p 進 Hurwitz ゼータ値の非零性の判定法について

明治学院大学　川島 誠

Makoto Kawashima

Faculty of Mathematical informatics, Meijigakuin University

概 要

本小論では A. Poëls 氏 (Lyon 1) との共同研究 [19] の概説を行う．特に, p 進 Hurwitz ゼータ関数 $\zeta_p(s,x)$ の正整数 s と異なるシフト x における値の族の線形独立性に関する結果を紹介する．この結果は, P. Bel [3] による以前の結果を改良・拡張するとともに, F. Beukers [5] によって得られた p 進 Hurwitz ゼータ関数の値の無理性に関する結果を一般化するものである．証明は, J. Diamond の p 進ポリガンマ関数に対する第 2 種 Padé 型近似の新規かつ明示的な構成に基づいている．

1　導入

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の正の整数点 $s=k$ における値は, k が偶数のとき零でない有理数と円周率の冪の積で表されるため超越数であるが, k が奇数の場合, R. Ap'ery[1] による $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$ という結果を除き, $\zeta(k)$ $(k\geq 5)$ の無理数性や超越性について確定的な結果は知られていない．一方で, これらの値の中に無理数がどれだけ含まれるかについては, S. Fischler-J. Sprang-W. Zudilin [17] や P. Yu-L. Lai [20] による下限の評価がある。また, これらの値によって生成されるベクトル空間の次元の下限については, K. Ball-T. Rivoal [2]（*confer* Rivoal [24]）や Fischler [16] による改良がなされている．本研究では, これらの結果の p 進類似として、p 進 Riemann ゼータ値あるいは Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数の正整数点における値に関する新たな無理数性や, これらの値によって生成される線形空間の次元の下限を得ることを目的とする．特に, Kubota-Leopoldt の p 進 L 値は p 進 Hurwitz ゼータ値の線形和で表されるため, 本研究では p 進 Hurwitz ゼータ値の線形独立性を解析し, そこから得られた新たな結果を紹介する．

記号． p で素数を表し, $\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の p 進完備化とする．$\mathbb{Q}_p$ 上の加法付値を v_p とかく．$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進完備化を $\mathbb{C}_p$ とかく．$\mathbb{C}_p$ 上の p 進絶対値 $|\cdot|_p:\mathbb{C}_p\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$ を $|p|_p=p^{-1}$ を満たすものとする．素数 p による整数 q_p を, $q_2=4, q_p=p$ $(p\geq 3)$ と定める．Teichmüller 指標 $\omega:\mathbb{Q}_p^{\times}\to\mathbb{Q}_p^{\times}$ を以下で定める．$x\in\mathbb{Z}_p^{\times}=\{x\in\mathbb{Q}_p\,;\,|x|_p=1\}$ に対して, $\omega(x)$ は 1 の $\varphi(q_p)$ 冪根で $\langle x\rangle:=\frac{x}{\omega(x)}\in 1+q_p\mathbb{Z}_p$ を満たすものとする．ここで φ は Euler のトーシェント関数である．また一般の $y\in\mathbb{Q}_p^{\times}$ に対しては,

$$\omega(y)=p^{v_p(y)}\omega\Big(p^{-v_p(y)}y\Big)\ \text{かつ}\ \langle y\rangle=\frac{y}{\omega(y)}=\langle p^{-v_p(y)}y\rangle\in 1+q_p\mathbb{Z}_p$$

と定める．

1.1 p 進 Riemann ゼータ値, p 進 Hurwitz ゼータ関数と p 進ポリガンマ関数

この小節では筆者らの研究対象である, p 進 Riemann ゼータ値, p 進 Hurwitz ゼータ関数と Diamond の p 進ポリガンマ関数を紹介する.

定義 1.1. k を 2 以上の整数とする. $\zeta_p(k) := L_p(k, \omega^{1-k})$ を p **進 Riemann ゼータ値**と呼ぶ. ここで, $L_p(s, \omega^{1-k})$ は指標 ω^{1-k} に付随する Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数 (*see* [30, Capter5]) である.

k が偶数のとき, $\zeta_p(k) = 0$ であることに注意する. k が奇数のとき, $\zeta_p(k)$ の非零性すら大問題であるが, これらの値については次の予想がある.

予想 1.2. 集合 $\{\zeta_p(2m+1) \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的独立であろう.

次に p 進 Hurwitz ゼータ関数を定義する.

定義 1.3. (*see* [11]) $x \in \mathbb{Q}_p$ と $s \in \mathbb{C}_p \setminus \{1\}$ が $|x|_p \geq q_p$ かつ $|s|_p < q_p p^{-1/(p-1)}$ を満たすとする. このとき p **進 Hurwitz ゼータ関数** $\zeta_p(s, x)$ を次の同値な公式で定める.

$$\zeta_p(s, x) := \frac{1}{s-1} \int_{\mathbb{Z}_p} \langle x+t \rangle^{1-s} dt = \frac{\langle x \rangle^{1-s}}{s-1} \sum_{k \geq 0} \binom{1-s}{k} B_k x^{-k}.$$

ここで $\int_{\mathbb{Z}_p} dt$ は A. Volkenborn[29] により定義された p 進積分であり, B_k は k 次 Bernoulli 数である. 以下では, x を $\zeta_p(s, x)$ の**シフト**と呼ぶことにする.

Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数は p 進 Hurwitz ゼータ関数のシフトを動かした際の和で表示できることが知られている (*see* [11]). このことから次の命題が得られる.

命題 1.4. *χ を導手が d の原始的 Dirichlet 指標とする. このとき, χ に付随する Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の正整数点での値は次のように記述できる.*

$$L_p(k, \chi) = \frac{\langle d \rangle^{1-k}}{d} \sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ (j,p)=1}} \chi(j) \zeta_p(k, j/d) \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}).$$

命題 1.4 により, p 進 Riemann ゼータ値やあるいは Kobota-Leopold の p 進 L 関数の正整数点での値の無理数性を示すためには, 適当な代数体上の異なるシフトにおける p **進 Hurwitz ゼータ値の線形独立性**を調べることが重要であることが分かる. p 進 Hurwitz ゼータ値は p 進ポリガンマ関数の値と関連する. そのため J. Diamond により定義された p 進ログガンマ関数とその高階微分として p 進ポリガンマ関数を定義する.

定義 1.5. (*see* [15]) J. Diamond の p **進ログガンマ関数** $G_p : \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ を次で定義する.

$$G_p(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \Big((x+t) \log_p(x+t) - (x+t) \Big) dt.$$

$G_p(x)$ が p 進ログガンマ関数と呼ばれる所以は関係式 $G_p(x+1) = G_p(x) + \log_p(x)$ を満たすことによる.

$G_p(x)$ は $\mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ で, 局所 p 進解析関数であることが知られている. 正整数 s に対して, $G_p(x)$ の s 回微分

$$G_p^{(s)}(x) := \frac{d^s}{dx^s} G_p(x)$$

を Diamond の p 進ポリガンマ関数と呼ぶ.

$G_p^{(s)}(x)$ の $x=\infty$ での Laurent 展開と関連する級数を導入する.

定義 1.6. 正整数 s と $\alpha \in \mathbb{Q}$ に対して,

$$R_s(z) = \sum_{k=s-2}^{\infty} (k-s+3)_{s-2} \cdot B_{k-s+2} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{z^{k+1}} \quad (s \geq 2),$$

$$R_{\alpha,s}(z) = R_s(z+\alpha) \ (s \geq 2),$$

$$R_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}(\alpha) - B_{k+1}}{k+1} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{z^{k+1}}$$

と定める. 後に述べる主定理の証明はこれらの級数の Padé 近似を構成することでなされる.

p 進 Hurwitz ゼータ関数と p 進ポリガンマ関数の間には次の関係式がある.

$$\omega(x)^{1-s}\zeta_p(s,x) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} G_p^{(s)}(x) = \frac{(-1)^{s+1}}{(s-1)!} R_s(x) \qquad (x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \geq q_p).$$

1.2 先行研究

ここではこれまでに得られている p 進 Riemann ゼータ値や p 進 Hurwitz ゼータ値の無理性や線形独立性に関する結果を紹介する. はじめに F. Beukers による $\zeta(2), \zeta(3)$ のモジュラー形式を用いた無理性の証明の p 進類似として, F. Calgari により示された次の結果を挙げる.

定理 1.7. [6, Theorem 2.3] $\zeta_2(3), \zeta_3(3) \notin \mathbb{Q}$.

最近 Calgari, V. Dimitrov, Y, Tang は定理 1.7 の手法と, 彼らによる算術ホロノミシティ定理 (*confer* [7, 8]) を用いて次の 2 進 Riemann ゼータ値の無理数性を示したとアナウンスを行った.

定理 1.8. [9] $\zeta_2(5) \notin \mathbb{Q}$.

Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数の正の整数点における値で生成される代数体上のベクトル空間の次元の下限については J. Sprang[26], L. Li[21], Li-Sprang[22] 等で研究がなされている.

次に p 進 Hurwitz ゼータ値に関する結果を紹介する. Beukers[5] は, Padé 近似を用いて, 定理 1.7 の別証明を与え, その副産物として, p 進 Hurwitz ゼータ値の無理数性も示している. 次はその中の 1 つである.

定理 1.9. [5, Theorem 9.2] p を素数, r を正整数, $x \in \mathbb{Q}$ とし, $|x|_p = p^r$ が成り立つとする. x の分母を $\mathrm{den}(x) = \min\{n \in \mathbb{N} | nx \in \mathbb{Z}\}$ とし, $\mu(x) = \mathrm{den}(x) \prod_{\substack{q:\text{素数} \\ q | \mathrm{den}(x)}} q^{\frac{1}{q-1}}$ とおく. p, r, x が

$$2\left(r \log p + \frac{\log p}{p-1}\right) > 2 + \mu(x)$$

を満たせば, $\zeta_p(2,x)$ は無理数である.

ここでは正確な主張は述べないが, P. Bel[4, Théorème 1.2] は $\zeta_p(4,x)$ の値の無理数性判定法を与えている. また, Bel は, T. Rivoal[25] による Lerch 関数の無限遠点の漸近展開の第 1 種 Padé 型近似を用いて, 次の p 進 Hurwitz ゼータ関数の値の線形独立性判定法を得ている.

定理 1.10. [3, Théorème 3.2] 整数 $m \geq 1$ と素数 p が以下を満たすとき,

$$\log p \geq (1+\log 2)(m+1)^2, \tag{1}$$

$m+1$ 個の $\mathbb{Q}_p$ の元 $1, \zeta_p(2, p^{-1}), \ldots, \zeta_p(m+1, p^{-1})$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

2 主結果

我々の主結果は, p 進 Hurwitz ゼータ関数 $\zeta_p(s,x)$ の異なる整数 s とシフト x における値の線形独立性の判定法を与える. これは Beukers による定理 1.9 を一般化し, 特別な場合には Bel による定理 1.10 を改良するものである. 主定理の説明のために記号を準備する.

$d, m_1, \ldots, m_d$ を正整数とする. ここで d は動かすシフトの個数, m_i は各シフトに関して動く正整数 s の個数を表す. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Q}^d$ を $\alpha_1 = 0$ かつ $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ を満たすものとし, $m := \max_{1 \leq i \leq d}\{m_i\}$, $M := \sum_{i=1}^{d} m_i + d - 1$, $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_d)$ とおく. 更に $\boldsymbol{\alpha}$ に対して, 以下の実数を定義する.

$$\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha}) = \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\,;\, n\alpha_i \in \mathbb{Z} \ \ (1 \leq \forall i \leq d)\}, \quad \mu(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha}) \prod_{\substack{q:\text{prime} \\ q \mid \mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})}} q^{\frac{1}{q-1}}.$$

関数 $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $g(n) = 0$ $(n = 1, 2)$ かつ

$$g(n) = (n+1)\log\left(\frac{2(n+1)^{n+1}}{n^n}\right) \qquad \text{if } n > 2 \tag{2}$$

と定め,

$$f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}) = g(M) + M\left(1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}\right) + \log\left(\mu(\boldsymbol{\alpha})^M \prod_{i=2}^{d} \mu(\alpha_i)^{m_i+1}\right) - \log|\mu(\boldsymbol{\alpha})|_p,$$

とおく. このとき次が成り立つ.

定理 2.1. [19, Theorem 11.2] p を素数, x を有理数とする. p, x が

$$\frac{\log p}{p-1} + \log|x|_p > M\log\bigl(\mu(x)|\mu(x)|_p\bigr) + f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m})$$

を満たすとき, 次の $m_1 + \cdots + m_d + 1$ 個の $\mathbb{Q}_p$ の元:

$$1, \quad \omega(x+\alpha_i)^{1-s_i}\zeta_p(s_i, x+\alpha_i) \quad (1 \leq i \leq d,\ 2 \leq s_i \leq m_i + 1)$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である. ここで ω は $\mathbb{Q}_p^\times$ の *Teichmüller* 指標を表す.

注意 2.2. $d = 1, m_1 = 1$ のとき定理 2.1 は定理 1.9 である.

2.1 定理 1.10 との比較

定理 2.1 と定理 1.10 を比較する. そのために, 定理 2.1 を以下の特別な場合に書き直す.

系 2.3. p を素数, m, r を正整数とし, 次を仮定する.

$$\left(r+\frac{1}{p-1}\right)\log p > g(m)+m+m\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right). \tag{3}$$

このとき $m+1$ 個の $\mathbb{Q}_p$ の元:

$$1, \zeta_p(2, p^{-r}), \ldots, \zeta_p(m+1, p^{-r})$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

証明. 定理 2.1 を $d=1$, $\boldsymbol{m}=m$, $\alpha_1=0$ かつ $x=1/p^r$ に適用すると $m+1$ 個の $\mathbb{Q}_p$ の元:

$$1, \omega(p^{-r})^{-1}\zeta_p(2, p^{-r}), \ldots, \omega(p^{-r})^{-m}\zeta_p(m+1, p^{-r})$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である. 主張は等号 $\omega(p^{-r})=p^{-r}\in\mathbb{Q}$ に注意すると得られる. □

さて, $g(m)$ は定義から,

$$g(m)=(m+1)\log\left(\frac{2(m+1)^{m+1}}{m^m}\right)\sim(m+1)(1+\log(m+1)+\log(2)) \quad (m\to\infty)$$

となることを考慮して, $r=1$ のとき式 (1) と式 (3) の右辺を比べると,

$$(1+\log(2))(m+1)^2 > 2(m+1)(1+\log(2)+\log(m+1))$$

となり系 2.3 は定理 1.10 を改良している.

3 定理 2.1 の証明の概略

定理 2.1 は p 進ポリガンマ関数の値の有理近似を用いてなされる. この有理近似の構成のために, Laurent 級数の有理関数近似の一種である Padé 近似を用いる. 即ち, p 進ポリガンマ関数の Padé 近似を構成してそれらの性質を調べる.

3.1 p 進ポリガンマ関数の Padé 近似

はじめに Laurent 級数の Padé 近似について紹介する. 級数の order 写像を

$$\mathrm{ord}_\infty : \mathbb{Q}((1/z)) \longrightarrow \mathbb{Z}\cup\{\infty\}; \quad \sum_k \frac{f_k}{z^k} \mapsto \min\{k\in\mathbb{Z} \mid f_k\neq 0\}$$

と定義する. はじめに級数族の Padé 近似を紹介する.

補題 3.1. $\boldsymbol{f} := (f_1(z), \ldots, f_m(z)) \in \frac{1}{z}\mathbb{Q}[[1/z]]^m$ とする. $\boldsymbol{n} := (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して $N := \sum_{j=1}^{m} n_j$ とおく. N 以上の任意の自然数 M に対して次の条件を満たす多項式の族 $(P(z), Q_1(z), \ldots, Q_m(z)) \in \mathbb{Q}[z]^{m+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在する.

(i) $\deg P(z) = M$,

(ii) 任意の $1\leq j\leq m$ に対して $\mathrm{ord}_\infty(P(z)f_j(z)-Q_j(z)) \geq n_j+1$.

補題 3.1 の条件を満たす多項式族 $(P(z), Q_1(z), \ldots, Q_m(z))$ を級数族 $\boldsymbol{f}$ の重さ $\boldsymbol{n}$, 次数 M の Padé 型近似 (Padé approximants) と呼ぶ. また級数族 $(P(z)f_j(z) - Q_j(z))_{1\le j\le m}$ も $\boldsymbol{f}$ の重さ $\boldsymbol{n}$, 次数 M の Padé 型近似 (Padé approximantion) と呼ぶ.

これより, 定理 2.1 の証明に使用する p 進ポリガンマ関数の Padé 型近似を紹介する.

はじめに記号を準備する. $d, m_1, \ldots, m_d$ を正整数とする. $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Q}^d$ を $\alpha_1 = 0$ かつ $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ を満たすものとし, $M := \sum_{i=1}^d m_i + d - 1$ とおく. また添え字集合を

$$\mathcal{S} = \{(i, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} ;\, 1 \le i \le d, \quad 1 \le s \le m_i + 1\} \setminus \{(1, 1)\},$$

とおく.

定義 3.2. [19, Definition4.1] Laurent 級数, $f(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k/z^{k+1} \in (1/z) \cdot \mathbb{Q}[[1/z]]$ に対して, **形式的 f 積分変換** φ_f を, $\mathbb{Q}$ 線形写像:

$$\varphi_f : \mathbb{Q}[t] \longrightarrow \mathbb{Q}; \quad t^k \mapsto f_k \quad (k \ge 0). \tag{4}$$

として定義する. 写像:

$$\Phi : (1/z) \cdot \mathbb{Q}[[1/z]] \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}[t], \mathbb{Q});\ f(z) \mapsto \varphi_f$$

は $\mathbb{Q}$ 同型である.

差分作用素 Δ_{-1} を

$$\Delta_{-1} : \mathbb{Q}[z] \longrightarrow \mathbb{Q}[z];\ P(z) \mapsto P(z-1) - P(z)$$

と定義し, $(i, s_i) \in \mathcal{S}$ に対して, $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\varphi_{\alpha_i,s}$ を

$$\varphi_{\alpha_i,s} = \begin{cases} \Phi(R_{\alpha_i,s}(z)) & (1 \le i \le d, 2 \le s) \\ \Phi(R_{\alpha_i,1}(z)) & (1 \le i \le d) \end{cases}$$

と定義する.

定理 3.3. [19, Theorem 7.3 (i)] *ℓ, n を非負整数とし, $(i, s) \in \mathcal{S}$ に対して次の多項式を定義する.*

$$\begin{aligned} A_{n,\ell}(z) = A_\ell(z) &= (-1)^\ell \frac{(z)_\ell}{\ell!} \prod_{i=1}^d \left((-1)^n \frac{(z+\alpha_i)_n}{n!} \right)^{m_i+1}, \\ P_{n,\ell}(z) = P_\ell(z) &= \Delta_{-1}^n \left(A_\ell(z) \right), \\ Q_{n,i,s,\ell}(z) = Q_{i,s,\ell}(z) &= \varphi_{\alpha_i,s} \left(\frac{P_\ell(z) - P_\ell(t)}{z-t} \right). \end{aligned}$$

このとき多項式族 $\left(P_{n,\ell}(z), Q_{n,i,s,\ell}(z)\right)_{(i,s)\in\mathcal{S}}$ は Laurent 級数族 $\left(R_{\alpha_i,s}(z)\right)_{(i,s)\in\mathcal{S}}$ の重さ $(n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^M$ の Padé 型近似である.

定理 3.3 は直交多項式系の Rodrigues の公式 (*confer* [12, 13, 14, 18]) の差分類似である.

注意 3.4. $d = 1$ かつ $\ell = 0$ のとき定理 3.3 は, $R_2(z)$ の Padé 近似を与える. この場合は T. J. Stieltjes [27], J. Touchard [28] および L. Carlitz [10] で調べられている. (*confer* [23, 3.1], [5, Section 8]).

3.2 略証

定理 2.1 の証明は次の p 進数の族の線形独立性判定法を用いてなされる.

補題 3.5. [13, Proposition 5.7] p を素数, m を自然数, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m \in \mathbb{Q}_p$ とする. 可逆な行列の族

$$(\mathrm{M}_n)_n = \left(\left(a_{l,j}^{(n)} \right)_{0 \le l,j \le m} \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{GL}_{m+1}(\mathbb{Q}),$$

と正の数 $\mathbb{A}$ 及び関数族 $\{F_v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}\}_{v:\mathbb{Q}\text{ の素点}}$ を条件 ;

$$\max_{\substack{0 \le \ell \le m \\ 1 \le j \le m}} \left| a_{\ell,0}^{(n)} \vartheta_j - a_{\ell,j}^{(n)} \right|_p \le e^{-\mathbb{A}n + o(n)}, \tag{5}$$

$$\|\mathrm{M}_n\|_v \le e^{F_v(n)} \quad (v : \mathbb{Q}\text{ の素点}), \tag{6}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{v \ne p} F_v(n) =: \mathbb{B} \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

を満たすものとする. $V := \mathbb{A} - \mathbb{B}$ とおく. $V > 0$ であれば, $1, \theta_1, \ldots, \theta_m$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

$\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して, 定理 3.3 で得られた多項式を成分にもつベクトルを

$$\boldsymbol{p}_{n,\ell}(z) = {}^t\Big(P_{n,\ell}(z), Q_{n,1,2,\ell}(z), \ldots, Q_{n,1,m_1+1,\ell}(z), \ldots, Q_{n,d,1,\ell}(z), \cdots, Q_{n,d,m_d+1,\ell}(z) \Big)$$

とおく. x を定理 2.1 を満たす有理数とし, 補題 3.5 を以下の対象に対して用いる.

$$m = M := \sum_{i=1}^{d} m_i + d - 1, \quad \vartheta_{i,s} = R_{\alpha_i,s}(x) \quad (i,s) \in \mathcal{S},$$

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_n(x) = \big(\boldsymbol{p}_{n,0}(x), \ldots, \boldsymbol{p}_{n,M}(x) \big) \in \mathrm{Mat}_{M+1}(\mathbb{Q}).$$

重要なのは $\mathrm{M}_n(x)$ の行列式の非零性に関する次の命題である.

命題 3.6. [19, Theorem 8.10] $\det \mathrm{M}_n(x)$ は x のとり方に依らない有理数で, $\det \mathrm{M}_n(x) \ne 0$ が成り立つ.

この命題は, $\ker \varphi_{\alpha_i,s}$ を調べることで証明される. このような証明はこれまでの先行研究にはなかったと思われる. 詳しくは [19, Section 8] を参照していただきたい. 定理 2.1 はこの $\theta_{i,s}$ と $\mathrm{M}_n(x)$ に対して, 式 (5),(6),(7) を計算することで得られる.

謝辞: 講演の機会をくださいました組織委員の中筋麻貴先生 (上智大学/東北大学), 谷口隆先生 (神戸大学) に感謝致します. 本研究は JSPS 科研費 JP24K16905 の助成を受けております.

参考文献

[1] R. Apéry. Irrationalitée de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Astérisque, **61**, 1979. Societe Mathematique de France.

[2] K. Ball and T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146**. 1 (2001), 193-207.

[3] P. Bel, *Fonctions L p-adiques et irrationalité*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. **IX** (2010), 189-227.

[4] P. Bel, *Irrationalité des valeurs de $\zeta_p(4,x)$*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **31**, no. 1 (2019), 81-99.

[5] F. Beukers, *Irrationality of some p-adic L-values*, Acta Math. Sin. **24**, no. 4, (2008), 663-686.

[6] F. Calegari, *Irrationality of Certain p-adic Periods for Small p*, Int. Math. Res. Not., **20**, (2005), 1235-1249.

[7] F. Calegari, V. Dimitrov, Y. Tang, *The unbounded denominators conjecture*, 2021, https://arxiv.org/abs/2109.09040

[8] F. Calegari, V. Dimitrov, Y. Tang, *The linear independence of 1, $\zeta(2)$, and $L(2,\chi^{-3})$*, 2024, https://arxiv.org/pdf/2408.15403

[9] F. Calegari, V. Dimitrov, Y. Tang, *Arithmetic holonomy bounds and the irrationality of the 2-adic $\zeta(5)$*, preprint.

[10] L. Carlitz, *Some polynomials of Touchard connected with the Bernoulli numbers*, Canad. J. Math., **9**, (1957), 188-190.

[11] H. Cohen, *Number theory. Vol. II. Analytic and modern tools*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **240**, Springer, New York, 2007.

[12] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent* ?, Moscow Journal in Combinatorics and Number Theory, **9** (2020), 389-406.

[13] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear Forms in Polylogarithms*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. XXIII (2022), 1447-1490

[14] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear independence criteria for generalized polylogarithms with distinct shifts*, Acta Arithmetica **206** (2022), 127-169.

[15] J. Diamond, *The p-adic log gamma function and p-adic Euler constants*, Trans. Amer. Math. Soc. **233**, 1977, 321-337.

[16] S. Fischler, *Linear independence of odd zeta values using Siegel's lemma*, preprint, available at https://arxiv.org/pdf/2109.10136.pdf.

[17] S. Fischler, J. Sprang and W. Zudilin, *Many odd zeta values are irrational*, Compositio Mathematica **155** (2019), no. 5, 938-952.

[18] M. Kawashima, *Rodrigues formula and linear independence for values of hypergeometric functions with parameters vary*, J. of Aust. Math. Soc., **117**, 3, (2024), 308–344.

[19] M. Kawashima and A. Poëls, *On the linear independence of p-adic polygamma values*, preprint, available at https://arxiv.org/pdf/2410.06789.

[20] L. Lai and P. Yu, *A note on the number of irrational odd zeta values*, Compositio Math., **156** (2020), no. 8, 1699-1717.

[21] L. Lai, *On the irrationality of certain 2-adic zeta values*, preprint, https://arxiv.org/pdf/2304.00816.pdf

[22] L. Lai and J. Sprang, *Many p-adic odd zeta values are irrational*, preprint, https://arxiv.org/pdf/2306.10393.pdf

[23] M. Prévost, *A new proof of the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ using Padé approximants*, Journal of Computational and Applied Mathematics Volume **67**, Issue 2, 1996, 219-235.

[24] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 4, 267-270.

[25] T. Rivoal, *Simultaneous polynomial approximations of the Lerch function*, Canad. J. Math. **61** (6), (2009), 1341-1356.

[26] J. Sprang, *A Linear independence result for p-adic L-values*, Duke Math. J. **169**, no. 18 (2020), 3439-3476.

[27] T. J. Stieltjes, *Sur quelques integrales définies et leur développement en fractions continues*, Quarterly J. Math. London, **24**, (1890), 370-382.

[28] J. Touchard, *Nombres exponentiels et nombres de bernoulli*, Canad. J. Math., **8**, (1956), 305-320.

[29] A. Volkenborn, *Ein p-adisches Integral und seine Anwendungen. I*, Manuscripta Math. **7** (1972), 341-373.

[30] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields second edition*, Graduate Text in Mathematics, **83**. Springer-Verlag, New York, 1997.

Makoto Kawashima
kawasima@mi.meijigakuin.ac.jp
Institute for Mathematical Informatics
Meijigakuin University
Totsuka, Yokohama, Kanagawa
224-8539, Japan