{\mathrm{I}}\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r} := \frac{(-1)^r}{N^r}\sum_{b_1,\ldots,b_r\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \eta^{\rho(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}\mathrm{I}\binom{n_1,\ldots,n_r}{b_1,\ldots,b_r} \in \mathcal{I}^1\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\eta)$$

で定める. ただし, $n_1,\ldots,n_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. また, $\rho(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1+(a_2-a_1)b_2\cdots+(a_r-a_{r-1})b_r$.

$\widetilde{\mathcal{I}^1}$ を多重ゼータ値の積分表示に対応する形式的反復積分の生成する $\mathbb{Q}$-線形空間とする. すなわち,

$$\widetilde{\mathcal{I}^1} := \left\langle \widetilde{\mathrm{I}}\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r} \;\middle|\; r\geq 0, n_1,\ldots,n_r>0, a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

このとき, $\widetilde{\mathcal{I}^1}$ は余積 Δ_μ で Hopf 代数の構造を持つことがわかる. また, 余積は明示的に次で与えられる:

命題 4.6 (Bachmann–Tasaka [4] ($N=1$), K. [9] ($N\geq 1$))**.** 任意の $n_1,\ldots,n_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned}\Delta_\mu\left(\widetilde{\mathrm{I}}\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}\right) = &\sum_{\substack{0\leq h\leq r\\ 0<t_1<\cdots<t_h<r+1}}\left(\widetilde{\mathrm{I}}\binom{n_1,\ldots,n_{t_1-1}}{a_1,\ldots,a_{t_1-1}}\otimes 1\right)\sum_{\substack{t_1\leq q_1\leq t_2-1\\ \vdots\\ t_h\leq q_h\leq r}}\ \sum_{\substack{k_{t_j}+\cdots+k_{t_{j+1}-1}\\ =n_{t_j}+\cdots+n_{t_{j+1}-1}\\ (1\leq j\leq h), k_i\geq 1}}\\ &\times\prod_{j=1}^h\left\{(-1)^{l_j}\left(\prod_{\substack{p=t_j\\ p\neq q_j}}^{t_{j+1}-1}\binom{k_p-1}{n_p-1}\right)\widetilde{\mathrm{I}}\binom{k_{q_j-1},\ldots,k_{t_j}}{a_{q_j}-a_{q_j-1},\ldots,a_{q_j}-a_{t_j}}\right.\\ &\left.\times\widetilde{\mathrm{I}}\binom{k_{q_j+1},\ldots,k_{t_{j+1}-1}}{a_{q_j+1}-a_{q_j},\ldots,a_{t_{j+1}-1}-a_{q_j}}\right\}\otimes\widetilde{\mathrm{I}}\binom{k_{q_1},\ldots,k_{q_h}}{a_{q_1},\ldots,a_{q_h}}\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $l_j = n_{t_j}+\cdots+n_{t_{j+1}-1}+n_{q_j}+k_{q_j+1}+\cdots+k_{q_{j+1}-1}$.

5 レベル N の多重 Eisenstein 級数のシャッフル正規化

Bachmann–Tasaka [4] は Fourier 級数と Goncharov 余積の関係から, レベル 1 のシャッフル正規化多重 Eisenstein 級数を構成した. 本節では, 一般のレベルにおける Fourier 級数と Goncharov 余積との関係を述べ, Bachmann–Tasaka [4] と同様にして, 多重 Eisenstein 級数のシャッフル正規化を構成する.

$\widetilde{\mathcal{I}^1}$ は $\widetilde{\mathrm{I}}\binom{n_1,\ldots,n_r}{a_1,\ldots,a_r}\mapsto z_{n_1,a_1}\cdots z_{n_r,a_r}$ によって, 語の代数 $(\mathfrak{H}^1,\widetilde{ш})$ と代数同型であることがわかる. したがって, $(\mathfrak{H}^1,\widetilde{ш})$ に Hopf 代数の構造が誘導される.

定理 5.1 (Bachmann–Tasaka [4] ($N=1$), K. [9] ($N\geq 1$))**.** 任意の $w\in\mathfrak{H}^2$ に対して,

$$G(w;\tau) = (\zeta^{\widetilde{ш}}\star g)(w;q)$$

が成り立つ. ただし, $q=e^{2\pi i\tau}$ とし, $\star$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}((\mathfrak{H}^1,\widetilde{ш},\Delta_\mu),\mathbb{C}[\![q]\!])$ における畳み込み積とする. また, $\zeta^{\widetilde{ш}}:\mathfrak{H}^1\to\mathbb{C}$ は Yuan–Zhao [13] によって構成されたレベル N のシャッフル正規化多重ゼータ値である.

証明は, 多重 Eisenstein 級数の Fourier 級数展開（命題 3.5）と, Goncharov 余積の明示式（命題 4.6）を比べることにより従う. Goncahrov 余積は反復積分という幾何学的対象に由来する. そこで, 定理 5.1 の幾何学的解釈は存在するのか, という疑問が生じるが, これは残された課題である.

注意 5.2. 定理 5.1 の右辺は $w \in \mathfrak{H}^1$ に対しても意味を持つ. したがって, 多重 Eisenstein 級数 $G : \mathfrak{H}^2 \to \mathcal{O}(\mathbb{H})$ は, 右辺から定まる Fourier 級数で定義域を $\mathfrak{H}^1$ まで自然に拡張できる. しかし, こうして定義した $G : \mathfrak{H}^1 \to \mathcal{O}(\mathbb{H})$ はシャッフル積 $\widetilde{ш}$ を満たさない. ($\because g : (\mathfrak{H}^1, \widetilde{ш}) \to \mathbb{C}[\![q]\!]$ が代数準同型でないから.)

したがって, 多重約数関数のシャッフル正規化を構成すれば, 多重 Eisenstein 級数のシャッフル正規化も構成できることがわかる. これはレベル 1 の場合には Bachmann–Tasaka [4] が, 一般のレベルにおいては Kitada [11] が, どちらも母関数を用いて構成している. そのシャッフル正規化多重約数関数を $g^{\widetilde{ш}} : \mathfrak{H}^1 \to \mathbb{C}[\![q]\!]$ とする.

定義 5.3. シャッフル正規化多重 Eisenstein 級数 $G^{\widetilde{ш}} : \mathfrak{H}^1 \to \mathcal{O}(\mathbb{H})$ を

$$G^{\widetilde{ш}}(w;\tau) \coloneqq (\zeta^{\widetilde{ш}} \star g^{\widetilde{ш}})(w;q)$$

で定める.

こうして Fourier 級数によって定めたシャッフル正規化多重 Eisenstein 級数は, 収束する範囲において, 元々の格子を走る多重級数により定義されるものと一致することがわかる.

命題 5.4 (Bachmann–Tasaka [4] ($N = 1$), K. [9] ($N \geq 1$))**.** 任意の $w \in \mathfrak{H}^2$ に対して, $G^{\widetilde{ш}}(w;\tau) = G(w;\tau)$ が成り立つ.

最後に, シャッフル正規化多重 Eisenstein 級数の満たす線形関係式として, 制限複シャッフル関係式, Distribution 関係式, 二重の場合の和公式および重み付き和公式を紹介する.

定理 5.5 (制限複シャッフル関係式, Bachmann–Tasaka [4] ($N = 1$), K. [9] ($N \geq 1$))**.** 任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^2$ に対して,

$$G(w_1 \widetilde{*} w_2;\tau) = G^{\widetilde{ш}}(w_1 \,\widetilde{ш}\, w_2;\tau)$$

が成り立つ.

定理 5.6 (Distribution 関係式, K. [9])**.** 任意の $n_1 \ldots, n_r \geq 1$ に対して,

$$\sum_{a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} G^{\widetilde{ш}}\begin{pmatrix} n_1,\ldots,n_r \\ a_1,\ldots,a_r \end{pmatrix};\tau\Big) = G^{ш}_{n_1,\ldots,n_r}(N\tau)$$

が成り立つ. ただし, $G^{ш}_{n_1,\ldots,n_r}(\tau)$ はレベル 1 のシャッフル正規化多重 Eisenstein 級数.

定理 5.7 (和公式 ($r = 2$), Kitada [11])**.** 任意の偶数 $k \geq 4$, $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して,

$$2\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>1}} \left((-1)^{i-1} G\begin{pmatrix} i,j \\ a,a \end{pmatrix};\tau\Big) + G\begin{pmatrix} i,j \\ a,2a \end{pmatrix};\tau\Big) \right) + 4G^{\widetilde{ш}}\begin{pmatrix} 1,k-1 \\ a,2a \end{pmatrix};\tau\Big) = G\begin{pmatrix} k \\ a \end{pmatrix};\tau\Big)$$

が成り立つ.

定理 5.8 (重み付き和公式 ($r = 2$), K. [9])**.** 任意の $k \geq 4$, $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して,

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} \left\{ (2^{j-1}-1) G^{\widetilde{ш}}\begin{pmatrix} i,j \\ a,2a \end{pmatrix};\tau\Big) + (1-\delta_{j,1}) G^{\widetilde{ш}}\begin{pmatrix} i,j \\ a,a \end{pmatrix};\tau\Big) \right\} = \frac{k-3}{2} G^{\widetilde{ш}}\begin{pmatrix} k \\ a \end{pmatrix};\tau\Big)$$

が成り立つ.

謝辞

2024 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」における講演の機会を与えてくださいました世話人の中筋麻貴先生（上智大学/東北大学），谷口隆先生（神戸大学）に感謝申し上げます.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *On multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), no. 4, 967–991. MR2091412

[2] H. Bachmann, *Multiple zeta–werte und die verbindung zu modulformen durch multiple eisensteinreihen*, Master's thesis, Universität Hamburg, 2012.

[3] H. Bachmann and U. Kühn, *The algebra of generating functions for multiple divisor sums and applications to multiple zeta values*, Ramanujan J. **40** (2016), no. 3, 605–648. MR3522085

[4] H. Bachmann and K. Tasaka, *The double shuffle relations for multiple Eisenstein series*, Nagoya Math. J. **230** (2018), 180–212. MR3798624

[5] H. Gangl, M. Kaneko, and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and zeta functions, 2006, pp. 71–106. MR2208210

[6] A. B. Goncharov, *Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry*, Duke Math. J. **128** (2005), no. 2, 209–284. MR2140264

[7] M. Kaneko, *Double zeta values and modular forms*, Proceedings of the japan-korea joint seminar on number theory, october 9–12, 2004, kuju, japan, 2004, pp. 79–85 (English).

[8] M. Kaneko and K. Tasaka, *Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2*, Math. Ann. **357** (2013), no. 3, 1091–1118. MR3118626

[9] H. Kanno, *Shuffle regularization for multiple eisenstein series of level N*, 2024. Preprint at `https://arxiv.org/abs/2405.04770`.

[10] K. Kina, *Double Eisenstein series and modular forms of level* 4, 2024. Preprint at `https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.06917`.

[11] T. Kitada, *Double Eisenstein series with level and their relations*, Master's thesis, Aichi Pref. Univ., 2023.

[12] H. Yuan and J. Zhao, *Double shuffle relations of double zeta values and the double Eisenstein series at level N*, J. Lond. Math. Soc. (2) **92** (2015), no. 3, 520–546. MR3431648

[13] ______, *Bachmann-Kühn's brackets and multiple zeta values at level N*, Manuscripta Math. **150** (2016), no. 1-2, 177–210. MR3483176