Joint universality for the Riemann zeta-function with general shifts

中井 啓太（Keita Nakai）*

名古屋大学多元数理科学研究科

1　導入

複素数を s として, 実部を σ, 虚部を t とする. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は, $\sigma > 1$ なる複素数に対し, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ により定義される関数である. この関数は $\sigma > 1$ において絶対収束し, さらに全平面の有理型関数に解析接続できることが知られている. さらに, Riemann ゼータ関数は素数と密接な関係があることが知られており, この関数の値の分布を調べることは素数の観点からも重要となる. Riemann ゼータ関数の値の分布を調べる研究の 1 つの結果として, 普遍性定理という Riemann ゼータ関数によるある種の近似定理が存在する. この定理は, 1975 年に Voronin により初めて証明され, 現在では以下のような主張で知られている. ここで簡単のため, $D(a,b) = \{s : a < \sigma < b\}$ とし, $\mathbb{C}$ の部分集合 K に対し, K 上で零点を持たない連続かつ, K の内部で正則な関数からなる集合を $H_0^c(K)$ とする.

Theorem 1.1 (Voronin [8], 1975)**.** K を $\mathbb{C}$ でコンパクトかつ補集合が連結な $D(1/2,1)$ 内の集合とし, $f \in H_0^c(K)$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

ただし, meas を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする.

大雑把な書き方をしてしまえば, 零点を持たない正則関数は Riemann ゼータ関数の虚軸方向の平行移動 $+i\tau$ で一様に近似でき, さらに近似できる τ の集合は正の下極限密度を持つ. 即ち, 普遍性定理はある種の Riemann ゼータ関数の値の挙動の複雑さの定式化であるといえる.

実は, 次の定理にように Riemann 予想と普遍性定理が関係があることが知られている.

Theorem 1.2 (Bagchi [2], 1981)**.** Riemann 予想が真であることと

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta(s)| < \varepsilon\right\} > 0 \tag{1}$$

が $D(1/2,1)$ で成り立つことは同値である.

* m21029d@math.nagoya-u.ac.jp

ここで, 不等式 (1) が $D(1/2,1)$ で成り立つとは, K が $D(1/2,1)$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合として任意に取れることを意味する．Riemann 予想が成り立つならば, (1) が成り立つことは明らかである．実際, Riemann 予想が成り立つならば, $\zeta(s) \in H_0^c(K)$ であるため, Theorem 1.1 から (1) が成り立つことがわかる．この逆, 即ち, (1) の成立から Riemann 予想を導くのは, 零点密度評価を用いる．この定理から, Riemann 予想へのアプローチとして不等式 (1) を調べることは自然な流れであるが, Riemann 予想と関係しているため, 不等式 (1) を直接調べるのは非常に困難である．そのため, (1) の類似を考えるのも自然な流れである．この類似として, 中村による結果が知られている．

Theorem 1.3 (Nakamura [6], 2009)**.** $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_r$ を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的実数とする．このとき, $D(1/2,1)$ において,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+id_j\tau) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が成り立つ．

この結果では, meas の中で r 個の近似を同時に考えている．このように r 個の近似を同時に考える普遍性定理を同時普遍性定理という．この結果で $r=2$ とすると, 以下のような (1) の類似を得ることができる．

Corollary 1.4 (Nakamura [6], 2009)**.** d を代数的無理数とする．このとき, $D(1/2,1)$ において,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta(s+id\tau)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が成り立つ．

さらにこの結果は, Pańkowski により次の結果まで拡張されている．

Theorem 1.5 (Pańkowski [7], 2016)**.** d を 0 でない実数とする．このとき, $D(1/2,1)$ において,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta(s+id\tau)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が成り立つ．

$d=0$ であれば, この定理は Riemann 予想となるが, この定理からでは $d=0$ として取れない．しかしながら, $d \neq 0$ である実数に対しては (1) の類似の不等式が成り立つことがこの定理から言えるので, 残る問題は $d=0$, 即ち Riemann 予想のみとなる．Pańkowski の手法は, $\zeta(s+i\tau)$ と $\zeta(s+id\tau)$ の同時普遍性定理を示すというものであるため, この手法では, $d=0$ を証明するのは不可能である．

中村や Pańkowski の仕事のモチベーションは勿論 Riemann 予想である．一方で, 彼らの結果は, 平行移動の取り方を変えた普遍性定理であるため, 普遍性定理の観点から次の問題を考えるのも自然な流れである．

Problem 1.6. $D(1/2,1)$ において,（同時）普遍性定理

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\gamma_j(\tau)) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が成り立つような実数値関数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ を見つけよ．

この問題には様々な解が存在し, さらに公理的に $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ を定めている論文も多いため, 全てを列挙するのは困難である. そのため, 2022 年の Laurinčikas による結果を例として紹介する.

Theorem 1.7 (Laurinčikas [4], 2022)**.** $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ は次の仮定を満たすとする:

1° $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ は $+\infty$ に発散する $[T_0, \infty)$ で定義された関数である. ただし, $T_0 > 0$ とする.
2° $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ は連続的微分可能であり, $\gamma_1', \ldots, \gamma_r'$ は単調増加かつ

$$\lim_{\tau\to\infty} \gamma_j'(\tau)/\gamma_{j+1}'(\tau) = 0, \ j = 1, \cdots, r-1.$$

を満たす.
3° $j = 1, \ldots, r$ に対し, $\gamma_j'(2\tau)/\gamma_j'(\tau) \ll 1$ が成り立つ.

このとき, $D(1/2, 1)$ において, 同時普遍性定理

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \max_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\gamma_j(\tau)) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が成り立つ.

1 つ目と 2 つ目は自然な仮定なので, 3 番目の仮定がこの結果を特徴づけている. 3° を大雑把に言い換えると, γ の微分がそこまで速く発散しないことを意味している. 例えば, $(\tau \log\tau, \ldots, \tau^r \log\tau)$, $(\tau + 1, \tau^2 + \tau + 1, \ldots, \tau^r + \tau^{r-1} + \cdots + 1)$ は Theorem 1.7 の仮定をすべて満たすため, これらの平行移動に対して Riemann ゼータ関数の同時普遍性定理が成り立つことが分かる. ここで, この具体例は多項式程度の発散速度しか持たないため, 任意の多項式より発散速度が速い関数はどうなのかという疑問が生じる. 任意の多項式より発散速度が速い関数の典型例は e^τ であるが, e^τ が 3° を満たさないことが直ちに確認することが可能である. したがって, 平行移動を指数関数にしたときに普遍性定理が成り立つか否かが, この Laurinčikas の結果からでは不明である. このような背景から, Laurinčikas は 2023 年に開催されたとある研究集会で次の問題を提唱した.

Problem 1.8. Riemann ゼータ関数の普遍性定理は, 平行移動を $\gamma(\tau) = e^\tau$ としても成り立つのか? 即ち, $D(1/2, 1)$ において,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ie^\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

は成り立つのか?

本稿の主結果では, この Laurinčikas の問題を肯定的に解決でき, さらに同時普遍性定理まで拡張する. しかしながら, 筆者が初めて Laurinčikas の問題を肯定的に解決したのでは無く, Andersson らによる 2024 年の結果が初めて肯定的な解であることに注意する.

Theorem 1.9 (Andersson et. al. [1], 2024)**.** 連続的微分可能な関数 γ が次の仮定を満たすとする:

(i) γ' は, $\gamma'(\tau + \gamma(\tau)/\gamma'(\tau)) \ll \gamma'(\tau)$ を満たす単調増加関数.
(ii) $\gamma'(\tau)/\gamma(\tau)$ は, ある $A > 0$ に対し,

$$A^{-1} \le \frac{\gamma'}{\gamma}(\tau) \le \frac{\gamma'}{\gamma}\left(\tau + \frac{\gamma}{\gamma'}(\tau)\right) \le A + \frac{\gamma'}{\gamma}(\tau)$$

を満たす単調増加関数, または, ある $B > 0$ に対し,

$$\frac{\gamma'}{\gamma}(\tau) \geq \frac{B}{\tau}$$

を満たす単調減少関数.

このとき, $D(1/2,1)$ において,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\gamma(\tau)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

が成り立つ.

例えば, 次数が 1 以上の多項式や, $\alpha^{p(\tau)}$, $\alpha^{\beta^{p(\tau)}}$ は, Theorem 1.9 の仮定を満たす関数であることが分かるので, これらのシフトに対して普遍性定理が成り立つことが確認できる. ただし, $\alpha, \beta > 1$, $p(\tau)$ を多項式とする. したがって, この Andersson 達の結果は Laurinčikas の問題に肯定的な解答を与えている. しかしながら, この結果を Theorem 1.7 のような同時普遍性定理に拡張するのは一般には困難である. 彼らの手法は, Lebesgue 積分の変数変換をし既存の普遍性定理に帰着させるという手法である. 例えばシフト $(\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau)) = (e^\tau, e^{e^\tau})$ に対し, この手法を適用しようとすると, (τ, e^τ) に対する同時普遍性定理が必要となるが, これは Laurinčikas の問題を同時普遍性定理に拡張した結果が必要であるということである.

2　主結果

主結果の導入の前に幾つかの準備をする.

Definition 2.1. $\mathcal{F}$ を次の仮定を満たす関数 γ から成る集合とする.

(F1) ある $T_0 > 0$, $T_1 > 2$ が存在し, $\gamma : [T_0, \infty) \to [T_1, \infty)$ は狭義単調増加である. さらに, $\gamma(T) \to \infty$, $T \to \infty$ である.

(F2) γ は連続的微分可能であり, γ' は $[T_0, \infty)$ で単調増加である.

(F3) ある正の数 α が存在し, $\tau \geq T_0$ において, $\alpha\gamma(\tau) \leq \tau\gamma'(\tau)$ が成り立つ.

Definition 2.2. $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathcal{F}$ に対し, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ が admissible であるとは, $(c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{R}^r \setminus \{\bar{0}\}$ に対し, ある $m = m(c_1, \ldots, c_r) > 0$ と $T = T(c_1, \ldots, c_r) > 0$ が存在し, 全ての $\tau > T$ に対し, $c_1\gamma_1'(\tau) + \cdots + c_r\gamma_r'(\tau)$ は単調かつ $|c_1\gamma_1'(\tau) + \cdots + c_r\gamma_r'(\tau)| > m$ が成り立つ.

大雑把な書き方をすると, $\gamma_1', \ldots, \gamma_r'$ が決して 0 に近づかず, 発散速度が大体異なるとき, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathcal{F}$ は admissible である. 例えば, (τ^r, e^τ) $(r \geq 1)$, $(e^\tau, e^{2\tau}, \cdots, e^{r\tau})$, $(e^\tau, e^{\tau^2}, \cdots, e^{\tau^r})$, (e^τ, e^{τ^τ}), $(e^{2\tau}, e^{2\tau} + e^\tau)$, $(e^{2\tau}, e^{2\tau} + e^\tau, \Gamma(\tau))$ は全て admissible である. ここで, admissible の定義から, これらは全て $\mathcal{F}$ に属する. 一方, $(e^\tau, 2e^\tau)$ は定義から admissible でないことに注意する.

このような仮定の下, 主結果は以下である.

Theorem 2.3 (Nakai, 2023+, [5])**.** $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ を admissible とする. さらに, K を $D(1/2,1)$ 内のコンパクトかつ補集合が連結な集合であり, $f_j \in H_0^c(K)$, $j = 1, \ldots, r$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [T, 2T] : \max_{1\leq j\leq r} \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\gamma_j(\tau)) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

が成り立つ.

$r=1$ として, $\gamma_1(\tau)=e^\tau$ と取ることは可能であるので, この結果は Laurinčikas の問題に肯定的な解答を与え, さらに Laurinčikas の問題を同時普遍性定理に拡張した結果であることが分かる.

3 Main idea

ゼータ関数の普遍性定理の証明は, 現在では Bagchi [2] による確率論的手法が主流である. 大雑把な書き方をすると, Bagchi の手法においては, 任意のコンパクト集合 $C\subset D(1/2,1)$ に対し,

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\sup_{s\in C}|\zeta(s+i\gamma(\tau))-\zeta_m(s+i\gamma(\tau))|\,d\tau=0 \tag{2}$$

等を満たす $\sigma>1/2$ で収束する Dirichlet 級数

$$\zeta_m(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m(n)}{n^s}$$

を見つける必要がある.

元々の Bagchi の手法や Theorem 1.7 においては, この Dirichlet 級数を

$$\zeta_m(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\exp\left(-\left(\frac{n}{m}\right)^{\theta}\right) \tag{3}$$

として取っている. ただし, $\theta\in(1/2,1)$ とする. Theorem 1.7 の 3 番目の仮定はこの取り方に由来する. 即ち, この取り方をしている以上は, Laurinčikas の問題を考えるのは困難である.

ここで, 次を満たす $(0,\infty)$ で定義された滑らかな実数値関数 $\varphi(x)$ を 1 つ固定する:

1. $x\in(0,\infty)$ で, $0\le\varphi(x)\le1$ であり, $x\in(0,1]$ で, $\varphi(x)=1$.
2. φ の台 $\overline{\{x\in[0,\infty):\varphi(x)\neq0\}}$ はコンパクト.

このとき, Kowalski のテキストブック [3] では, $X>2$ に対し,

$$\zeta_X(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n/X)}{n^s}$$

とおき, Riemann ゼータ関数の普遍性定理を証明している. なお, $\varphi(x)$ の台はコンパクトなので, $\zeta_X(s)$ は有限和である. 主結果である Theorem 2.3 の証明では, (3) では無く, この $\zeta_X(s)$ を用いる. この $\zeta_X(s)$ を用いて (2) を示すのだが, まず次のある種の Dirichlet 多項式の 2 乗平均値が成り立つことを述べる.

Lemma 3.1 (Nakai, [5]). $\gamma\in\mathcal{F}$ とする. $\{a_n\}_{n\ge1}$ を任意の $\varepsilon>0$ に対し, $a_n\ll_\varepsilon n^\varepsilon$ を満たす複素数列とする. このとき,

$$\int_T^{cT}\left|\sum_{n\le\gamma(t)}\frac{a_n}{n^{\sigma+i\gamma(t)}}\right|^2dt\ll_{c,\sigma,\varepsilon}T\left(\sum_{n\le\gamma(cT)}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}+\gamma(T)^{1-2\sigma+2\varepsilon}\log\gamma(T)\right)$$

が十分大きい $T>0$ と, $c>1$, $1/2<\sigma<1$, $0<\varepsilon<\sigma-1/2$ に対し成り立つ.

この補題を用いることにより, 次の補題を証明することが出来る.

Lemma 3.2 (Nakai, [5])**.** $\gamma \in \mathcal{F}$ とコンパクト集合 $C \subset D(1/2, 1)$ に対し,

$$\lim_{X\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \sup_{s\in C} |\zeta(s + i\gamma(\tau)) - \zeta_X(s + i\gamma(\tau))| \, d\tau = 0$$

が成り立つ.

したがって, この補題は Laurinčikas の問題で困難になっていた箇所を克服した近似の補題であるといえる. なお, 実際には [5] では, 多次元の正則関数空間でこの近似の補題を考えているのだが, 本質的には Lemma 3.2 である. この証明においては, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ が admissible であることは必要ではない.

ここで, $\mathcal{P}_0$ を素数からなる有限集合, $(\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) = ((n_{1p})_{p\in\mathcal{P}_0}, \ldots (n_{rp})_{p\in\mathcal{P}_0}) \in (\mathbb{Z}^{\#\mathcal{P}_0})^r$ とする. 次の極限を計算するのに $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ が admissible であることを用いる:

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) \coloneqq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \prod_{j=1}^{r} \prod_{p\in\mathcal{P}_0} p^{-in_{jp}\gamma_j(\tau)} \, d\tau = \begin{cases} 1 & \text{if } (\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}), \\ 0 & \text{if } (\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) \neq (\bar{0}, \ldots, \bar{0}). \end{cases}$$

$(\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) = (\bar{0}, \ldots, \bar{0})$ であれば, $g_T(\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) = 1$ は明らかである. $(\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) \neq (\bar{0}, \ldots, \bar{0})$ とすると, ある $j = 1, \ldots, r$ が存在し, $\sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{jp} \log p \neq 0$ である. ここで, 一階微分判定法を用いる.

Theorem 3.3 (一階微分判定法)**.** $F(x)$ を区間 (a, b) において, 微分可能な実関数で, $F'(x)$ は単調かつ $|F'(x)| \geq m$ とする. このとき,

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)} \, dx \right| \leq \frac{4}{m}.$$

いま,

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} \prod_{j=1}^{r} \prod_{p\in\mathcal{P}_0} p^{-in_{jp}\gamma_j(\tau)} \, d\tau = \frac{1}{T} \int_T^{2T} \exp\left(-i \sum_{j=1}^{r} \gamma_j(\tau) \sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{jp} \log p \right) d\tau$$

であり, $(\sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{1p} \log p, \ldots, \sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{rp} \log p) \neq \bar{0}$ である. したがって, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ が admissible であることから, ある $T' > 0$ と $m > 0$ が存在し, $\tau > T'$ において, $(\sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{1p} \log p)\gamma_1'(\tau) + \cdots + (\sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{rp} \log p)\gamma_r'(\tau)$ は単調かつ $|(\sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{1p} \log p)\gamma_1'(\tau) + \cdots + (\sum_{p\in\mathcal{P}_0} n_{rp} \log p)\gamma_r'(\tau)| > m$ である. ゆえに一階微分判定法から, $T > T'$ であれば,

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} \prod_{j=1}^{r} \prod_{p\in\mathcal{P}_0} p^{-in_{jp}\gamma_j(\tau)} \, d\tau \ll_{\mathcal{P}_0, n_{jp}, \gamma_j} \frac{1}{T}$$

が成り立つ. すなわち, $(\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) \neq (\bar{0}, \ldots, \bar{0})$ に対し,

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{\mathbf{n}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{n}}_r) = 0$$

が成り立つ. これにて示したかった極限を得ることが出来る. ここまで書くと気付いている方もいるかもしれないが, admissible とは一階微分判定法を用いるための仮定なのである. したがって, admissible をもう少し一般化する余地はあるのかもしれない. しかしながら, 元々の $\mathcal{F}$ をもう少し一般化するのは, 現状では出来ていない. $\mathcal{F}$ に属していない関数を具体的に取り, それらに対し (同時) 普遍性定理を示すことは勿論可能であるが, 一般的な枠組みでの証明にはまだ至っていない.

謝辞

本稿は, 2024 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での講演を基に作成したものです. 講演の機会をくださりました世話人の中筋麻貴先生, 谷口隆先生に感謝申し上げます. 本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2125 の財政支援を受けたものです.

参考文献

[1] J. Andersson, R. Garunkštis, R. Kačinskaitė, K. Nakai, Ł. Pańkowski, A. Sourmelidis, R & J. Steuding and S. Wananiyakul, Notes on universality in short intervals and exponential shifts, Lith. Math. J. 1-13, 2024.

[2] B. Bagchi, Statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Thesis, Calcutta, Indian Statistical Institute, 1981.

[3] E. Kowalski, *An Introduction to Probabilistic Number Therory*, Cambridge University Press, 2021.

[4] A. Laurinčikas, Joint Universality in Short Intervals with Generalized Shifts for the Riemann Zeta-Function, Mathematics, 2022, **10**(10), 1652.

[5] K. Nakai, Joint Universality for the Riemann zeta-function with general shifts. arXiv preprint arXiv:2312.04269 (2023).

[6] T. Nakamura, The joint universality and the generalized strong recurrence for Dirichlet L-functions. Acta Arith. **138**, 357–362 (2009).

[7] Ł. Pańkowski, Joint universality and generalized strong recurrence with rational parameter, J. Number Theory **163** (2016) 61–74.

[8] S. M. Voronin, Theorem on the universality of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975) 475 – 486 (in Russian); Math. USSR Izv. **9** (1975), 443 – 453.