実 Grothendieck 群における M-TF 同値

浅井　聡太　（東京大学数理科学研究科）

Sota Asai (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

本稿は、2024 年 10 月に開催された、RIMS 共同研究（公開型）「組合せ論的表現論の発展」における、私の講演の報告である。この講演は、伊山修氏との共同研究 [AsI] に基づいている[*1]。

本稿を通して、$\mathcal{A}$ を長さ有限なアーベル圏で、さらに、単純対象の同型類が有限個であると仮定する。$\mathcal{A}$ の非同型な単純対象の全体を、$S_1, S_2, \dots, S_n$ で表す。また、$K_0(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の Grothendieck 群とおく。このとき、単純対象たちが与える元 $[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$ は、$K_0(\mathcal{A})$ の自由アーベル群としての基底となり、すなわち、$K_0(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[S_i]$ である。よって、実 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{A})_\mathbb{R} := K_0(\mathcal{A}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ は、$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}[S_i]$ に等しく、$[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$ を標準基底とする Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ と見ることができる。

ただし、タイトルにある「実 Grothendieck 群」とは、$K_0(\mathcal{A})_\mathbb{R}$ そのものではなく、その双対空間 $K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R} := \mathsf{Hom}_\mathbb{R}(K_0(\mathcal{A}), \mathbb{R})$ のことであり、本稿ではこちらに主に着目する。$[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$ の双対基底 $[S_1]^*, [S_2]^*, \dots, [S_n]^*$ をとり、これを $K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ の標準基底と同一視する。

各元 $\theta \colon K_0(\mathcal{A})_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、定義から、$\mathbb{R}$ 線型写像 $K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ であるから、特に、各対象 $M \in \mathcal{A}$ に対して、実数 $\theta([M]) \in \mathbb{R}$ が定まる。これを単に $\theta(M)$ と略記する。すると、次のように、$\mathcal{A}$ の部分圏を定めることができる。

定義 1　$\theta \in K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R}$ とする。

(1) [BKT, Subsection 3.1] θ に付随する、$\mathcal{A}$ の 2 つの**半安定ねじれ対** (semistable torsion pair) $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta), (\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$ を、

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{T}}_\theta &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の商対象 } N \text{ に対し } \theta(N) \geq 0\}, \\
\mathcal{T}_\theta &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の商対象 } N \neq 0 \text{ に対し } \theta(N) > 0\}, \\
\overline{\mathcal{F}}_\theta &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の部分対象 } L \text{ に対し } \theta(L) \leq 0\}, \\
\mathcal{F}_\theta &:= \{M \in \mathcal{A} \mid M \text{ の任意の部分対象 } L \neq 0 \text{ に対し } \theta(L) < 0\}
\end{aligned}$$

で定める。

(2) [Kin, Definition 1.1] θ **半安定部分圏** (semistable subcategory) $\mathcal{W}_\theta \subset \mathcal{A}$ を、

$$\mathcal{W}_\theta := \overline{\mathcal{T}}_\theta \cap \overline{\mathcal{F}}_\theta$$

で定める。

[*1] JSPS 科研費 JP23K12957, JP23K22384 の助成を受けた。

定義より、$\mathcal{T}_\theta \subset \overline{\mathcal{T}}_\theta$ が成立しており、これらは $\mathcal{A}$ の**ねじれ類** (torsion class) である。すなわち、$\mathcal{A}$ での商対象と拡大について閉じた部分圏である。また、$\mathcal{F}_\theta \subset \overline{\mathcal{F}}_\theta$ は、$\mathcal{A}$ の**ねじれ自由類** (torsion-free class) であり、$\mathcal{A}$ での部分対象と拡大について閉じている。すると、$(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$ は、大きなねじれ類と小さなねじれ自由類を、$(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$ は、小さなねじれ類と大きなねじれ自由類を、組み合わせたものといえる。

これら 2 つのねじれ対の違いを表す部分圏が、$\mathcal{W}_\theta$ である。$\mathcal{W}_\theta$ は、$\mathcal{A}$ の**広大部分圏** (wide subcategory)、すなわち、核・余核・拡大について閉じた部分圏であり、$\mathcal{A}$ が長さ有限なアーベル圏であるから、$\mathcal{W}_\theta$ もそうである。ただし、$\mathcal{W}_\theta$ は単純対象の同型類を無限個もつことがあり、$K_0(\mathcal{W}_\theta)_\mathbb{R}$ などを本稿で考えることはない。

なお、歴史的には、$\mathcal{W}_\theta$ のほうが 20 年程度早く導入されていることを、お断りしておく。

上記で導入した部分圏を用いて、次の概念を定義することができる。

定義 2　$K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R}$ において、以下を定める。

(1) [Asa, Definition 2.13] $\theta, \eta \in K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R}$ について、θ と η が **TF 同値** (TF equivalent) であるとは、$(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta) = (\overline{\mathcal{T}}_\eta, \mathcal{F}_\eta)$ かつ $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta) = (\mathcal{T}_\eta, \overline{\mathcal{F}}_\eta)$ が成立することと定める。

(2) [BST, Definition 3.2][Bri, Definition 6.1] $K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R}$ の**壁部屋構造** (wall-chamber structure) を、
   - 各 $M \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ ごとに定まる図形 $\Theta_M := \{\theta \in K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R} \mid M \in \mathcal{W}_\theta\}$ を**壁** (wall)、
   - すべての壁たちの和集合を考え、その閉包の補集合 $K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R} \setminus \overline{\bigcup_{M \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} \Theta_M}$ の連結成分を**部屋** (chamber)

   として定める。

容易にわかるが重要な性質として、$\Theta_{M_1 \oplus M_2} = \Theta_{M_1} \cap \Theta_{M_2}$ がある。よって、直既約加群に付随する壁のみを考えても、壁部屋構造を調べる上では十分である。

M を直既約加群とした場合でも、壁 Θ_M の次元は M により様々に変化するが、[Asa, Proposition 2.8] にあるように、どのような $M \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ についても、ある煉瓦 $S \in \mathcal{A}$ で、$\Theta_M \subset \Theta_S$ かつ Θ_S は $n-1$ 次元となるものが存在する[*2]。ここで、$S \in \mathcal{A}$ が**煉瓦** (brick) であるとは、$S \neq 0$ であって、任意の自己準同型 $f\colon S \to S$ が同型か 0 であることを指す。よって、煉瓦に付随する壁のうち、$n-1$ 次元のものがすべてわかれば、壁部屋構造は事実上決定される。

TF 同値と壁部屋構造の関係は、2 点 θ, η を結ぶ線分 $[\theta, \eta]$ を用いると、以下のように記述できる。

命題 3　[Asa, Theorem 2.17] 異なる元 $\theta \neq \eta \in K_0(\mathcal{A})^*_\mathbb{R}$ に対して、以下は同値である。

[*2] S が煉瓦でも Θ_S は $n-1$ 次元とは限らないし、Θ_M が $n-1$ 次元でも M は煉瓦とは限らない。

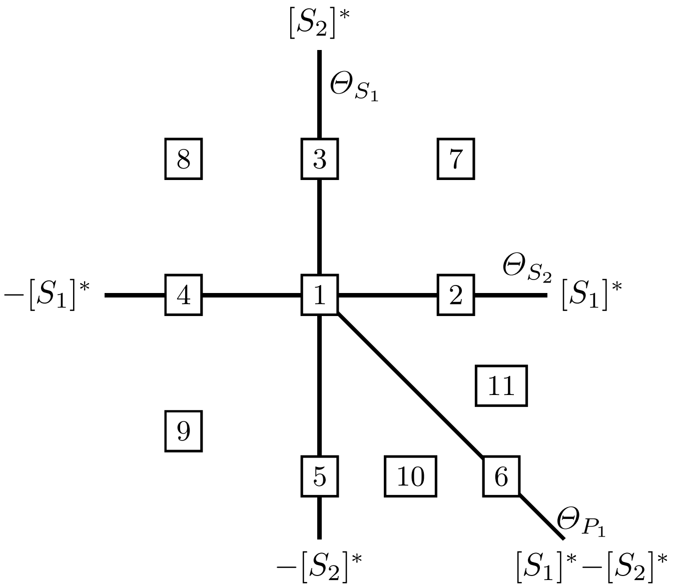
(a) θ と η は TF 同値である。

(b) 線分 $[\theta, \eta]$ は、いかなる壁 Θ_M とも一点のみで交わることはない。

この命題について、簡単な例を挙げる。

例 4 Λ を箙 $1 \to 2$ の道多元環 $K(1 \to 2)$ とし、$\mathcal{A}$ を有限生成右 Λ 加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ とする。$\mathsf{mod}\,\Lambda$ の単純対象は、箙の頂点 $1, 2$ に対応する単純 Λ 加群 S_1, S_2 である。よって、$K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ は、$[S_1]^*, [S_2]^*$ を標準基底とする 2 次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ となる。

$\mathcal{A}$ の直既約対象は、S_1, S_2 と直既約射影加群 P_1 の 3 つである。これらはいずれも煉瓦であり、非分裂な短完全列 $0 \to S_2 \to P_1 \to S_1 \to 0$ を与える。これに基づき、TF 同値類（下図 $\boxed{1}$–$\boxed{11}$ の全 11 個）と壁部屋構造（極大な壁は $\Theta_{S_2}, \Theta_{P_1}, \Theta_{S_1}$ の全 3 個）を図示すると、以下のようになる。



各 TF 同値類に属す θ について、$\mathcal{T}_\theta, \mathcal{W}_\theta, \mathcal{F}_\theta$ を書くと、以下のようになる。ここで、$\mathsf{add}\,M$ は、M の直和因子の直和で書ける加群全体がなす部分圏を表す。

TF 同値類	$\mathcal{T}_\theta$	$\mathcal{W}_\theta$	$\mathcal{F}_\theta$
$\boxed{1}$	$\{0\}$	$\mathsf{mod}\,\Lambda$	$\{0\}$
$\boxed{2}$	$\mathsf{add}(P_1 \oplus S_1)$	$\mathsf{add}\,S_2$	$\{0\}$
$\boxed{3}$	$\mathsf{add}\,S_2$	$\mathsf{add}\,S_1$	$\{0\}$
$\boxed{4}$	$\{0\}$	$\mathsf{add}\,S_2$	$\mathsf{add}\,S_1$
$\boxed{5}$	$\{0\}$	$\mathsf{add}\,S_1$	$\mathsf{add}(S_2 \oplus P_1)$
$\boxed{6}$	$\mathsf{add}\,S_1$	$\mathsf{add}\,P_1$	$\mathsf{add}\,S_2$
$\boxed{7}$	$\mathsf{mod}\,\Lambda$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\boxed{8}$	$\mathsf{add}\,S_2$	$\{0\}$	$\mathsf{add}\,S_1$
$\boxed{9}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\mathsf{mod}\,\Lambda$
$\boxed{10}$	$\mathsf{add}\,S_1$	$\{0\}$	$\mathsf{add}(S_2 \oplus P_1)$
$\boxed{11}$	$\mathsf{add}(P_1 \oplus S_1)$	$\{0\}$	$\mathsf{add}\,S_2$

一般に、Λ を体 K 上の有限次元多元環とし、$\mathcal{A}$ を有限生成右 Λ 加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ とするとき、今回扱っている $K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}} = K_0(\mathsf{mod}\,\Lambda)^*_{\mathbb{R}}$ は、有限生成右 Λ 加群の圏の実 Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{proj}\,\Lambda)_{\mathbb{R}}$ と、同一視できる[*3]。この場合、複体のホモトピー圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,\Lambda)$ の 2 項（前）準傾複体から、$K_0(\mathsf{proj}\,\Lambda)_{\mathbb{R}}$ の TF 同値類を構成でき、以下が成立する。

命題 5　Λ を体 K 上の有限次元多元環とする。

(1) [Asa, Proposition 3.11] （[Yur, Proposition 3.3], [BST, Proposition 3.27] も参照）Basic な 2 項前準傾複体の同型類全体の集合から、TF 同値類全体の集合への単射が、$U = \bigoplus_{i=1}^m U_i$（各 U_i は直既約）を、$C^\circ(U) := \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{>0}[U_i]$ に写すことで得られる。

(2) [Asa, Theorem 4.7] (1) が全単射であることは、2 項前準傾複体が有限個のみ存在することと同値である[*4]。

(3) [Asa, Theorem 3.17] (1) を制限することで、basic な 2 項準傾複体の同型類全体の集合から、フル次元の TF 同値類全体の集合への全単射が得られる。また、フル次元の TF 同値類は、$K_0(\mathsf{proj}\,\Lambda)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造における部屋に一致する。

2 項前準傾複体が無限個存在する場合は、TF 同値類の構造は複雑になりがちである。そこで、TF 同値を色々な加群 M を用いて、体系的に様々な形で粗くすることで、少しずつ TF 同値類を調べようというのが、これから解説する M-TF 同値の発端となった考え方である。ただし、M-TF 同値の定義そのものには、2 項（前）準傾複体は一切不要である。

[*3] 各単純加群 S_i の射影被覆を P_i とすると、$K_0(\mathsf{proj}\,\Lambda)_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}[P_i] \simeq \mathbb{R}^n$ となり、各 $[P_i]$ を $d_i[S_i]^* \in K_0(\mathsf{mod}\,\Lambda)^*_{\mathbb{R}}$ ($d_i := \dim_K \mathsf{End}_\Lambda(S_i)$) に写すことで、同一視を行う。有限次元多元環 Λ が道多元環の商であれば、必ず $d_i = 1$ である。

[*4] [DIJ, Theorem 4.2] より、煉瓦が有限個であることとも同値である。

M-TF 同値を定義するために必要となるのは、次のものである。

定義 6 $M \in \mathcal{A}$ かつ $\theta \in K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ とする。

(1) ねじれ対 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$ と $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$ により、短完全列

$$0 \to \bar{\mathrm{t}}_\theta M \to M \to \mathrm{f}_\theta M \to 0 \quad (\bar{\mathrm{t}}_\theta M \in \overline{\mathcal{T}}_\theta,\ \mathrm{f}_\theta M \in \mathcal{F}_\theta),$$
$$0 \to \mathrm{t}_\theta M \to M \to \bar{\mathrm{f}}_\theta M \to 0 \quad (\mathrm{t}_\theta M \in \mathcal{T}_\theta,\ \bar{\mathrm{f}}_\theta M \in \overline{\mathcal{F}}_\theta)$$

をとり、$\bar{\mathrm{t}}_\theta M, \mathrm{t}_\theta M$ を M の部分対象、$\mathrm{f}_\theta M, \bar{\mathrm{f}}_\theta M$ を M の商対象とみる。

(2) M の部分対象として、$\mathrm{t}_\theta M \subset \bar{\mathrm{t}}_\theta M$ であるから、$\mathrm{w}_\theta M := \bar{\mathrm{t}}_\theta M / \mathrm{t}_\theta M$ とおく。すると、$\mathrm{w}_\theta M \in \mathcal{W}_\theta$ となることから、$\mathsf{supp}_\theta(\mathrm{w}_\theta M)$ で、$\mathrm{w}_\theta M$ の $\mathcal{W}_\theta$ における組成因子の同型類全体の集合を表す。

定義 7 [AsI, Definition 3.1] $M \in \mathcal{A}$ とする。このとき、$\theta, \eta \in K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ が **M-TF 同値** (M-TF equivalent) であるとは、以下の (a), (b) を満たすことをいう。

(a) $(\bar{\mathrm{t}}_\theta M, \mathrm{f}_\theta M) = (\bar{\mathrm{t}}_\eta M, \mathrm{f}_\eta M)$ かつ $(\mathrm{t}_\theta M, \bar{\mathrm{f}}_\theta M) = (\mathrm{t}_\eta M, \bar{\mathrm{f}}_\eta M)$ である。

(b) $\mathsf{supp}_\theta(\mathrm{w}_\theta M) = \mathsf{supp}_\eta(\mathrm{w}_\eta M)$ である。

$\mathsf{TF}(M)$ で M-TF 同値類すべての集合を表し、$\Sigma(M)$ で M-TF 同値類の閉包すべての集合 $\{\overline{E} \mid E \in \mathsf{TF}(M)\}$ を表す。

ここで、条件 (a) は、$(\mathrm{t}_\theta M, \mathrm{w}_\theta M, \mathrm{f}_\theta M) = (\mathrm{t}_\eta M, \mathrm{w}_\eta M, \mathrm{f}_\eta M)$ とも同値である。よって、(a) のもとでは、条件 (b) は、$Z := \mathrm{w}_\theta M = \mathrm{w}_\eta M$ という同一の対象について、$\mathcal{W}_\theta$ での Z の組成列は $\mathcal{W}_\eta$ での Z の組成列でもあり、逆もそうである、という読み方もできる。条件 (b) では、組成因子の重複度は直接は考慮していないが、θ と η が TF 同値であれば、Z の $\mathcal{W}_\theta$ における組成因子と Z の $\mathcal{W}_\eta$ における組成因子は、重複度も込めて一致する。

注意 8 [AsI, Remark 3.3] $M = M_1 \oplus M_2$ であるときは、M-TF 同値であることは、M_1-TF 同値かつ M_2-TF 同値であることと同値である。特に、$\mathcal{A}$ に煉瓦の同型類が有限個しか存在しないときは、$M \in \mathcal{A}$ を非同型な煉瓦すべての直和とすると、M-TF 同値と TF 同値は、完全に一致する。

$\Sigma(M)$ の基本性質は以下の通りである。有理多面錐 σ に対し、$\mathsf{Face}\,\sigma$ で σ の空でない面全体の集合を表し、σ° で σ の相対的内部[*5]を表す。

命題 9 [AsI, Theorem 3.2] $M \in \mathcal{A}$ とする。

[*5] ここでは、σ が張る部分線型空間での σ の内部のことである。

(1) 全単射 $\mathsf{TF}(M) \to \Sigma(M)$ が、$E \in \mathsf{TF}(M)$ に閉包 $\overline{E} \in \Sigma(M)$ を対応させることで得られる。逆写像は、$\sigma \in \Sigma(M)$ の相対的内部 $\sigma^\circ \in \mathsf{TF}(M)$ をとることで得られる。

(2) $\Sigma(M)$ は $K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ の完備な有理多面扇である。すなわち、以下が成立する。

- 各 $\sigma \in \Sigma(M)$ は $K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ の有理多面錐である。
- 各 $\sigma \in \Sigma(M)$ に対し、$\mathsf{Face}\,\sigma \subset \Sigma(M)$ である。
- 各 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(M)$ について、$\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathsf{Face}\,\sigma_1 \cap \mathsf{Face}\,\sigma_2$ である。
- $\sigma \in \Sigma(M)$ たちの和集合は、$K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ 全体である。

(3) 各 $\sigma \in \Sigma(M)$ について、面の相対的内部への分解 $\sigma = \bigsqcup_{\tau \in \mathsf{Face}\,\sigma} \tau^\circ$ は、M-TF 同値類への分解でもある。

この $\Sigma(M)$ は、次の意味で、壁 Θ_M の拡張にもなっている。

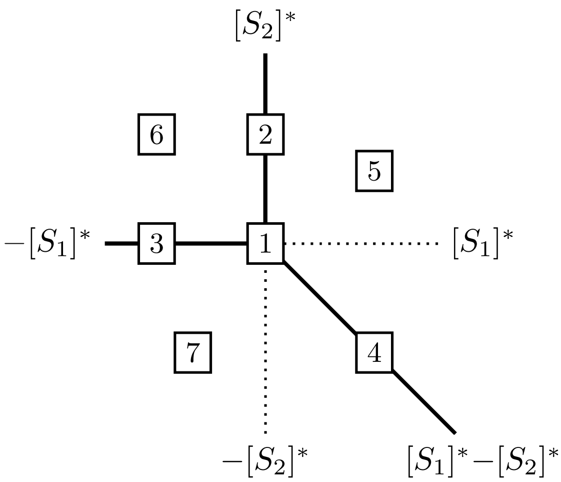
命題 10 [AsI, Example 3.4] $M \in \mathcal{A}$ とする。

(1) $\mathsf{Face}\,\Theta_M \subset \Theta_M$ である。すなわち、壁 Θ_M の任意の面 σ は $\Sigma(M)$ の元であり、その相対的内部 σ° は $\mathsf{TF}(M)$ の元である。

(2) Θ_M は $\Sigma(M)$ の部分扇である。

M-TF 同値の簡単な例を挙げる。

例 11 例 4 の設定のもとで、$M = P_1$ のときの M-TF 同値類は、以下の 7 つである。



各 M-TF 同値類に属す θ について、$\mathrm{t}_\theta M, \mathrm{w}_\theta M, \mathrm{f}_\theta M$ と $\mathsf{supp}_\theta(\mathrm{w}_\theta M)$ を書くと、以下のようになる。

M-TF 同値類	$\mathrm{t}_\theta M$	$\mathrm{w}_\theta M$	$\mathrm{f}_\theta M$	$\mathsf{supp}_\theta(\mathrm{w}_\theta M)$
$\boxed{1}$	0	M	0	$\{S_2, S_1\}$
$\boxed{2}$	S_2	S_1	0	$\{S_1\}$
$\boxed{3}$	0	S_2	S_1	$\{S_2\}$
$\boxed{4}$	0	M	0	$\{M\}$
$\boxed{5}$	M	0	0	$\emptyset$
$\boxed{6}$	S_2	0	S_1	$\emptyset$
$\boxed{7}$	0	0	M	$\emptyset$

ここで、$\boxed{1}$ と $\boxed{4}$ は、$\mathsf{supp}_\theta(\mathrm{w}_\theta M)$ のみの違いで分けられていることに注意せよ。どちらでも $\mathrm{w}_\theta M = M$ であるが、$\boxed{1}$ においては $\mathcal{W}_\theta = \mathsf{mod}\,\Lambda$ であるのに対し、$\boxed{4}$ においては $\mathcal{W}_\theta = \mathsf{add}\,M$ であるため、$\mathsf{supp}_\theta(\mathrm{w}_\theta M)$ に違いが生じ、定義 7 での条件 (b) より、これらは異なる M-TF 同値類である。

M-TF 同値類の閉包 $\Sigma(M)$ が有理多面扇であるのは、この条件 (b) のおかげである。実際、定義 7 での条件 (a) のみで、$K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ での同値関係を作ってしまうと、$\boxed{1}$ と $\boxed{4}$ は統合されて一つの同値類となってしまう。条件 (a) のみによる同値類たちの閉包全体の集合を $\Sigma'(M)$ とすると、$\Sigma'(M) = \Sigma(M) \setminus \{\boxed{1}\}$ となる。特に、$\boxed{1} \cup \boxed{4}$ は $\Sigma'(M)$ の元であるが、その面である $\boxed{1}$ は $\Sigma'(M)$ の元ではない。よって、$\Sigma'(M)$ は有理多面扇でない。

命題 9 の証明は、以下で定まる Newton 多面体との関連により行った。

定義 12 [BKT, Subsection 1.3] [Fei1, Definition 2.3] $M \in \mathcal{A}$ とする。M の **Newton 多面体 (Newton polytope)** とは、$K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}$ における多面体

$$\mathrm{N}(M) := \mathsf{conv}\{[L] \mid L \text{ は } M \text{ の部分対象 }\}$$

である。ここで、conv は凸包を表す。

$\mathrm{N}(M)$ は、今回の主役である $K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ ではなく、あくまでも $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}$ 内の図形である。また、$\mathrm{N}(M)$ は多面錐ではなく多面体であり、特に有界閉集合である。よって、$\theta \in K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}}$ に対して、$\mathrm{N}(M)$ での θ の最大値 $\max \theta(\mathrm{N}(M))$ が定まる。

私たちの研究での主結果は、次のものであり、命題 9 もそこからわかる。多面体 X についても、$\mathsf{Face}\,X$ で X の空でない面全体の集合を表し、X° で X の相対的内部[*6]を表す。双対扇については、[AHIKM, BKT, Fei2] などを参照されたい。

定理 13 [AsI, Theorem 3.15] $M \in \mathcal{A}$ とする。このとき、$\Sigma(M)$ は多面体 $\mathrm{N}(M)$ の双対

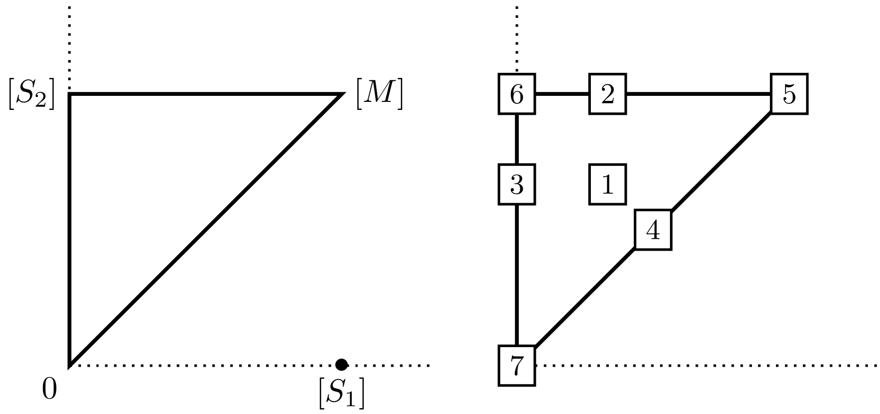
[*6] この場合は、X が張る部分アフィン空間での X の内部のことである。

扇である。すなわち、互いに逆写像である全単射

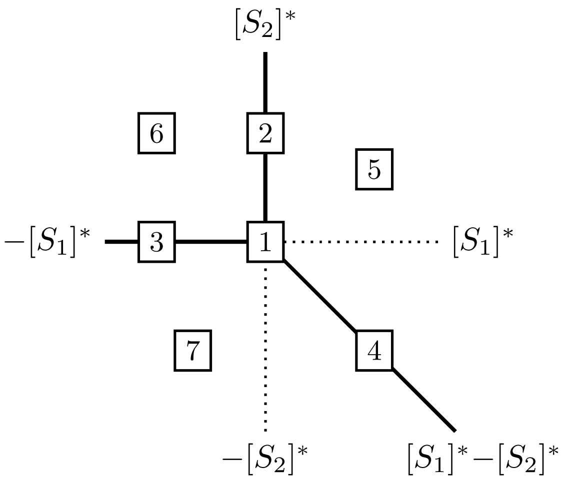
$$
\begin{gathered}
\mathsf{Face}\,\mathrm{N}(M) \rightleftarrows \Sigma(M), \\
\qquad\qquad\qquad F \mapsto \{\theta \in K_0(\mathcal{A})^*_{\mathbb{R}} \mid \theta(v) = \max\theta(\mathrm{N}(M))\}, \\
\{v \in \mathrm{N}(M) \mid \theta(v) = \max\theta(\mathrm{N}(M))\} \mapsfrom \sigma \qquad\qquad\qquad
\end{gathered}
$$

が存在する。ここで、$\mathsf{Face}\,\mathrm{N}(M) \to \Sigma(M)$ の定義では、$v \in F^\circ$ をとっており、$\Sigma(M) \to \mathsf{Face}\,\mathrm{N}(M)$ の定義では、$\theta \in \sigma^\circ$ をとっている。

例 14　例 11 の場合、$M = P_1$ の部分対象は $0, S_2, M$ であるから、$\mathrm{N}(M)$ は、$K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}$ における、下の左図の直角三角形となる。よって、$\mathsf{Face}\,\mathrm{N}(M)$ は、下の右図にある $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの 7 つの元をもつ。



一方、例 11 で見たとおり、下が $\Sigma(M)$ の図である。そして、同じ番号のついた $\mathsf{Face}\,\mathrm{N}(M)$ の元と $\Sigma(M)$ の元どうしが対応している。



参考文献

[AHIKM] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory I: Foundations*, arXiv:2203.15213v4.

[Asa] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, Adv. Math, **381** (2021), 107615.

[AsI] S. Asai, O. Iyama, *M-TF equivalences in the real Grothendieck groups*, arXiv:2404.13232v1.

[BKT] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **120** (2014), 113–205.

[Bri] T. Bridgeland, *Scattering diagrams, Hall algebras and stability conditions*, Algebr. Geom., **4**, no. 5 (2017), 523–561.

[BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and Chamber Structure for finite-dimensional Algebras*, Adv. Math, **354** (2019), 106746.

[DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, *τ-tilting finite algebras, bricks, and g-vectors*, Int. Math. Res. Not., IMRN 2019, Issue 3, 852–892.

[Fei1] J. Fei, *Combinatorics of F-polynomials*, Int. Math. Res. Not., IMRN 2023, Issue 9, 7578–7615.

[Fei2] J. Fei, *Tropical F-polynomials and general presentations*, J. Lond. Math. Soc. (2), **107**, Issue 6 (2023), 2079–2120.

[Kin] A. D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **45**, no. 180 (1994), 515–530.

[Yur] T. Yurikusa, *Wide Subcategories are Semistable*, Doc. Math., **23** (2018), 35–47.