

Young–Fibonacci Algebras Revisited

名古屋大学多元数理科学研究科

岡田 聡一

Soichi Okada

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

Young 束 $\mathbb{Y}$ は、整数分割全体が Young 図形の包含関係に関してなす半順序集合であり、組合せ論、表現論などのさまざまな場面に現れる基本的な対象である。特に、対称群や対称関数環などの代数系と次のように密接に関係している：

- (1) n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の複素数体上の既約表現の同型類は n の分割でパラメトライズされ、 $\mathfrak{S}_n$ から $\mathfrak{S}_{n-1}$ に既約表現を制限したときの分岐則は Young 束 $\mathbb{Y}$ の半順序によって記述される。
- (2) $\mathfrak{S}_n$ の有限次元表現のなす圏の Grothendieck 群 $R(\mathfrak{S}_n)$ の直和 $R(\mathfrak{S}_\bullet) = \bigoplus_{n \geq 0} R(\mathfrak{S}_n)$ は、 $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ から $\mathfrak{S}_{m+n}$ への誘導表現を考えることによって結合的な次数付き環となる。さらに、 $R(\mathfrak{S}_\bullet)$ は対称関数環 Λ と同型となる。
- (3) 各 $R(\mathfrak{S}_n)$ は表現のテンソル積を積として可換環 ($\mathfrak{S}_n$ の表現環、指標環と呼ばれる) となり、制限写像 $\text{Res} : R(\mathfrak{S}_n) \rightarrow R(\mathfrak{S}_{n-1})$ は環準同型写像である。

Stanley [14] は、Young 束 $\mathbb{Y}$ の一般化として、differential poset と呼ばれる半順序集合のクラスを導入し、飽和鎖などの数え上げを統一的に扱うことができることを示した。(Fomin [3, 4] も同様の概念を独立に導入している。) Young–Fibonacci 束 $\mathbb{YF}$ は、differential poset の一例であり、Young 束の対極に位置するものである。Young–Fibonacci 束に対して、上記の (1), (2), (3) と同様の性質をもつ代数系を考えることは自然な問題である。本稿では、このような代数系について最近の進展も含めて報告する。

まず、(1) については、対称群の群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の役割を果たすものとして、 $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{F}_n$ (Young–Fibonacci 代数と呼ぶ) で、 $\mathcal{F}_n$ から $\mathcal{F}_{n-1}$ に既約表現を制限したときの分岐則が Young–Fibonacci 束 $\mathbb{YF}$ の半順序によって記述されるようなものを、生成元と基本関係によって定義できる。さらに、 $\mathcal{F}_n$ はダイアグラム代数としての表示をもつ。次に、(2) については、 $\mathcal{F}_n$ の有限次元表現のなす圏の Grothendieck 群 $R(\mathcal{F}_n)$ の直和 $R(\mathcal{F}_\bullet) = \bigoplus_{n \geq 0} R(\mathcal{F}_n)$ は、誘導表現を考えることによって結合的な次数付き環となり、非可換 2 変数多項式環 $\mathbb{Z}\langle X, Y \rangle$ と同型になる。最後に、(3) については、制限写像 $\text{Res} : R(\mathcal{F}_n) \rightarrow R(\mathcal{F}_{n-1})$ が環準同型写像となるような環構造を $R(\mathcal{F}_n)$ に入れることができる。

この報告で触れられなかった話題として、

- (1) Young–Fibonacci 代数の既約表現の指標公式 ([7] を見よ) ,
- (2) Young–Fibonacci 版対称関数環の Young–Fibonacci 束の漸近的組合せ論への応用 ([9], [10] を見よ)

がある。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では Young 束と対称群、対称関数環について復習し、第 3 節では differential poset, Young–Fibonacci 束の定義を与えその性質を説明する。そして、第 4 節では、対称群の群環の対応物である Young–Fibonacci 代数を定義し、最近の Hivert–Scott の結果を紹介する。第 5 節では、対称関数の対応物を導入し、Schur 関数の類似物を定義する。最後に、第 6 節では、(第 3 節で導入した Young–Fibonacci 代数との関係は謎であるが) 対称群の指標環の類似物を導入する。

2 Young 束と関連する代数系

この節では、分割のなす Young 束の組合せ論的性質と、関連する代数系 (対称群、対称関数環) についてまとめる。(詳細は、例えば [12] や [13] を参照されたい。)

2.1 Young 束

まず、半順序集合に関する用語を復習しておく。 P を半順序集合とする。 x, y に対して、 $x < y$ であり、 $x < z < y$ となる $z \in P$ が存在しないとき、 x は y にカバーされるといい、 $x \leq y$ と表す。 $x \in P$ に対して、

$$C^+(x) = \{y \in P \mid x < y\}, \quad C^-(x) = \{z \in P \mid z < x\}$$

とおく。 $x, y \in P$ に対して、 P の元の列 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ で

$$x_0 = x, \quad x_n = y, \quad x_{i-1} < x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

をみたすもののことを、 x から y に至る飽和鎖という。また、写像 $\rho: P \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ で、 x が y にカバーされるとき $\rho(x) = \rho(y) - 1$ となるものが存在するとき、 P は次数付き半順序集合であるといい、 ρ を階数関数という。 P が次数付き半順序集合であるとき、 $P_n = \{x \in P \mid \rho(x) = n\}$ とおく。

さて、differential poset の原型である Young 束の組合せ論的性質をまとめておく。非負整数 n の分割とは、非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で $|\lambda| = \sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$ となるもののことである。分割 λ は、

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

によって定義される Young 図形 (格子点の代わりに単位正方形をおいて図示する) と同一視される。例えば、8 の分割 $(4, 3, 1) = (4, 3, 1, 0, 0, \dots)$ の Young 図形は

$$D(4, 3, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}$$

である。 n の分割全体のなす集合を $\mathbb{Y}_n$ 、分割全体のなす集合を $\mathbb{Y} = \bigsqcup_{n \geq 0} \mathbb{Y}_n$ と表す。 $\mathbb{Y}$ 上の半順序 $\leq$ を

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda_i \geq \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots) \iff D(\lambda) \supset D(\mu)$$

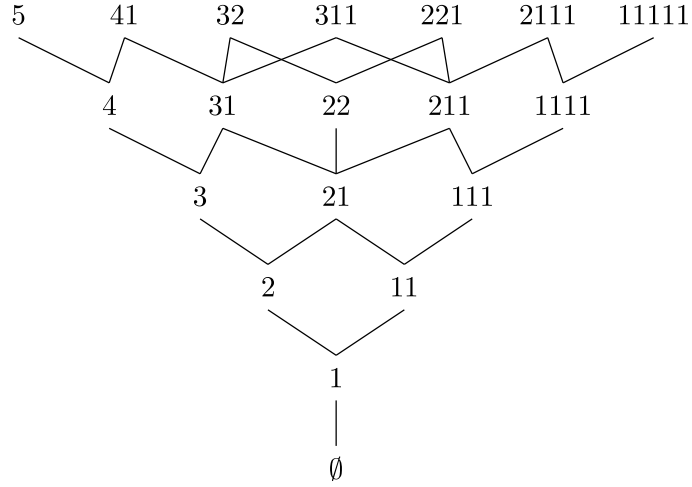


図 1: Young 束の Hasse 図

によって定義し，得られる半順序集合を **Young 束** (Young's lattice) と呼ぶ．Young 束の Hasse 図（の一部）は，図 1 のようになる．分割 $\lambda \in \mathbb{Y}$ に対して，

$$C^+(\lambda) = \{\mu \in \mathbb{Y} \mid \text{ある } i \text{ に対して } \mu = \lambda + e_i\},$$

$$C^-(\lambda) = \{\nu \in \mathbb{Y} \mid \text{ある } i \text{ に対して } \nu = \lambda - e_i\}.$$

ここで， e_i は第 i 成分が 1 で他の成分が 0 である単位ベクトルである．よって， $\mathbb{Y}$ は階数関数 $\rho(\lambda) = |\lambda|$ ($\lambda \in \mathbb{Y}$) に関して次数付き半順序集合となる．

命題 2.1. Young 束 $\mathbb{Y}$ について，以下が成り立つ．

(1) $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$ が $\lambda \neq \mu$ をみたすとき，

$$\begin{aligned} \#(C^+(\lambda) \cap C^+(\mu)) &= \#(C^-(\lambda) \cap C^-(\mu)) \\ &= \begin{cases} 1 & (\mu = \lambda + e_i - e_j \text{ となる } i \neq j \text{ が存在するとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \end{aligned}$$

(2) $\lambda \in \mathbb{Y}$ に対して，

$$\#C^+(\lambda) = 1 + \#C^-(\lambda).$$

分割 λ の Young 図形の箱に次の 2 条件 (a), (b) をみたすように正整数を書き込んだものを λ を枠とする **標準盤** という：

- (a) 1 から $|\lambda|$ までの正整数が 1 回ずつ現れる．
- (b) 各行，各列の成分は単調増加である．

例えば，

1	2	4	6
3	5	8	
7			

は， $(4, 3, 1)$ を枠とする標準盤である．分割 λ を枠とする標準盤全体のなす集合を $\text{STab}(\lambda)$ ，その個数を f^λ と表す．

分割 λ を枠とする標準盤 T は、Young 束における空分割 $\emptyset$ から λ に至る飽和鎖 $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)})$ (ただし, $\lambda^{(i)}$ は T において $1, 2, \dots, i$ が書き込まれている部分の枠) と 1 対 1 に対応している. 例えば,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \left(\emptyset, \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Robinson–Schensted 対応と呼ばれるアルゴリズムによって、置換に同じ枠をもつ標準盤の対を対応させる全単射

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\lambda) \\ w & \longmapsto & (P(w), Q(w)) \end{array}$$

(ここで, $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群である) で,

$$P(w^{-1}) = Q(w), \quad Q(w^{-1}) = P(w)$$

をみたすものが得られる. 特に, $w^2 = e$ となることと $P(w) = Q(w)$ となることは同値である. よって, 次の命題が導かれる.

命題 2.2. 非負整数 n に対して,

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} (f^\lambda)^2 = n!, \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} f^\lambda = \#\{w \in \mathfrak{S}_n \mid w^2 = e\}.$$

2.2 対称群

Young 束が自然に関わる代数系として, ここでは次の 3 つを考える:

- (1) 対称群,
- (2) 対称関数環,
- (3) 対称群の指標環.

以下では, 非負整数 n に対して, n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と表す. (ただし, $\mathfrak{S}_0$ は単位元のみからなる群とする.) n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は次のような生成元と基本関係によって定義される群である:

$$\begin{aligned} \text{生成元: } & s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, \\ \text{関係式: } & s_i^2 = e \ (i = 1, \dots, n-1), \\ & s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \ (i = 1, \dots, n-2), \\ & s_i s_j = s_j s_i \ (|i - j| \geq 2). \end{aligned}$$

対称群の複素数体上の表現論については, 次の命題が基本的である.

命題 2.3. (1) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}$ 上の既約表現 (の同型類) は n の分割でパラメトライズされる. n の分割 λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現を S^λ と表す.
(2) 既約表現 S^λ の基底は λ を枠とする標準盤でパラメトライズされ,

$$\dim S^\lambda = f^\lambda.$$

(3) $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 S^λ を部分群 $\mathfrak{S}_{n-1} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$ に制限すると, Young 束 $\mathbb{Y}$ の半順序に従って,

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} S^\lambda \cong \bigoplus_{\nu \in C^-(\lambda)} S^\nu$$

と既約分解される.

この命題 2.3 (2) について, n の分割 λ に対して, $\text{STab}(\lambda)$ を基底とする線型空間の上に隣接互換 $s_1, \dots, s_{n-1}$ の作用を具体的に与えることによって既約表現を構成することもできる.

2.3 対称関数環

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の有限次元表現のなす圏の Grothendieck 群を $R(\mathfrak{S}_n)$ と表す. $\mathfrak{S}_n$ の有限次元表現は完全可約だから, $R(\mathfrak{S}_n)$ は既約表現の類 $\{[S^\lambda] \mid \lambda \in \mathbb{Y}_n\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である. このとき, 直和

$$R(\mathfrak{S}_\bullet) = \bigoplus_{n \geq 0} R(\mathfrak{S}_n)$$

は, 積を

$$[V] \circ [W] = \left[\text{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (V \boxtimes W) \right]$$

(ここで, V は $\mathfrak{S}_m$ の表現, W は $\mathfrak{S}_n$ の表現) と定めることによって, 可換な結合的次數付き環となる. また, $\text{Res}, \text{Ind} : R(\mathfrak{S}_\bullet) \rightarrow R(\mathfrak{S}_\bullet)$ を $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} : R(\mathfrak{S}_n) \rightarrow R(\mathfrak{S}_{n-1})$, $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} : R(\mathfrak{S}_n) \rightarrow R(\mathfrak{S}_{n+1})$ の直和として定義する.

無限個の変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$ に関する (整数係数の) 対称関数環を Λ とする. 完全対称関数 $h_r(x)$ ($r \geq 0$) を

$$\sum_{r \geq 0} h_r(x) t^r = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t}$$

によって定義すると, $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$ (多項式環) である. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$) に対して,

$$s_\lambda(x) = \det (h_{\lambda_i - i + j}(x))_{1 \leq i, j \leq l}$$

において **Schur** 関数 $s_\lambda \in \Lambda$ を定義する. このとき, Λ は Schur 関数 $\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Y}\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である. また, $\mathbb{Z}$ 線形写像 $U, D : \Lambda \rightarrow \Lambda$ を

$$U(s_\lambda) = \sum_{\mu \in C^+(\lambda)} s_\mu, \quad D(s_\lambda) = \sum_{\nu \in C^-(\lambda)} s_\nu$$

によって定義する.

命題 2.4. $\mathbb{Z}$ 線形写像 $\text{ch} : R(\mathfrak{S}_\bullet) \rightarrow \Lambda$ (**Frobenius** 標識と呼ぶ) を $\text{ch}([S^\lambda]) = s_\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{Y}$) によって定義すると, ch は次数付き環の同型写像である. また,

$$\begin{array}{ccc} R(\mathfrak{S}_\bullet) & \xrightarrow{\text{ch}} & \Lambda \\ \text{Ind} \downarrow & & \downarrow U \\ R(\mathfrak{S}_\bullet) & \xrightarrow{\text{ch}} & \Lambda \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R(\mathfrak{S}_\bullet) & \xrightarrow{\text{ch}} & \Lambda \\ \text{Res} \downarrow & & \downarrow D \\ R(\mathfrak{S}_\bullet) & \xrightarrow{\text{ch}} & \Lambda \end{array}$$

は可換図式である.

2.4 対称群の指標環

分割 $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対応する既約表現 S^λ の指標を χ^λ とし, χ^λ の巡回置換型 α をもつ置換での値を χ_α^λ と表す. このとき, 指標表 $(\chi_\alpha^\lambda)_{\alpha, \lambda \in \mathbb{Y}_n}$ は, Schur 関数 $\{s_\lambda\}$ とべき和対称関数 $\{p_\alpha\}$ の間の基底変換行列でもある.

正整数 r に対して $p_r(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r$ と定義し, 分割 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ ($\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_l > 0$) に対応するべき和対称関数 $p_\alpha \in \Lambda$ を

$$p_\alpha = p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_l}$$

とおいて定める. このとき,

$$p_\alpha = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \chi_\alpha^\lambda s_\lambda.$$

また, $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$ (多項式環) であり,

$$Uf = p_1 f, \quad Df = \frac{\partial f}{\partial p_1} \quad (f \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

特に,

命題 2.5. 分割 α に対して,

$$Up_\alpha = p_{\alpha \cup (1)}, \quad Dp_\alpha = \begin{cases} m_1(\alpha) p_{\alpha \setminus (1)} & (m_1(\alpha) > 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (m_1(\alpha) = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで, $m_1(\alpha)$ は α に現れる 1 の個数であり, $\alpha \cup (1)$ は α に成分 1 を付け加えてできる分割, $\alpha \setminus (1)$ は α から成分 1 を取り除いてできる分割である. また, Λ 上の双線型形式 $\langle \ , \ \rangle$ を $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$ によって定義すると,

$$\langle p_\alpha, p_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} z_\alpha.$$

ここで, $\alpha = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$ のとき,

$$z_\alpha = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!.$$

対称群 $\mathfrak{S}_n$ は群だから (群環 $\mathbb{C}[G]$ は Hopf 代数だから), Grothendieck 群 $R(\mathfrak{S}_n)$ は, 積

$$[V] * [W] = [V \otimes W]$$

に関して結合的な可換環の構造をもつ. この環 $R(\mathfrak{S}_n)$ は $\mathfrak{S}_n$ の指標環, あるいは, 表現環と呼ばれる. 分割 $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Y}_n$ に対して,

$$g_{\mu, \nu}^\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{Y}_n} \frac{1}{z_\alpha} \chi_\alpha^\lambda \chi_\alpha^\mu \chi_\alpha^\nu$$

とおき, **Kronecker** 係数と呼ぶ. このとき, S^μ と S^ν のテンソル積は

$$S^\mu \otimes S^\nu \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} (S^\lambda)^{g_{\mu,\nu}^\lambda}$$

と既約分解され, $g_{\mu,\nu}^\lambda$ が非負整数となることがわかる. さらに, 制限写像

$$\begin{aligned} \text{Res} : R(\mathfrak{S}_n) &\rightarrow R(\mathfrak{S}_{n-1}) \\ [V] &\mapsto [\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V] \end{aligned}$$

は環の全射準同型写像である. よって, Frobenius 標識を用いて対称関数環 Λ の斉次成分に移ると, 次の命題が得られる.

命題 2.6. n 次斉次な対称関数全体 Λ_n は, 積

$$s_\mu * s_\nu = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} g_{\mu,\nu}^\lambda s_\lambda$$

に関して結合的環な可換環の構造をもち, $D : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_{n-1}$ は環の全射準同型写像である.

3 Differential poset

この節では, differential poset の定義, 基本性質をまとめ, 本稿の主役である Young–Fibonacci 束を導入する.

3.1 Differential poset と Young–Fibonacci 束

Stanley [14] は, 命題 2.1 に着目して, differential poset の概念を導入した.

定義 3.1. ([14, Definition 1.1]) 半順序集合 P は次の 3 条件 (D1), (D2), (D3) をみたすとき, **differential poset** であるという.

(D1) P は次数付き半順序集合であり, 最小元 $\hat{0}$ をもつ.

(D2) 任意の $x, y \in P$ に対して, $x \neq y$ であるとき,

$$\#(C^+(x) \cap C^+(y)) = \#(C^-(x) \cap C^-(y)).$$

(D3) 任意の $x \in P$ に対して,

$$\#C^+(x) = 1 + \#C^-(x).$$

半順序集合 P が differential poset であるとき, 任意の $n \geq 0$ に対して P_n は有限集合であることが示される.

命題 2.1 から

命題 3.2. Young 束 $\mathbb{Y}$ は differential poset である.

次に, 本稿の主役である Young–Fibonacci 束を定義する.

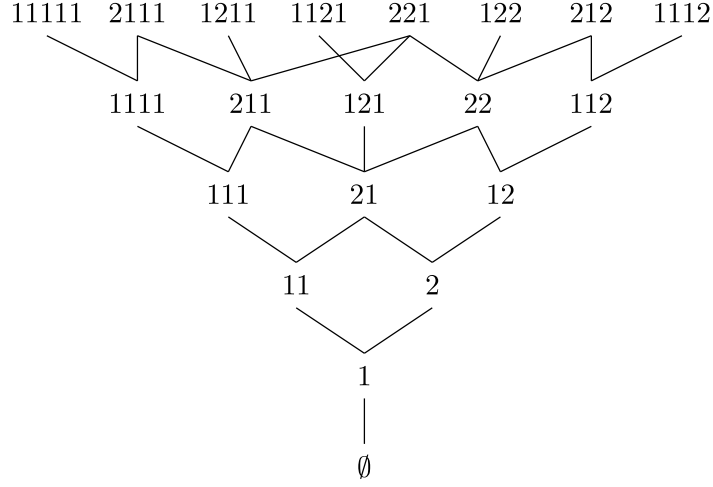


図 2: Young-Fibonacci 束の Hasse 図

定義 3.3. 文字 1, 2 を並べてできる語 (**Fibonacci 語**と呼ぶ) 全体のなす集合 (空語 $\emptyset$ も含む) を $\mathbb{YF}$ と表す. Fibonacci 語 $v = v_1v_2\cdots v_k \in \mathbb{YF}$ ($v_i \in \{1, 2\}$) に対してその大きさ $|v|$ を $|v| = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$ とおいて定め, $\mathbb{YF}_n = \{v \in \mathbb{YF} \mid |v| = n\}$ とおく. $\mathbb{YF}$ 上の半順序 $\leq$ を次のカバー関係で定義する:

$$C^-(1v) = \{v\}, \quad C^-(2v) = C^+(v),$$

つまり,

$$C^+(v) = \{1v\} \sqcup \{2u \mid u \in C^-(v)\}.$$

このようにしてできる半順序集合を **Young-Fibonacci 束** (Young-Fibonacci kattice) と呼ぶ.

このとき, $\mathbb{YF}$ は階数関数 $|v|$ に関して次数付き半順序集合であり, $\#\mathbb{YF}_n$ は n 番目の Fibonacci 数 F_n である. つまり,

$$\#\mathbb{YF}_0 = \#\mathbb{YF}_1 = 1, \quad \#\mathbb{YF}_n = \#\mathbb{YF}_{n-1} + \#\mathbb{YF}_{n-2}.$$

また, $\mathbb{YF}$ の Hasse 図 (の一部) は図 2 のようになる. Young-Fibonacci 束の半順序の定義から,

命題 3.4. Young-Fibonacci 束 $\mathbb{YF}$ は differential poset である.

Young 束 $\mathbb{Y}$ と Young-Fibonacci 束 $\mathbb{YF}$ は, 次の定理, 予想の意味で対極に位置する特別な differential poset である.

定理 3.5. ([2, Theorem 1.3]) Differential poset で束であるものは, Young 束 $\mathbb{Y}$ と Young-Fibonacci 束 $\mathbb{YF}$ のみである.

予想 3.6. ([14, Problem 6]) P が differential poset であるとき,

$$\#\mathbb{Y}_n \leq \#P_n \leq \#\mathbb{YF}_n \quad (n \geq 0).$$

定理 3.7. ([2, Theorem 1.2]) P が differential poset であるとき,

$$\#P_n \leq \#\mathbb{YF}_n \quad (n \geq 0).$$

また, Young 束は表現論的にも特徴づけることができる.

定理 3.8. ([6, Theorem 6]) 有限群の増大列 $\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ が, 条件

各 n に対して, G_n の既約表現を G_{n-1} に制限したとき無重複に既約分解される

をみたしていると仮定する. G_n の既約表現の同型類全体のなす集合を $\text{Irr}(G_n)$ と表し, $P = \bigsqcup_{n \geq 0} \text{Irr}(G_n)$ に

$$[V] \succ [W] \iff [\text{Res}_{G_{n-1}}^{G_n} V : W] \neq 0 \quad ([V] \in \text{Irr}(G_n), [W] \in \text{Irr}(G_{n-1}))$$

によって半順序集合の構造を入れる. このとき, P が differential poset となるならば, P は Young 束 $\mathbb{Y}$ と同型であり, $G_n \cong \mathfrak{S}_n$ ($n \geq 0$) である.

3.2 Differential poset における飽和鎖の数え上げ

定義 3.1 の条件 (D1) をみたす半順序集合 P に対して, P を基底とする複素線型空間 (つまり, P の元たちの形式的線型結合全体) を $\mathbb{C}P$ と表し, 線型変換 $U, D : \mathbb{C}P \rightarrow \mathbb{C}P$ を

$$Ux = \sum_{y \in C^+(x)} y, \quad Dx = \sum_{z \in C^-(x)} z$$

によって定義する.

命題 3.9. ([14, Theorem 2.2]) 定義 3.1 の条件 (D1) をみたす半順序集合 P に対して, 次の条件 (i), (ii) は同値である:

- (i) P は differential poset である.
- (ii) $\mathbb{C}P$ 上の恒等変換を Id と表すとき, $DU - UD = \text{Id}$.

注意. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の変数 z に関する 1 変数多項式環を $V = \mathbb{C}[z]$ とし, z 倍写像を同じ記号 z で, z に関する微分作用素を ∂_z と表す. このとき,

$$\partial_z \circ z - z \circ \partial_z = \text{Id}.$$

命題 3.9 の (ii) の関係式がこの関係式と同じであり, 数え上げ問題を微分方程式に帰着できることが, differential poset の名前の由来である.

命題 3.9 の関係式 $DU - UD = \text{Id}$ などを用いると, 命題 2.2 の differential poset への拡張として次の定理を証明することができる.

定理 3.10. ([14, Corollary 3.9, Proposition 3.1]) P を differential poset とする. $x \in P$ に対して, $\hat{0}$ から x に至る飽和鎖の個数を $e(x)$ とおく. このとき,

$$\sum_{\lambda \in P_n} e(\lambda)^2 = n!, \quad \sum_{x \in P_n} e(x) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n \mid w^2 = e\}.$$

Fomin [3, 5] は, differential poset P に対して, 単射 $\Phi_x : C^-(x) \rightarrow C^+(x)$ ($x \in P$) を用いてアルゴリズム的に構成される全単射

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\longrightarrow \bigsqcup_{x \in P_n} \Omega_x \times \Omega_x \\ w &\longmapsto (P(w), Q(w)) \end{aligned}$$

(ここで, Ω_x は最小元 $\hat{0}$ から x に至る飽和鎖全体のなす集合である) で,

$$P(w^{-1}) = Q(w), \quad Q(w^{-1}) = P(w)$$

をみたすものを与えている.

4 Young–Fibonacci 代数

この節では, Young 束に対する対称群 (の群環) の, Young–Fibonacci 束版 (Young–Fibonacci 代数) を導入する.

4.1 生成元と基本関係式による定義

まず, 生成元と基本関係による定義を与える.

定義 4.1. $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ を複素パラメータとする. 単位元をもつ結合的 $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ を以下の生成元と基本関係式で定義し, **Young–Fibonacci 代数** (Young–Fibonacci algebra) と呼ぶ (Okada algebra と呼ばれる).

$$\begin{aligned} \text{生成元: } & E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, \\ \text{関係式: } & E_i^2 = x_i E_i \ (i = 1, \dots, n-1), \\ & E_{i+1} E_i E_{i+1} = E_{i+1} \ (i = 1, \dots, n-2), \\ & E_i E_j = E_j E_i \ (\text{if } |i-j| \geq 2). \end{aligned}$$

パラメータ $x_1, x_2, \dots$ に関する多項式 $\alpha(v)$ ($v \in \mathbb{YF}$) を以下のように帰納的に定義する:

$$\begin{aligned} \alpha(\emptyset) &= 1, \\ \alpha(1v) &= x_{|v|+1} \alpha(v) - \sum_{w \in C^-(v)} \alpha(w), \\ \alpha(2v) &= \alpha(v). \end{aligned}$$

このとき,

定理 4.2. ([11, Theorems 2.6, 2.8]) パラメータ $x_1, \dots, x_{n-1}$ が条件

$$\text{任意の } v \in \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \mathbb{YF}_k \text{ に対して } \alpha(v) \neq 0$$

をみたしているとき, 以下が成り立つ.

- (1) $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{F}_n$ は $n!$ 次元の半単純代数であり, $\mathcal{F}_n$ の既約表現 (の同型類) は大きさ n の Fibonacci 語でパラメトライズされる. $v \in \mathbb{YF}_n$ に対応する $\mathcal{F}_n$ の既約表現を V_v と表す.
- (2) $\mathcal{F}_n$ の既約表現 V_v を部分代数 $\mathcal{F}_{n-1} = \langle E_1, \dots, E_{n-2} \rangle \subset \mathcal{F}_n$ に制限すると, Young-Fibonacci 束 $\mathbb{YF}$ の半順序に従って,

$$\text{Res}_{\mathcal{F}_{n-1}}^{\mathcal{F}_n} V_v \cong \bigoplus_{w \in C^-(v)} V_w$$

と既約分解される.

証明のアイデア. まず, $\mathcal{F}_n$ の既約表現を構成する. $v \in \mathbb{YF}_n$ に対して, $\hat{0}$ から v に至る飽和鎖全体のなす集合 Ω_v を基底とする複素線型空間を V_v とし, V_v 上の線型変換 $\hat{E}_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) を

$$\begin{aligned} & \hat{E}_i(v^{(0)}, \dots, v^{(i-1)}, v^{(i)}, v^{(i+1)}, \dots, v^{(n)}) \\ = & \begin{cases} \sum_{z \in C^+(v^{(i-1)})} \frac{\alpha(z)}{\alpha(v^{(i-1)})} (v^{(0)}, \dots, v^{(i-1)}, z, v^{(i+1)}, \dots, v^{(n)}) & (v^{(i+1)} = 2v^{(i-1)} \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

によって定義する. このとき,

- 補題 4.3.** (1) $\mathcal{F}_n$ の V_v 上の表現 π_v で, $\pi_v(E_i) = \hat{E}_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) となるものが存在する.
- (2) π_v は既約である.
- (3) $v, w \in \mathbb{YF}_n$ が $v \neq w$ をみたすとき, π_v と π_w は非同型である.

補題 4.3 から,

$$\dim \mathcal{F}_n \geq \dim (\mathcal{F}_n / \text{rad } \mathcal{F}_n) \geq \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} (\dim V_v)^2 = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} e(v)^2.$$

一方,

$$E_k^{(r)} = \begin{cases} E_{r-1} E_{r-2} \cdots E_k & (1 \leq k \leq r-1 \text{ のとき}), \\ 1 & (k = r \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくとき, $E_{k_n}^{(n)} \cdots E_{k_1}^{(1)}$ ($1 \leq k_r \leq r$) の形の単項式で $\mathcal{F}_n$ が張られることがわかるから, $\dim \mathcal{F}_n \leq n!$ である. また, 定理 3.10 より $\sum_{v \in \mathbb{YF}_n} e(v)^2 = n!$ だから,

$$\dim \mathcal{F}_n = \dim (\mathcal{F}_n / \text{rad } \mathcal{F}_n) = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} (\dim V_v)^2.$$

この等式から, $\text{rad } \mathcal{F}_n = \{0\}$, つまり, $\mathcal{F}_n$ が半単純であること, V_v ($v \in \mathbb{YF}_n$) が既約表現の同型類の完全代表系であることがわかる. $\square$

4.2 ダイアグラム代数としての表示

最近, F. Hivert と J. Scott [8] が, Young–Fibonacci 代数のダイアグラム代数としての表示を与えた. まず, ダイアグラム代数の基底を定義する.

定義 4.4. n を正整数とする.

(1) n 次の **Temperley–Lieb 図式** (Temperley–Lieb diagram) (以下, TL 図式と略す) とは, 長方形の対辺上に n 個ずつ置かれた $2n$ 個の頂点 $1, \dots, n, \bar{n}, \dots, \bar{1}$ と長方形内に互いに交わらないように描かれた n 本の辺からなるグラフで, どの頂点もちょうど 1 つの別の頂点に辺でつながっているようなものである. (図 3 の左側の図は 10 次の TL 図式である.)

(2) n 次のラベル付き **Temperley–Lieb 図式** (labeled Temperley–Lieb diagram) とは, n 次の Temperley–Lieb 図式 D と辺の正整数によるラベル付け h の組 (D, h) で, 次の 2 条件 (a), (b) をみたすもののことである. (辺 α のラベルを $h(\alpha)$ と表し, $h(\alpha)$ を $\circ$ で囲んで図示する.)

(a) 辺 α が 2 頂点 a, b を結んでいるとき,

$$1 \leq h(\alpha) \leq \min\{|a|, |b|\}, \quad h(\alpha) \equiv \min\{|a|, |b|\} \pmod{2}.$$

ここで, 整数 i ($1 \leq i \leq n$) に対して, $|i| = |\bar{i}| = i$ である.

(b) 辺 α が辺 β に囲まれているとき, $h(\alpha) > h(\beta)$ である. ここで, 2 頂点 a, b を結ぶ辺 α が 2 頂点 c, d を結ぶ辺 β に囲まれているとは, 頂点集合上の全順序 $1 < 2 < \dots < n < \bar{n} < \dots < \bar{2} < \bar{1}$ に関して, $c < a < b < d$ が成り立つことをいう. 例えば, 2, 3 を結ぶ辺は 1, 4 を結ぶ辺に, $\bar{9}, \bar{8}$ を結ぶ辺は $\bar{9}, \bar{7}$ を結ぶ辺にそれぞれ囲まれている.

(図 3 の右側の図は 10 次のラベル付き TL 図式である.)

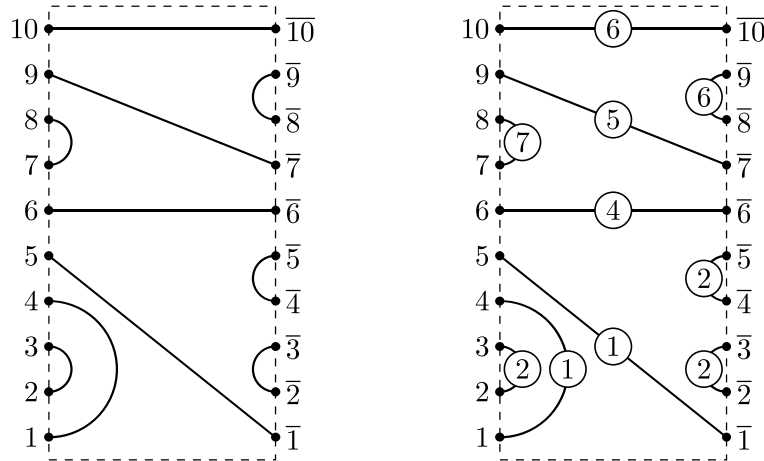


図 3: Temperley–Lieb 図式とラベル付き Temperley–Lieb 図式

このとき, TL 図式, ラベル付き TL 図式の個数について, 次の命題が成り立つ.

命題 4.5. (1) n 次の TL 図式の個数は, Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ に等しい.

(2) n 次のラベル付き TL 図式の個数は、 $n!$ に等しい。

n 次のラベル付き TL 図式全体を基底とする複素線型空間を $\tilde{\mathcal{F}}_n$ とする。ラベル付き TL 図式の積を双線型に拡張することによって、 $\tilde{\mathcal{F}}_n$ に積構造を入れる。ラベル付き TL 図式 $(D_1, h_1), (D_2, h_2)$ が与えられたとき、その積 $(D_1, h_1) \cdot (D_2, h_2) \in \tilde{\mathcal{F}}_n$ を以下のように定義する。

- (1) D_1, D_2 を左右に並べ、 $1 \leq i \leq n$ に対して D_1 の頂点 $\bar{i}$ と D_2 の頂点 i を同一視することによって 2 つの図式をつなげ、できるループを無視して得られる TL 図式を $D_1 * D_2$ とする。
- (2) $D_1 * D_2$ の各辺 α に対して、そのラベル $h(\alpha)$ を、 α を構成する D_1, D_2 の辺のラベルの最小値として定義する。
- (3) (1) で無視した各ループ γ に対して、 γ を構成する D_1, D_2 の辺のラベルの最小値を $h(\gamma)$ とする。

このとき、

$$(D_1, h_1) \cdot (D_2, h_2) = \left(\prod_{i=1}^k x_{h(\gamma_i)} \right) (D_1 * D_2, h)$$

(ここで、 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ は (1) で無視したループである) と定義する。例えば、図 4 の例では、右側の TL 図式の辺 $\alpha = 69$ は D_1 の辺 $6\bar{6}$ 、 D_2 の辺 67 、 D_1 の辺 $\bar{7}9$ から構成されているので、 $h(\alpha) = \min\{4, 2, 5\} = 2$ となる。また、 D_1 の辺 $\bar{8}9$ と D_2 の辺 89 からループ γ ができるが、 $h(\gamma) = \min\{4, 6\} = 4$ だから、 x_4 が係数として現れる。

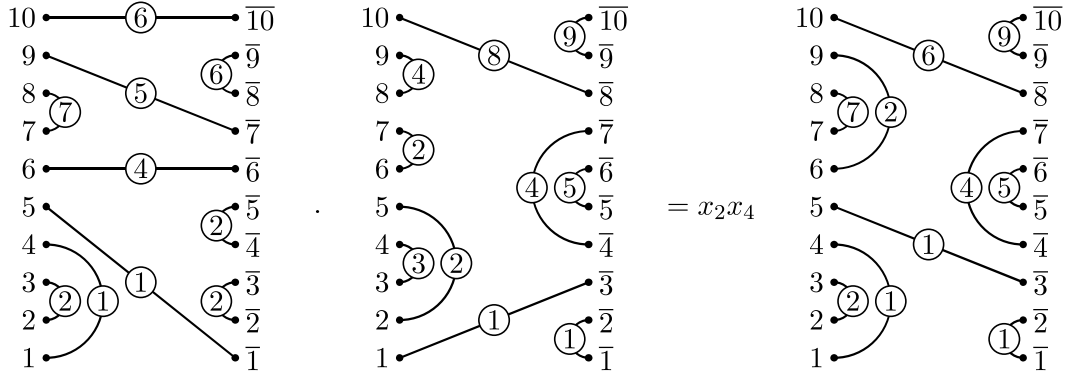


図 4: ラベル付き Temperley-Lieb 図式の積

定理 4.6. ([8, Theorem 3.9]) $\mathbb{C}$ 代数の同型写像 $\Theta : \mathcal{F}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_n$ で,

$$\Theta(E_i) = \begin{array}{ccc} n & \text{---} & \textcircled{n} & \text{---} & \bar{n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ & i+2 & \text{---} & \textcircled{i+2} & \text{---} & \overline{i+2} \\ & i+1 & \text{---} & \textcircled{i} & \text{---} & \overline{i+1} \\ & i & \text{---} & \textcircled{i} & \text{---} & \bar{i} \\ & i-1 & \text{---} & \textcircled{i-1} & \text{---} & \overline{i-1} \\ & \vdots & & \vdots & \\ & 1 & \text{---} & \textcircled{1} & \text{---} & \bar{1} \end{array} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

となるものが存在する.

定理 4.7. ([8, Theorem 6.2]) 代数 $\mathcal{F}_n$ は cellular 代数の構造をもつ.

5 Young–Fibonacci 版対称関数環

この節では, 対称関数環 Λ の Young–Fibonacci 類似を導入する.

定理 4.2 から, Young–Fibonacci 代数 $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ の有限次元表現のなす圏の Grothendieck 群 $R(\mathcal{F}_n)$ は, パラメータ $x_1, \dots, x_{n-1}$ が generic である限りパラメータに依らず $\{[V_v] \mid v \in \mathbb{YF}_n\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である. また, Young–Fibonacci 代数の包含

$$\mathcal{F}_{n-1} = \langle E_1, \dots, E_{n-2} \rangle \subset \mathcal{F}_n = \langle E_1, \dots, E_{n-1} \rangle \subset \mathcal{F}_{n+1} = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$$

を考えることにより, $\mathbb{Z}$ 線型写像

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathcal{F}_{n-1}}^{\mathcal{F}_n} : R(\mathcal{F}_n) &\rightarrow R(\mathcal{F}_{n-1}), & \text{Res}_{\mathcal{F}_{n-1}}^{\mathcal{F}_n}([V]) &= [\text{Res}_{\mathcal{F}_{n-1}}^{\mathcal{F}_n} V], \\ \text{Ind}_{\mathcal{F}_n}^{\mathcal{F}_{n+1}} : R(\mathcal{F}_n) &\rightarrow R(\mathcal{F}_{n+1}) & \text{Ind}_{\mathcal{F}_n}^{\mathcal{F}_{n+1}}([V]) &= [\text{Ind}_{\mathcal{F}_n}^{\mathcal{F}_{n+1}} V] = [\mathcal{F}_{n+1} \otimes_{\mathcal{F}_n} V] \end{aligned}$$

が定まる. この節では, Grothendieck 群の直和

$$R(\mathcal{F}_\bullet) = \bigoplus_{n \geq 0} R(\mathcal{F}_n)$$

と $\mathbb{Z}$ 線型写像

$$\text{Res} = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Res}_{\mathcal{F}_{n-1}}^{\mathcal{F}_n} : R(\mathcal{F}_\bullet) \rightarrow R(\mathcal{F}_\bullet), \quad \text{Ind} = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ind}_{\mathcal{F}_n}^{\mathcal{F}_{n+1}} : R(\mathcal{F}_\bullet) \rightarrow R(\mathcal{F}_\bullet)$$

を考える.

直和 $R(\mathcal{F}_\bullet)$ に次のように次数付き環の構造を入れる. $(m+n)$ 次 Young–Fibonacci 代数 $\mathcal{F}_{m+n} = \mathcal{F}_{m+n}(x_1, \dots, x_{m+n-1})$ において, $E_1, \dots, E_{m-1}$ で生成される部分代数を $\mathcal{F}_{[1,m]}$, $E_{m+1}, \dots, E_{m+n-1}$ で生成される部分代数を $\mathcal{F}_{[m+1,m+n]}$ とすると,

$$\mathcal{F}_{[1,m]} \cong \mathcal{F}_m(x_1, \dots, x_{m-1}), \quad \mathcal{F}_{[m+1,m+n]} \cong \mathcal{F}_n(x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}).$$

そこで, $u \in \mathbb{YF}_m, v \in \mathbb{YF}_n$ が与えられたとき, u に対応する $\mathcal{F}_{[1,m]}$ の既約表現 V_u と v に対応する $\mathcal{F}_{[m+1,m+n]}$ の既約表現 V'_v を用いて, $[V_u] \in R(\mathcal{F}_m)$ と $[V_v] \in R(\mathcal{F}_n)$ の積を

$$[V_u] \circ [V_v] = \left[\text{Ind}_{\mathcal{F}_{[1,m]} \otimes \mathcal{F}_{[m+1],[m+n]}}^{\mathcal{F}_{m+n}} (V_u \boxtimes V'_v) \right]$$

とにおいて定義する. $R(\mathcal{F}_\bullet)$ はこの積に関して結合的な次数付き環となる.

次数付き環 $R(\mathcal{F}_\bullet)$ の構造を調べる. 2変数 X, Y に関する非可換多項式環を $R = \mathbb{Z}\langle X, Y \rangle$ とし, $\deg X = 1, \deg Y = 2$ と定めることによって, R に次数付き環の構造を入れる. R の n 次斉次成分を R_n とすると, R_n は階数 F_n (Fibonacci 数) の自由 $\mathbb{Z}$ 加群である. $\mathbb{YF}$ 版 **Schur** 関数 $s_v \in R$ ($v \in \mathbb{YF}$) を次のように帰納的に定義する:

$$s_\emptyset = 1, \quad s_{1v} = s_v X - \left(\sum_{z \prec v} s_z \right) Y, \quad s_{2v} = s_v Y.$$

このとき, $\{s_v \mid v \in \mathbb{YF}\}$ は R の $\mathbb{Z}$ 基底をなす. また, $\mathbb{Z}$ 線型写像 $U, D: R \rightarrow R$ を

$$U(s_v) = \sum_{u \in C^+(v)} s_u, \quad D(s_v) = \sum_{w \in C^-(v)} s_w$$

によって定義する.

定理 5.1. ([11, Theorem3.4]) 環準同型写像 $\varphi: R \rightarrow R(\mathcal{F}_\bullet)$ を $\varphi(X) = [V_1], \varphi(Y) = [V_2]$ によって定めると, φ は次数付き環の同型写像であり,

$$\varphi(s_v) = [V_v] \quad (v \in \mathbb{YF}).$$

また,

$$\begin{array}{ccc} R(\mathcal{F}_\bullet) & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \text{Ind} \downarrow & & \downarrow U \\ R(\mathcal{F}_\bullet) & \xrightarrow{\varphi} & R \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R(\mathcal{F}_\bullet) & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \text{Res} \downarrow & & \downarrow D \\ R(\mathcal{F}_\bullet) & \xrightarrow{\varphi} & R \end{array}$$

は可換図式である.

6 Young-Fibonacci 版指標環

この節では, 対称群の指標環 (表現環) の $\mathbb{YF}$ 類似を与える.

まず, 指標表の $\mathbb{YF}$ 類似を考えるために, $\mathbb{YF}$ 版べき和関数 $p_v \in R = \mathbb{Z}\langle X, Y \rangle$ を次のように帰納的に定義する:

$$p_\emptyset = 1, \quad p_{1v} = p_v X, \quad p_{2v} = p_v (X^2 - (m(v) + 2)Y).$$

ここで, $m(v)$ は v の先頭に続く 1 の個数である. このとき,

$$Uf = f \cdot X = f \cdot p_1 \quad (f \in R)$$

が成り立つ. さらに, 命題 2.5 の $\mathbb{YF}$ 類似が成り立つ.

命題 6.1. $v \in \mathbb{YF}$ に対して,

$$Up_v = p_{1v}, \quad Dp_{1v} = m(1v)p_v, \quad Dp_{2v} = 0.$$

また, R 上の双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\langle s_v, s_w \rangle = \delta_{v,w}$ によって定義すると,

$$\langle p_\alpha, p_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta} z_\alpha$$

ここで, $\alpha = 1^{m_1} 21^{m_2} 2 \dots 21^{m_r+1}$ のとき,

$$z_\alpha = m_1!(m_2+2)m_2! \cdots (m_{r+1}+2)m_{r+1}!.$$

$\mathbb{YF}$ 版 Schur 関数と $\mathbb{YF}$ 版べき和関数を用いて, $\chi_\alpha^v (v, \alpha \in \mathbb{YF}_n)$ を

$$p_\alpha = \sum_{v \in \mathbb{YF}_n} \chi_\alpha^v s_v$$

によって定義する. そして, これらを並べてできる行列 $X_n = (\chi_\alpha^v)_{\alpha, v \in \mathbb{YF}_n}$ を $\mathbb{YF}$ 指標表と呼ぶ.

例 6.2. $n = 5$ のときの $\mathbb{YF}$ 指標表は,

$$\begin{array}{cccccccc} & 221 & 212 & 2111 & 122 & 1211 & 1121 & 1112 & 11111 \\ \begin{array}{l} 221 \\ 212 \\ 2111 \\ 122 \\ 1211 \\ 1121 \\ 1112 \\ 11111 \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

となる. この「指標表」は有限群の指標表となりえないことに注意する.

この指標表は, 直交性など対称群の指標表と同様の性質をもっている.

命題 6.3. $\mathbb{YF}$ 指標表 X_n は次の直交関係をみたしている:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{YF}_n} \frac{1}{z_\alpha} \chi_\alpha^\lambda \chi_\alpha^\mu = \delta_{\lambda,\mu}, \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{YF}_n} \chi_\alpha^\lambda \chi_\beta^\lambda = \delta_{\alpha,\beta} z_\alpha.$$

さらに,

$$\frac{n!}{z_\alpha} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{YF}_n} \frac{n!}{z_\alpha} = n!.$$

命題 6.4. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $F(\sigma) \in \mathbb{YF}_n$ を次のように帰納的に定義する: $e \in \mathfrak{S}_0$ に対しては $F(e)\emptyset$, $e \in \mathfrak{S}_1$ に対しては $F(e) = 1$ とし,

$$F(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n) = \begin{cases} F(\sigma_2 \dots \sigma_n) 1 & (\sigma_1 < \sigma_2 \text{ のとき}), \\ F(\sigma_3 \dots \sigma_n) 2 & (\sigma_1 > \sigma_2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき、 $\alpha \in \mathbb{YF}_n$ に対して、

$$\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid F(\sigma) = \alpha\} = \frac{n!}{z_\alpha}.$$

$\mathbb{YF}$ 指標表を用いて、 $\mathbb{YF}$ 版 **Kronecker** 係数 $g_{u,v}^w$ を

$$g_{u,v}^w = \sum_{\alpha \in \mathbb{YF}_n} \frac{1}{z_\alpha} \chi_\alpha^u \chi_\alpha^v \chi_\alpha^w$$

とにおいて定義する．このとき、 R_n には $g_{u,v}^w$ を構造定数とする環構造が入る．より強く、複素化 $R_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ には、次の定義の意味での（代数的レベルでの）フュージョン代数の構造が入る．

定義 6.5. (Bannai [1]) $\mathcal{A}$ を可換な結合的 $\mathbb{C}$ 代数、 $a_1, \dots, a_r$ を $\mathcal{A}$ の基底とし、 $A_{i,j}^k$ ($i, j, k \in [r] = \{1, 2, \dots, r\}$) を

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^r A_{i,j}^k a_k$$

によって与えられる構造定数とする．次の 4 条件 (F1), (F2), (F3), (F4) をみたされるとき、 $\mathcal{A}$ は（基底 $(a_1, \dots, a_r)$ に関して）フュージョン代数 (fusion algebra) であるという．

(F1) 構造定数 $A_{i,j}^k$ は実数である．

(F2) 全単射 $[r] \ni i \mapsto \hat{i} \in [r]$ で、次の 3 条件をみたすものが存在する．

(a) $\hat{\hat{i}} = i$.

(b) $A_{i,j}^k = A_{\hat{i},\hat{j}}^{\hat{k}}$. つまり、 $\sigma(a_i) = a_{\hat{i}}$ ($1 \leq i \leq r$) によって与えられる線型写像 $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ は $\mathbb{C}$ 代数の自己同型写像である．

(c) $A_{i,j,k} = A_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}$ は i, j, k に関して対称である．

(F3) $A_{1,j}^k = \delta_{j,k}$. つまり、 a_1 は $\mathcal{A}$ の単位元である．

(F4) $\mathbb{C}$ 代数の準同型写像 $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ で $\Delta(a_i) \geq 0$ ($1 \leq i \leq r$) となるものが存在する．さらに、 $A_{i,j}^k, \Delta(a_i)$ がすべて非負整数であるとき、 $\mathcal{A}$ は整数性をもつ (integral) という．

また、 $(a_1, \dots, a_r)$ を基底とするフュージョン代数 $\mathcal{A}$ 、 $(b_1, \dots, b_s)$ を基底とするフュージョン代数 $\mathcal{B}$ とその間の $\mathbb{C}$ 代数の準同型写像 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して、次の 3 条件 (H1), (H2), (H3) がみたされるとき、 F はフュージョン代数の準同型写像であるという．

(H1) F の基底 $(a_1, \dots, a_r), (b_1, \dots, b_s)$ に関する表現行列は実数成分の行列である．

(H2) 上の条件 (F2) に現れる $\mathbb{C}$ 代数の自己同型写像 $\sigma_{\mathcal{A}}, \sigma_{\mathcal{B}}$ に対して、 $F \circ \sigma_{\mathcal{A}} = \sigma_{\mathcal{B}} \circ F$.

(H3) 上の条件 (F4) に現れる $\mathbb{C}$ 代数の準同型写像 $\Delta_{\mathcal{A}}, \Delta_{\mathcal{B}}$ に対して、 $\Delta_{\mathcal{B}} \circ F = \Delta_{\mathcal{A}}$. さらに、 F の表現行列の成分がすべて非負整数であるとき、 F は整数性をもつ (integral) という．

フュージョン代数の典型例は有限群の指標環である．

例 6.6. G を有限群とし、 $R_{\mathbb{C}}(G)$ を G の有限次元表現のなす圏の（複素化された）Grothendieck 群とする． $R_{\mathbb{C}}(G)$ は G 上の複素数値関数全体のなす線型空間と同一視できる．このとき、表現のテンソル積と既約表現の類（既約指標）からなる基底に関して、 $R_{\mathbb{C}}(G)$ は整数性をもつフュージョン代数となる．このとき、全単射 $i \mapsto \hat{i}$ は既約表

現の双対表現（既約指標の複素共役）で与えられ、準同型写像 Δ は $\Delta([V]) = \dim V$ で与えられる。また、構造定数は既約指標を用いて

$$A_{\chi, \eta}^{\zeta} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi(g) \eta(g) \zeta(g^{-1})$$

で与えられる。

さらに、 G の部分群 H に対して、制限写像

$$\text{Res}_H^G : R_{\mathbb{C}}(G) \rightarrow R_{\mathbb{C}}(H)$$

はフュージョン代数の整数性をもつ準同型写像である。

この節の主定理は、次である。

定理 6.7. 非可換 2 変数多項式環 $R = \mathbb{Z}\langle X, Y \rangle$ ($\deg X = 1, \deg Y = 2$) の n 次斉次成分 R_n の複素化 $R_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ には、次のデータに関して整数性をもつフュージョン代数の構造が入る：

- 基底 $\{s_v\}_{v \in \mathbb{YF}_n}$;
- 積構造 $s_u * s_v = \sum_{w \in \mathbb{YF}_n} g_{u,v}^w s_w$;
- 環準同型写像 $\Delta(s_v) = e(v)$.

特に、 $\mathbb{YF}$ 版 Kronecker 係数 $g_{u,v}^w$ は非負整数である。また、 $D : R_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow R_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ はフュージョン代数の整数性をもつ全射準同型写像である。

この定理は、次の一般的なフュージョン代数の reflection-extension を繰り返すことによって得られる。

定理 6.8. 基底 $(a_1, \dots, a_r)$ に関するフュージョン代数 $\mathcal{A}$, 基底 $(b_1, \dots, b_s)$ に関するフュージョン代数 $\mathcal{B}$ とフュージョン代数の全射準同型写像 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が与えられたとする。このとき、線型空間としての直和

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$$

には、

$$\begin{aligned} (a, 0) \cdot (a', 0) &= (aa', 0), \\ (a, 0) \cdot (0, b) &= (0, F(a)b), \\ (0, b) \cdot (0, b') &= (F^*(bb'), (FF^* - I)(bb')) \end{aligned}$$

を積とするフュージョン代数の構造が入る。ここで、 $F(a_j) = \sum_{i=1}^s F_{i,j} b_i$ のとき、 $F^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ は $F^*(b_i) = \sum_{j=1}^r F_{i,j} a_j$ によって与えられる線型写像である。さらに、

$$G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}, \quad G(a, b) = a + F^*(b)$$

はフュージョン代数の全射準同型写像である。

本稿では、Schur 関数、べき和対称関数の $\mathbb{YF}$ 版を導入し、 $\mathbb{YF}$ 版指標表を定義することによって、 $\mathbb{YF}$ 版指標環をフュージョン代数として定義した。しかし、第 4 節で導入した Young–Fibonacci 代数との関係はいまだ謎である。

問題 6.9. 定理 6.7 で与えた R_n 上の積構造と Young–Fibonacci 代数 $\mathcal{F}_n$ の関係を明らかにせよ。

参考文献

- [1] E. Bannai, Association schemes and fusion algebras (an introduction), *J. Algebraic Combin.* **2** (1993), 327–344.
- [2] P. Byrnes, Structural aspects of differential posets, Dissertation, University of Minnesota, 2012.
- [3] S. V. Fomin, The generalized Robinson–Schensted–Knuth correspondence, *J. Soviet Math.* **41** (1988), 979–991.
- [4] S. Fomin, Duality of graded graphs, *J. Algebraic Combin.* **3** (1994), 357–404.
- [5] S. Fomin, Schensted algorithms for dual graded graphs, *J. Algebraic Combin.* **4** (1995), 5–45.
- [6] C. Gaetz, Dual graded graphs and Bratteli diagrams of towers of groups, *Electron. J. Combin.* **26** (2019), Paper No. 1.25, 12 pp.
- [7] T. Halverson and A. Ram, Characters of algebras containing a Jones basic construction: the Temperley–Lieb, Okada, Brauer, and Birman–Wenzl algebras, *Adv. Math.* **116** (1995), 263–321.
- [8] F. Hivert and J. Scott, Diagram model for the Okada algebra and monoid, *Sém. Lothar. Combin.* **91B** (2024), Art. 25, 12 pp.
- [9] F. M. Goodman and S. V. Kerov, The Martin boundary of the Young–Fibonacci lattice, *J. Algebraic Combin.* **11** (2000), 17–48.
- [10] L. Petrov and J. Scott, Random Fibonacci words via clone Schur functions, *arXiv:2412.21126*.
- [11] S. Okada, Algebras associated to the Young–Fibonacci lattice, *Trans. Amer. Math. Soc.* **346** (1994), 549–568.
- [12] 岡田 聡一, 古典群の表現論と組合せ論 (下), 培風館, 2006.
- [13] B. E. Sagan, The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Second Edition, *Grad. Texts in Math.* **203**, Springer-Verlag, 2001.
- [14] R. P. Stanley, Differential posets, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 919–961.