AII 型 $\imath$ 量子群に対する分岐則の内藤・佐垣予想への応用

東京科学大学　鈴木祐仁
YUJIN SUZUKI
INSTITUTE OF SCIENCE TOKYO

1. 概要

2024 年 10 月の RIMS 研究集会「組合せ論的表現論の発展」に於ける筆者の講演内容を報告させていただく．詳細はプレプリント [NSW25](内藤聡先生, 渡邉英也先生との共同研究) を参照されたい．

[NSW25] で我々は [NS05] に於いて予想された分岐則 (以下, 内藤・佐垣予想) に対する別証明を与えた．内藤・佐垣予想とは, A_{2n-1} 型複素単純 Lie 環に C_n 型複素単純 Lie 環を folding で埋め込んだ際に, 既約表現の分岐則がある条件を満たす有理パスの数え上げに帰着されることを主張するものである．この予想は [L94] で示された Levi 型部分環への分岐則の非 Levi 型類似であり, [ST18] で既に証明が与えられている．[ST18] に於ける証明は [Sun90] の分岐則に帰着させる純粋に組合せ論的手法によるものであったが, 今回我々が得た証明は AII_{2n-1} 型 $\imath$ 量子群に対する分岐則 [W23+] を経由するものである．$\imath$ 量子群は対称対を量子化することで生じる量子展開環の余イデアル部分代数であり, 定義から量子群への自然な埋め込みを持つ．近年, この見方を推し進めることによって, 様々な型の $\imath$ 量子群に対する分岐則が得られることが報告されている [W23, W23+]. $\imath$ 量子群の型を取り換えて今回と同様の手法を適用することで, 内藤・佐垣予想の variant が得られることが期待される．

2. 内藤・佐垣予想

2.1. パス模型による Levi 型部分環への分岐則. $\mathfrak{g}$ を階数 r の複素一般線形 Lie 環, $X = \bigoplus_{i=1}^{r+1} \mathbb{Z}\varepsilon_i$ をそのウェイト格子, I を A_r 型 Dynkin 図形の頂点集合とする．最高ウェイト $\lambda \in P$ の既約加群 $L(\lambda)$ への $\mathfrak{g}$ の作用を, $\mathfrak{g}$ の部分環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ へ制限することを考える．$L(\lambda)\downarrow^{\mathfrak{g}}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ の $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群としての既約分解の記述は, Lie 理論に於ける非常に基本的な問題である．$\widehat{\mathfrak{g}}$ が Levi 型部分環の場合は, Littelmann によるパス模型を用いた手法が良く知られている．

以下, Littelmann の理論について簡単に振り返りたい．$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}}_J$ を $J \subset I$ に付随する Levi 型部分環とする．また, $\mathfrak{g}$, $\widehat{\mathfrak{g}}_J$ の Cartan 部分環をそれぞれ $\mathfrak{h}$, $\widehat{\mathfrak{h}}_J$ とし, 連続区分線形写像 $\pi : [0,1] \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X$ であって, $\pi(0) = 0$, $\pi(1) \in X$ を満たすもの全体を $\mathbb{B}$ で表す．このパス全体の集合 $\mathbb{B}$ 上には, 各 $i \in I$ 毎に Chevalley 生成元の作用に由来する作用素 (ルート作用素) $e_i, f_i : \mathbb{B} \sqcup \{\theta\} \to \mathbb{B} \sqcup \{\theta\}$ が定義される (θ は formal symbol)．今, 0, $\lambda \in X$ を一直線に線分で結ぶパス $\pi_\lambda \in \mathbb{B}$ にルート作用素を次々に作用させ, 得られるパスの全体を $\mathbb{B}_{\mathrm{LS}}(\lambda) \subset \mathbb{B}$ とする．柏原による結晶基底の理論に動機付けられ, Littelmann はこの $\mathfrak{g}$ の「作用」付きの集合 $\mathbb{B}_{\mathrm{LS}}(\lambda)$ が $L(\lambda)$ の構造と深く関係することを発見し, パス模型の理論を構築した．この理論によれば, $L(\lambda)\downarrow^{\mathfrak{g}}_{\widehat{\mathfrak{g}}_J}$ に於ける最高ウェイト μ の既約 $\widehat{\mathfrak{g}}_J$-加群 $\widehat{L}_J(\mu)$ の重複度 $m^J_{\lambda,\mu}$ は次で与えられる．

定理 2.1 ([L94, Branching rule])**.**

$$m^J_{\lambda,\mu} = \sharp\left\{\pi \in \mathbb{B}_{\mathrm{LS}}(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{l}\langle \pi(t), \widehat{h}_j\rangle \geq 0 \text{ for all } j \in J,\ t \in [0,1], \\ \pi(1)|_{\widehat{\mathfrak{h}}_J} = \mu\end{array}\right\}. \tag{2.1}$$

ここで, $\widehat{h}_j$, $j \in J$ は $\widehat{\mathfrak{g}}_J$ の単純余ルート.

(2.1) の非 Levi 型類似にあたるのが, 次に解説する内藤・佐垣予想である.

2.2. **内藤・佐垣予想.** 以下では専ら $\mathfrak{g}$ の階数が奇数 $r = 2n-1$, $n \geq 2$ で, $\langle \lambda, d_{2n}\rangle \geq 0$ である場合を扱う. ここで, $d_{2n} \in \mathfrak{h}$ は $(2n, 2n)$-成分のみが 1 の行列単位である. また, $\widehat{\mathfrak{g}}$ として Levi 型部分環の代わりに, Dynkin 図形 I の非自明なグラフ自己同型 $\sigma : I \to I$ による固定部分代数 $\widehat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}^\sigma$ を取る. $\widehat{\mathfrak{g}}$ は C_n 型複素単純 Lie 環である. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分環を $\widehat{\mathfrak{h}}$, Dynkin 図形の頂点集合を $\widehat{I} := \langle \sigma \rangle \setminus I$ とする. 以上の設定の下, $L(\lambda)\downarrow^{\mathfrak{g}}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ に於ける最高ウェイト μ の既約 $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群 $\widehat{L}(\mu)$ の重複度 $m_{\lambda,\mu}$ について, (2.1) に相当する公式を与えたい. $\widehat{\mathfrak{g}}$ が Levi 型の場合はパス模型として straight line π_λ を含む連結成分 $\mathbb{B}_{\mathrm{LS}}(\lambda)$ を採用したが, ここでは次で定義されるパス π'_λ を含む連結成分 $\mathbb{B}_{\mathrm{YT}}(\lambda)$ を考える:

$$\begin{aligned}\pi'_\lambda := \overbrace{\varepsilon_1 * \cdots * \varepsilon_1}^{\langle \lambda, h_1\rangle \text{ 個}} * \overbrace{(\varepsilon_1 * \varepsilon_2) * \cdots * (\varepsilon_1 * \varepsilon_2)}^{\langle \lambda, h_2\rangle \text{ 個}} * \overbrace{(\varepsilon_1 * \varepsilon_2 * \varepsilon_3) * \cdots * (\varepsilon_1 * \varepsilon_2 * \varepsilon_3)}^{\langle \lambda, h_3\rangle \text{ 個}} \\ * \cdots * \underbrace{(\varepsilon_1 * \cdots * \varepsilon_{2n}) * \cdots * (\varepsilon_1 * \cdots * \varepsilon_{2n})}_{\langle \lambda, d_{2n}\rangle \text{ 個}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで, h_i, $i \in I$ は $\mathfrak{g}$ の単純余ルート, $*$ はパスの concatenation を表す. また, 0 と ε_j, $j = 1, \ldots, 2n$ を結ぶ straight line を単に ε_j で表している. π'_λ の像は $\mathfrak{g}$ の dominant Weyl chamber に含まれるため, [L95, Theorem 7.1] から $\mathbb{B}_{\mathrm{LS}}(\lambda)$ と同様に $\mathbb{B}_{\mathrm{YT}}(\lambda)$ もまた $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環 $\mathbf{U} := \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 上の既約最高ウェイト加群 $L_q(\lambda)$ の結晶基底にクリスタルとして同型である. 以上の設定の下, 次の公式が [NS05] に於いて予想され, [ST18] で完全な証明が与えられた.

定理 2.2 ([NS05, Conjecture 2.5.3] = [ST18, Theorem 1])**.**

$$m_{\lambda,\mu} = \sharp\left\{\pi \in \mathbb{B}_{\mathrm{YT}}(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{l}\langle \pi(t), \widehat{h}_j\rangle \geq 0 \text{ for all } j \in \widehat{I},\ t \in [0,1], \\ \pi(1)|_{\widehat{\mathfrak{h}}} = \mu\end{array}\right\}. \tag{2.3}$$

ここで, $\widehat{h}_j := h_j + h_{\sigma(j)}$, $j \in \widehat{I}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純余ルート.

導入でも述べたように, (2.3) を $\imath$ 量子群に対する分岐則を経由して示すのが本論説の趣旨である. そのために必要な $\imath$ 量子群に関する結果を次節で解説したい.

3. AII 型 $\imath$ 量子群に対する分岐則

3.1. **AII 型 $\imath$ 量子群.** $(I, I_\bullet, \mathrm{id})$ を AII_{2n-1} 型佐武図形として次のようにおく:

$$b_i := \begin{cases} f_i & i \in I_\bullet, \\ f_i - [e_{i-1}, [e_{i+1}, e_i]] & i \in I \setminus I_\bullet. \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで, e_i, f_i, $i \in I$ は $\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成元である. e_i, h_i, $i \in I_\bullet$, b_j, $j \in I$ が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環を $\mathfrak{k}$ とすると, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 同様に $\mathfrak{k}$ も C_n 型複素単純 Lie 環になる. $\mathfrak{k}$ の支配的整ウェ

イト全体を $\widetilde{X}^+$ とし ($\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイト全体 $\widehat{X}^+$ と自然に同一視する), 最高ウェイト μ の既約 $\mathfrak{k}$-加群を $\widetilde{L}(\mu)$ で表す．$L(\lambda)\downarrow^{\mathfrak{g}}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ と $L(\lambda)\downarrow^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{k}}$ の指標を比較することで次が示せる．

命題 3.1. $\mathfrak{k}$-加群として,

$$L(\lambda)\downarrow^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{k}} \cong \bigoplus_{\mu \in \widetilde{X}^+} \widetilde{L}(\mu)^{\oplus m_{\lambda,\mu}}. \tag{3.2}$$

ここで, 右辺に現れる $m_{\lambda,\mu}$ は (2.3) の左辺と同じ値である．

$\imath$ 量子群の理論を使うことで, (3.2) の q-類似を与えることができる．$\mathbf{U}$ の Chevalley 生成元を E_i, F_i, K_i, $i \in I$ として次のようにおく:

$$B_i := \begin{cases} F_i & i \in I_\bullet, \\ F_i - q[E_{i-1}, [E_{i+1}, E_i]_{q^{-1}}]_{q^{-1}} K_i^{-1}. & i \in I \setminus I_\bullet. \end{cases} \tag{3.3}$$

$[\cdot,\cdot]_{q^{-1}}$ は q-commutator である．E_i, K_i, $i \in I_\bullet$, B_j, $j \in I$ が生成する $\mathbf{U}$ の $\mathbb{C}(q)$-部分代数 $\mathbf{U}^\imath := \mathbf{U}^\imath(\mathfrak{k})$ を AII_{2n-1} 型 $\imath$ 量子群という．$\mathbf{U}^\imath$ は余積

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \quad \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i \tag{3.4}$$

に関して $\mathbf{U}$ の右余イデアルを成す．これにより, $\mathbf{U}^\imath$-加群 M と $\mathbf{U}$-加群 N に対し, $M \otimes N$ にも $\mathbf{U}^\imath$-加群の構造が自然に入る．近年 $\mathbf{U}^\imath \hookrightarrow \mathbf{U}$ を $\mathbf{U} \overset{^\omega\Delta}{\to} \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$ の一般化と見做し ($^\omega\Delta := (\omega \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$, Δ は Chevalley involution), 量子群に関する様々な結果を $\imath$ 量子群の場合に一般化する試みが活発である ($\imath$program). 例えば, 量子群の理論に於ける R-行列は, K-行列と呼ばれる概念に一般化される．他に本研究に関連するものとして [W21] を挙げたい．[W21] では量子群に対する最高ウェイト理論の $\imath$-類似が構築され, $\widetilde{L}(\mu)$ の q-変形にあたる有限次元既約 $\mathbf{U}^\imath$-加群 $\widetilde{L}^\imath(\mu)$ が定義された．これを用いることで, (3.2) の q-類似が得られる．

命題 3.2 (see [NSW25, Section 5.3])**.** $\mathbf{U}^\imath$-加群として,

$$L_q(\lambda)\downarrow^{\mathbf{U}}_{\mathbf{U}^\imath} \cong \bigoplus_{\mu \in \widetilde{X}^+} \widetilde{L}^\imath(\mu)^{\oplus m_{\lambda,\mu}}. \tag{3.5}$$

ここで, 右辺に現れる $m_{\lambda,\mu}$ は (2.3) の左辺と同じ値である．

さらに [W23+] では, (3.5) の両辺の結晶極限 $q \to \infty$ を取ることで, $m_{\lambda,\mu}$ の値を計算するアルゴリズムが得られている．その概要を次に説明する．

3.2. **AII 型 Littlewood–Richardson 則.** 以下, $L_q(\lambda)$ の結晶基底の実現として, shape が λ で全ての成分が $\{1, \dots, 2n\}$ に属す半標準盤の全体 $\mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ をとる．また, $\mathrm{SST}_{2n} := \bigsqcup_\lambda \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ とおく．[W23+] で得られているアルゴリズムは, 各 $\mathfrak{g}$-crystal $T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ を $\imath$crystal-like な object $P^{\mathrm{AII}}(T) \in \mathrm{SST}_{2n}$ に読み替える操作 P^{AII} によって記述される．ただし, AII 型の $\imath$ 量子群に対する $\imath$crystal の理論は未だ定式化されていないため, この表現は不正確であることを注意しておきたい．操作 P^{AII} は次のようにして構成される．まず, λ が深さ $0 \le l \le n$ の 1 列型の Young 図形 $\lambda = \varpi_l$ である場合については,

$$\mathrm{red} : \mathrm{SST}_{2n}(\varpi_l) \to \mathrm{SpT}_{2n}(\widetilde{\varpi}_l) \sqcup \mathrm{SpT}_{2n}(\widetilde{\varpi}_{l-2}) \sqcup \mathrm{SpT}_{2n}(\widetilde{\varpi}_{l-4}) \sqcup \cdots \tag{3.6}$$

なる操作 red が定義でき，$P^{\mathrm{AII}}(T) := \mathrm{red}(T)$ と定める．ここで，$\mathrm{SpT}_{2n}(\widetilde{\varpi}_k)$ は shape が深さ k の 1 列型の Young 図形 $\widetilde{\varpi}_k$ であるような symplectic 盤全体を表す．(3.6) は古典的な分岐則

$$L(\varpi_l)\downarrow^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{k}} \cong \widetilde{L}(\widetilde{\varpi}_l) \oplus \widetilde{L}(\widetilde{\varpi}_{l-2}) \oplus \widetilde{L}(\widetilde{\varpi}_{l-4}) \oplus \cdots \tag{3.7}$$

の q-変形にあたる

$$L_q(\varpi_l)\downarrow^{\mathbf{U}}_{\mathbf{U}^\imath} \cong \widetilde{L}^\imath(\widetilde{\varpi}_l) \oplus \widetilde{L}^\imath(\widetilde{\varpi}_{l-2}) \oplus \widetilde{L}^\imath(\widetilde{\varpi}_{l-4}) \oplus \cdots \tag{3.8}$$

の結晶極限と解釈でき，上述の K-行列 (の組合せ論的な対応物) を使って構成される．$n \leq l \leq 2n$ の場合も同様に操作 red が定まり，$P^{\mathrm{AII}}(T) := \mathrm{red}(T)$ と定義される．これで λ が 1 列型の場合に操作 P^{AII} が定義できた．λ が 2 列以上から成る場合は，$T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ の 1 列目と 2 列目以降をそれぞれ $C_1(T)$, $C_{\geq 2}(T)$ として

$$\mathrm{suc}(T) := \mathrm{red}(C_1(T)) * C_{\geq 2}(T) \tag{3.9}$$

とおき，$\mathrm{suc}^{k+1}(T) = \mathrm{suc}^k(T)$ を満たす最小の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$(そのような k は常に存在する) に対して $P^{\mathrm{AII}}(T) := \mathrm{suc}^k(T)$ と定める ($*$ は plactic monoid に於ける積)．$\mathbf{U}^\imath$-加群 M と $\mathbf{U}$-加群 N に対し，$M \otimes N$ にもまた $\mathbf{U}^\imath$-加群の構造が入るのだった．この事実を踏まえ，テンソル積の左側に (3.8)(の結晶極限にあたる (3.6)) を適用したのが (3.9) である．以上でアルゴリズムの記述に必要な操作 P^{AII} が導入できた．この操作を用いて次のように定義する．

定義 3.3 ([NSW25, Definition 5.13])**.** $P^{\mathrm{AII}}(T)$ の j 行目に $2j - \dfrac{1+(-1)^j}{2}$ しか存在しないとき，$T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ は $\mathfrak{k}$-最高ウェイト盤であるという．

上述のアルゴリズムとは次のようなものである．

定理 3.4 ([W23+, Theorem 7.2.1] combined with [NSW25, Corollary 5.14])**.**

$$m_{\lambda,\mu} = \sharp \left\{ T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ は } \mathfrak{k}\text{-最高ウェイト盤}, \\ P^{\mathrm{AII}}(T) \text{ の shape} = \mu \end{array} \right\}. \tag{3.10}$$

この (3.10) を用いることで (2.3) が示される．次節でその概略を解説したい．

4. 証明の概略

4.1. **Key Proposition.** [NSW25] に於ける内藤・佐垣予想の証明の概略を解説する．$T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ に対し，その成分を右の列から順に上から下へ読んで得られる column word を $i_1 i_2 i_3 \cdots i_{|\lambda|}$ として，$CR(T) \in \mathbb{B}$ を次で定める:

$$CR(T) := \varepsilon_{i_1} * \varepsilon_{i_2} * \varepsilon_{i_3} * \cdots * \varepsilon_{i_{|\lambda|}}. \tag{4.1}$$

良く知られているように，$T \mapsto CR(T)$ はクリスタルの同型 $CR : \mathrm{SST}_{2n}(\lambda) \to \mathbb{B}_{\mathrm{YT}}(\lambda)$ を引き起こす．そこで，次の集合に属す半標準盤を $\widehat{\mathfrak{g}}$-支配的盤と呼ぶことにする．

$$\bigcup_{\mu \in \widehat{X}^+} CR^{-1}\left(\left\{ \pi \in \mathbb{B}_{\mathrm{YT}}(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \pi(t), \widehat{h}_j \rangle \geq 0 \text{ for all } j \in \widehat{I},\, t \in [0,1], \\ \pi(1)|_{\widehat{\mathfrak{h}}} = \mu \end{array} \right\} \right) \tag{4.2}$$

次の命題が (2.3) の証明の鍵になる．

命題 4.1 ([NSW25, Theorem 5.16])**.** 各 $\mu \in \widehat{X}^+ \cong \widetilde{X}^+$ に対し, 次の全単射が存在する*:*

$$\Phi_\mu : \left\{ T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ は } \widehat{\mathfrak{g}}\text{-支配的盤}, \\ CR(T)(1)|_{\widehat{\mathfrak{h}}} = \mu \end{array} \right\}$$
$$\xrightarrow{\sim} \left\{ T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ は } \mathfrak{k}\text{-最高ウェイト盤}, \\ P^{\mathrm{AII}}(T) \text{ の shape} = \mu \end{array} \right\}. \tag{4.3}$$

命題 4.1 が示されれば, 次のようにして (2.3) が従う:

$$(2.3) \text{ の左辺} \overset{(3.10)}{=} \sharp(4.3) \text{ の右辺} \overset{\text{命題 4.1}}{=} \sharp(4.3) \text{ の左辺} \overset{\mathrm{CR}}{=} (2.3) \text{ の右辺} \tag{4.4}$$

4.2. **Key Proposition の証明.** まず $n = 2$ のケースについて, 命題 4.1 の証明の概要を述べる. 手始めに次の特徴づけを与えておく.

補題 4.2 ([NSW25, Lemma 6.1, Lemma 6.2])**.**

(1) $T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ が $\mathfrak{k}$-最高ウェイト盤であることは次と同値*:*

$$\widetilde{f}_1 T = \widetilde{e}_2 T = \widetilde{e}_3 T = 0, \quad \varphi_2(\widetilde{e}_1^{\max} \widetilde{f}_3^{\max} T) \leq \varphi_2(T). \tag{4.5}$$

(2) $T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ が $\widehat{\mathfrak{g}}$-支配的盤であることは, T が次の形であることと同値*:*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 & 1 \cdots \quad \cdots 1 \\
\hline
2 \cdots 2 & 2 \cdots 2 & 2 \cdots 2 & 2 \cdots 2 & 4 \cdots 4 \\
\cline{1-5}
3 \cdots 3 & 3 \cdots 3 & 4 \cdots 4 \\
\cline{1-3}
4 \cdots 4 & \multicolumn{1}{l}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\langle \lambda, h_1 \rangle \text{ 以下}}} \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

続いて Φ_μ を構成するために次のような作用素を導入する.

定義 4.3 ([NSW25, Definition 6.4])**.** $1 \leq i \leq j \leq 2n$, $T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ に対し, 新たな半標準盤 $\mathrm{pr}_{i,j}(T) \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ を次のように構成する:

(PR1) T の箱のうち成分が区間 $[i, j]$ に属さないものを削除する.
(PR2) T の成分のうち区間 $[i, j-1]$ に属すものを 1 増やし, 成分 j を i に置き換える.
(PR3) i が入っている箱を jeu-de-taquin slide で可能な限り上の行に移動させる.
(PR4) (PR1) で削除した箱を元の位置に戻す.

逆変換が容易に構成できるため $\mathrm{pr}_{i,j} : \mathrm{SST}_{2n}(\lambda) \to \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ は全単射であり, $\mathrm{pr}_{i,i} = \mathrm{id}$ である. また, [Shi02] 等で扱われている promotion 作用素 pr は $\mathrm{pr}_{1,2n}$ と同じものである. 補題 4.2 を使うと, $\Phi_\mu := \mathrm{pr}_{1,4}$ が命題 4.1 の条件を満たすことを確認できる. 以上が $n = 2$ のケースの概要である.

次に $n \geq 3$ の場合の証明の概略を述べる. 今度は Φ_μ として次をとる (正確な定義は [NSW25, Definition 7.19]):

$$\Phi_\mu := \mathrm{pr}_{1,2n} \circ \mathrm{pr}_{3,2n-1} \circ \mathrm{pr}_{3,2n-2} \circ \mathrm{pr}_{5,2n-3} \circ \mathrm{pr}_{5,2n-4} \circ \mathrm{pr}_{7,2n-5} \circ \mathrm{pr}_{7,2n-6} \cdots . \tag{4.6}$$

(4.6) で $n = 2$ とすると $\Phi_\mu = \mathrm{pr}_{1,4} \circ \mathrm{pr}_{3,3} = \mathrm{pr}_{1,4}$ となって, $n = 2$ のときに構成した Φ_μ と一致する. (4.6) で定義された Φ_μ が各 $T \in \mathrm{SST}_{2n}(\lambda)$ に対して $CR(T)(1)|_{\widehat{\mathfrak{h}}} = P^{\mathrm{AII}}(\Phi_\mu(T))$ の shape を満たすことも比較的容易に分かる. 従って後は,

(1) T が $\widehat{\mathfrak{g}}$-支配的盤 $\implies$ $\Phi_\mu(T)$ も $\mathfrak{k}$-最高ウェイト盤

(2) T が $\mathfrak{k}$-最高ウェイト盤 $\Longrightarrow$ $\Phi_\mu^{-1}(T)$ も $\widehat{\mathfrak{g}}$-支配的盤

を示せばよい. (1) の証明の概略を述べる. T が $\widehat{\mathfrak{g}}$-支配的盤であるとする. $n \geq 3$ のケースは $n = 2$ の場合と異なり, 補題 4.2 のような特徴付けが容易ではない. このため, $\Phi_\mu(T)$ が $\mathfrak{k}$-最高ウェイト盤であるか否かを判定することが難しい. そこで, $1 \leq i \leq n-1$ 毎に次のような部分 Lie 環を考える:

$$\mathfrak{k}_i := \langle e_{2i\pm1}, h_{2i\pm1}, b_{2i\pm1}, b_{2i} \rangle_{\text{Lie alg.}} \subset \mathfrak{k}, \quad \widehat{\mathfrak{g}}_i := \langle \widehat{e}_i, \widehat{f}_i, \widehat{e}_{2\widehat{\varepsilon}_i}, \widehat{f}_{2\widehat{\varepsilon}_i} \rangle_{\text{Lie alg.}} \subset \widehat{\mathfrak{g}}. \tag{4.7}$$

ここで, $\widehat{e}_{2\widehat{\varepsilon}_i}$, $\widehat{f}_{2\widehat{\varepsilon}_i}$ はルート $\pm 2\widehat{\varepsilon}_i$ のルートベクトルである. 各 $\mathfrak{k}_i$, $\widehat{\mathfrak{g}}_i$ は C_2 型複素単純 Lie 環であり, $\mathfrak{k}$, $\widehat{\mathfrak{g}}$ は Lie 環としてこれらで生成される:

$$\mathfrak{k} = \langle \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \dots, \mathfrak{k}_{n-1} \rangle_{\text{Lie alg.}}, \quad \widehat{\mathfrak{g}} = \langle \widehat{\mathfrak{g}}_1, \widehat{\mathfrak{g}}_2, \widehat{\mathfrak{g}}_3, \dots, \widehat{\mathfrak{g}}_{n-1} \rangle_{\text{Lie alg.}}. \tag{4.8}$$

このことに着目すると, 半標準盤が $\mathfrak{k}$-最高ウェイト盤であるという $\mathfrak{k}$ にまつわる条件を, 各 $\mathfrak{k}_i$ たちに関する局所的な条件で置き換えることができる. ここで, $\mathfrak{k}_i$ たちは C_2 型複素単純 Lie 環であったから, 各 $\mathfrak{k}_i$ に $n = 2$ のケースの議論 (例えば補題 4.2) を適用することできて, $\Phi_\mu(T)$ が $\mathfrak{k}$-最高ウェイト盤であるか否かを判定する判定条件が得られる [NSW25, Lemma 7.15]. これは Kac–Moody 代数の表現論や結晶基底の理論が $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の表現論の積み上げであることの C 型類似と捉えられる. こうして (1) が示される. (2) の証明も同様であるが, 技術的には (2) の方がやや困難である. 詳細は [NSW25, Section 7] を参照されたい.

5. 謝辞

研究集会開催にご尽力くださり, 筆者に講演の機会を与えて下さった小寺諒介先生に感謝の意を表します. ありがとうございました.

References

[L94] P. Littelmann, A Littlewood–Richardson rule for symmetrizable Kac–Moody algebras, *Invent. Math.* **116** (1994), no. 1-3, 329-346.

[L95] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* (2) **142** (1995), no. 3, 499-525.

[NS05] S. Naito and D. Sagaki, An approach to the branching rule from $\mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C})$ to $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ via Littelmann's path model, *J. Algebra* **286** (2005), no. 1, 187-212.

[NSW25] S. Naito, Y. Suzuki and H. Watanabe, A proof of the Naito–Sagaki conjecture via the branching rule for $\imath$quantum groups, arXiv:2502.07270.

[ST18] B. Schumann and J. Torres, A non-Levi branching rule in terms of Littelmann paths, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **117** (2018), no. 5, 1077-1100.

[Shi02] M. Shimozono, Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties, *J. Algebraic Combin.* **15** (2002), 151-187.

[Sun90] S. Sundaram, Tableaux in the representation theory of the classical Lie groups, Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988), 191-225, IMA Vol. Math. Appl., Vol. 19, Springer Verlag, New York, 1990.

[W21] H. Watanabe, Classical weight modules over $\imath$quantum groups, *J. Algebra* **578** (2021), 241-302.

[W23] H. Watanabe, A new tableau model for representations of the special orthogonal group, *J. Algebraic Combin.* **58** (2023), 183-230.

[W23+] H. Watanabe, Symplectic tableaux and quantum symmetric pairs, arXiv:2308.01718.

Department of Mathematics, Institute of Science Tokyo, 2-12-1 Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan

Email address: suzuki.y.dq@m.titech.ac.jp