A_μ 型特異点の行列因子化の圏とその変形

千葉大学・融合理工学府　中谷　友哉
Tomoya Nakatani
Graduate School of Science and Engineering,
Chiba University

1　序文

多項式 $f \in S := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の行列因子化は超曲面 $R := S/(f)$ 上の極大 Cohen-Macaulay 加群を研究するために Eisenbud と Knörrer により導入された概念である。その中でも ADE 型特異点を定める重み付き斉次多項式 (以下、ADE 型の多項式) f の次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ は ADE 型特異点のホモロジー的ミラー対称性における複素幾何側の圏であるだけではなく、表現論の分野における Lie 環やルート系とも関係が深い。このことは、Kajiura-Saito-Takahashi によって示された次の定理からも分かる。

定理 1.1 ([1, Theorem 3.1])**.** $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ を ADE 型の多項式とし、$\vec{\Delta}$ を対応する型の Dynkin 箙とする。このとき、次の三角圏同値が存在する。

$$\mathrm{HMF}_S^{gr}(f) \simeq D^b(\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{C}\vec{\Delta})$$

ここで右側の圏は、道代数 $\mathbb{C}\vec{\Delta}$ 上の有限生成右加群のなす圏の導来圏である。

ADE 型の多項式 f の普遍開折によって f を変形することで、次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ を変形することを考える。ADE 型の多項式 f の普遍開折は次で与えられる。f の Jacobi 環

$$\mathrm{Jac}(f) := \mathbb{C}[x, y, z] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

は $\mathbb{C}$ 上有限次元であり、その単項式基底 $\{m_i(x, y, z)\}_{i=1}^{\mu}$ が存在する。パラメーター空間 $\mathbb{C}^\mu$ の座標系を $t = (t_1, \ldots, t_\mu)$ とし正則関数 $F(x, y, z, t) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^\mu \to \mathbb{C}$ を以下で定める。

$$F(x, y, z, t) = f(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\mu} t_i m_i(x, y, z)$$

このとき、正則関数 F と射影 $p : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^\mu \to \mathbb{C}^\mu$ の組は ADE 型の多項式の普遍開折になる。特に、一般の点 $t \in \mathbb{C}^\mu$ を固定すると $F(x, y, z, t)$ は次の性質を持つ。

- 正則関数 F の臨界点は互いに相異なる μ 個の点 $\{p_1,\dots,p_\mu\}$ からなる。
- 各点 p_i における正則関数 F の臨界値 $F(p_i,t)$ は互いに相異なる。
- 各点 p_i について、F は A_1 型特異点を定める。

f の次数付き行列因子化の圏の変形にはこれらの性質が反映されると予想している。f の次数付き行列因子化の圏の変形を考えるために、まずパラメーター空間の一般の点 $t\in\mathbb{C}^\mu$ を固定したときの F の次数付き行列因子化の圏を定義する。しかし一般に F は定数項や線形項を含むため重み付き斉次多項式でない。そこで q を次数が 1 の形式的な変数として、重み付き斉次多項式 F_q を

$$F_q(x,y,z,q):=f(x,y,z)+\sum_{i=1}^{\mu}t_im_i(x,y,z)q^{\deg(f)-\deg(m_i)}$$

で定める。本稿では、f が A_μ 型の多項式の場合に上で定義した F_q の次数付き行列因子化の圏の構造について述べる。

2 準備

この節では重み付き斉次多項式 $f\in S$ の次数付き行列因子化の圏を定義する。f を重み $(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{Z}^n_{>0}$ で次数 h の重み付き斉次多項式とする。f の次数 h によって S を次数付き代数 $\bigoplus_{k\in\frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}}S_k, S_0=\mathbb{C}$ とみなす。次数付き S-加群 $M=\bigoplus_{k\in\frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}}M_k$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対し次数付き S-加群 $M(n)$ を $(M(n))_s:=M_{s+\frac{2n}{h}}$ で定める。また、$g:M\to N$ が次数 $t\in\frac{2\mathbb{Z}}{h}$ の S-準同型であるとは、任意の $s\in\frac{2\mathbb{Z}}{h}$ に対して $g(M_s)\subset N_{s+t}$ となることをいい、$g:M\to N$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対して $g(n)$ を $g(n):M(n)\to N(n)$ で定める。

定義 2.1. F_0,F_1 をランク r の自由 S-加群とし、$f_0:F_0\to F_1$, $f_1:F_1\to F_0$ をそれぞれ次数 0 と 2 の S-準同型で $f_1f_0=f\cdot\mathrm{id}_{F_0}$, $f_0f_1=f\cdot\mathrm{id}_{F_1}$ を満たすとする。このとき組 (F_0,F_1,f_0,f_1) をサイズ r の f の次数付き行列因子化といい

$$\bar{F}:=\left(F_0\underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}}F_1\right)$$

で表す。

定義 2.2. $\bar{F}=\left(F_0\underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}}F_1\right),\bar{F}'=\left(F_0'\underset{f_1'}{\overset{f_0'}{\rightleftarrows}}F_1'\right)$ を f の次数付き行列因子化とする。

- 次数付き行列因子化の間の射 $\Phi:\bar{F}\to\bar{F}'$ とは、次数 0 の S-加群準同型の組 $\phi_0:F_0\to F_0',\phi_1:F_1\to F_1'$ であって $\phi_1f_0=f_0'\phi_0,\phi_0f_1=f_1'\phi_1$ を満たすものである。このような射全体を $\mathrm{Hom}(\bar{F},\bar{F}')$ とかく。
- 次数付き行列因子化の射 $\Phi,\Phi':\bar{F}\to\bar{F}'$ がホモトピックであるとは、次数 -2 の S-加群準同型 $h_0:F_0\to F_1'$ と次数 0 の S-加群準同型 $h_1:F_1\to F_0'$ であって

  $$\phi_0-\phi_0'=h_1f_0+f_1'(-h)h_0\ ,\ \phi_1-\phi_1'=f_0'h_1+h_0(h)f_1$$

  を満たすものが存在することをいい、このとき $\phi\sim\phi'$ とかく。

定義 2.3. f の次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ を次で定義する。対象を全ての f の次数付き行列因子化とし、対象 $\bar{F}, \bar{F}' \in \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ に対して射の空間 $\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)(\bar{F}, \bar{F}')$ を

$$\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)(\bar{F}, \bar{F}') := \mathrm{Hom}(\bar{F}, \bar{F}')/ \sim$$

で定める。また、射の合成は定義 2.2 から自然に定まるものとする。

任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $\bar{F} = \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right)$ に対して、$\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ の自己同型関手 (n) を

$$\bar{F}(n) := \left(F_0(n) \underset{f_1(n)}{\overset{f_0(n)}{\rightleftarrows}} F_1(n) \right)$$

で定める。また、射 $\Phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)(\bar{F}, \bar{F}')$ に対して $\Phi(n) := (\phi_0(n), \phi_1(n))$ と定める。

定義 2.4. シフト関手 $T : \mathrm{HMF}^{gr}_S(f) \to \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ を $\bar{F} = \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right)$ に対して、

$$T\bar{F} := \left(F_1 \underset{-f_0(h)}{\overset{-f_1}{\rightleftarrows}} F_0(h) \right)$$

で定める。また、射 $\Phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)(\bar{F}, \bar{F}')$ に対して $T\Phi := (\phi_1, \phi_0(h))$ と定める。

定義より $T^2 = (h)$ が成り立つことに注意する。

定義 2.5. 射 $\Phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)(\bar{F}, \bar{F}')$ に対して、写像錐 $C(\Phi) \in \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ を

$$F_1 \oplus F'_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f_1 & 0 \\ \phi_1 & f'_0 \end{pmatrix}} F_0(h) \oplus F'_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f_0(h) & 0 \\ \phi_0(h) & f'_1 \end{pmatrix}} F_1 \oplus F'_0$$

で定義する。

命題 2.6. $\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ の任意の対象 $\bar{F}, \bar{F}' \in \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ とその間の射 $\Phi \in \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)(\bar{F}, \bar{F}')$ に対して、

$$\bar{F} \xrightarrow{\Phi} \bar{F}' \longrightarrow C(\Phi) \longrightarrow T\bar{F}$$

は完全三角形となり、$\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ は三角圏となる。

3 主結果

この節では f を A_μ 型の多項式 $f(x, y, z) = x^{\mu+1} + yz$ とし、f の普遍開折のパラメーター空間の一般の点 $t \in \mathbb{C}^\mu$ を固定する。このとき f の普遍開折を与える正則関数 F は

$$F(x, y, z, t) = x^{\mu+1} + yz + \sum_{i=0}^{\mu-1} t_{i+1} x^i$$

となる。f の重みとして $(1,b,\mu+1-b), 1\leq b\leq \mu+1$ をとると F_q は

$$F_q(x,y,z,t)=x^{\mu+1}+yz+\sum_{i=0}^{\mu-1} t_{i+1}x^iq^{\mu+1-i}$$

で与えられる。

注意 3.1. F_q の次数付き行列因子化を考える際、Knörrer's Periodicity[2, Theorem 3.1] より yz の項は無視できる。以降、$F_q=x^{\mu+1}+\sum_{i=0}^{\mu-1}t_{i+1}x^iq^{\mu+1-i}$ とする。

$S':=S[q]$ とする。F_q は $\lambda_1,\ldots,\lambda_{\mu+1}\in\mathbb{C}$ を用いて $F_q=\prod_{i=1}^{\mu+1}(x+\lambda_iq)$ と因数分解できる。特に、$t\in\mathbb{C}^\mu$ が一般の点のとき $\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j$ となる。空でない真部分集合 $I\subsetneq\{1,\ldots,\mu+1\}$ と整数 m の組に対して F_q のサイズ 1 の次数付き行列因子化を

$$\bar{F}_I(m):=\left(S'(m)\underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}}S'(m+|I|)\right)\ ,\ f_0=\prod_{i\in I}(x+\lambda_iq)\ ,\ f_1=\prod_{j\notin I}(x+\lambda_jq)$$

で定める。ここで $|I|$ は I の要素の個数を表す。

命題 3.2. 集合 $\{(I,m)\mid\emptyset\neq I\subsetneq\{1,\ldots,\mu+1\},m\in\mathbb{Z}\}$ と F_q のサイズ 1 の次数付き行列因子化全体の集合の間に一対一対応が存在する。

$\{1,\ldots,\mu+1\}$ の空でない真部分集合の列 $I_1\subsetneq\cdots\subsetneq I_\mu$ を $I_k:=\{a_1,\ldots,a_k\}$ で定めると次の定理が成り立つ。

定理 3.3. $\mathrm{HMF}^{gr}_{S[q]}(F_q)$ の任意のサイズ 1 の対象は $\bar{F}_{I_1},\ldots,\bar{F}_{I_\mu},\bar{F}_{I_1}(1),\ldots,\bar{F}_{I_\mu}(1)$ で生成される。

証明は $I\subsetneq J$ のとき $\mathrm{HMF}^{gr}_{S[q]}(F_q)$ に完全三角形

$$\bar{F}_I\to\bar{F}_J\to\bar{F}_{J\setminus I}(|I|)\to T\bar{F}_I$$

が存在することを用いて直接示す。また、定理 3.3 によって次の予想が立てられる。

予想 3.4. $\bar{F}_{I_1},\ldots,\bar{F}_{I_\mu},\bar{F}_{I_1}(1),\ldots,\bar{F}_{I_\mu}(1)$ が生成する充満三角部分圏は $\mathrm{HMF}^{gr}_{S[q]}(F_q)$ に一致する。つまり、三角圏同値 $\langle\bar{F}_{I_1},\ldots,\bar{F}_{I_\mu},\bar{F}_{I_1}(1),\ldots,\bar{F}_{I_\mu}(1)\rangle\simeq\mathrm{HMF}^{gr}_{S[q]}(F_q)$ が成り立つ。

この予想が成り立つ根拠として、孤立特異点を定める多項式の次数付き行列因子化の圏の生成定理の存在がある。

定理 3.5 ([3, Theorem 4.5],[4, Lemma 2.12])**.** f は孤立特異点を定める多項式とし、$\mathcal{E}$ を $\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ の例外的対象系とする。$\mathcal{E}$ を含む最小の充満三角部分圏 $\langle\mathcal{E}\rangle$ が条件

(1) $\langle\mathcal{E}\rangle$ は次数シフトで閉じる。
(2) $\langle\mathcal{E}\rangle$ は $\mathbb{C}^{stab}$ を含む。

を満たすならば、$\mathcal{E}$ は例外的生成系である。ここで $\mathbb{C}^{stab}$ は S-加群として $\mathbb{C}$ の Koszul 分解から定まる f の次数付き行列因子化である。

$\mathrm{HMF}^{gr}_{S[q]}(F_q)$ の場合でも、"十分に" 一般の点 $t \in \mathbb{C}^{\mu}$ を固定すると定理 3.3 における対象 $\bar{F}_{I_1}, \ldots, \bar{F}_{I_\mu}, \bar{F}_{I_1}(1), \ldots, \bar{F}_{I_\mu}(1)$ は例外的対象になることが分かっており、適切に順番を決めることで例外的対象系になる。また、定理 3.3 は $\langle \bar{F}_{I_1}, \ldots, \bar{F}_{I_\mu}, \bar{F}_{I_1}(1), \ldots, \bar{F}_{I_\mu}(1) \rangle$ が次数シフトで閉じることを主張している。しかし、一般には F_q は孤立特異点を定めるとは限らないため、今後は定理 3.5 の一般の重み付き斉次多項式への拡張を行い、予想 3.4 を示すことを計画している。

謝辞

今回の研究集会の世話人であり、発表の機会をくださった千葉大学の小寺諒介先生には大変お世話になりました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

[1] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi. Matrix factorizations and representations of quivers Ⅱ: type ADE case. *Advances in mathematics*, Vol. 211, No. 1, pp. 327–362, 2007.

[2] Horst Knörrer. Cohen-macaulay modules on hypersurface singularities I. *Invent. Math.*, Vol. 88, pp. 153–164, 1987.

[3] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi. Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with ε=- 1. *Advances in Mathematics*, Vol. 220, No. 5, pp. 1602–1654, 2009.

[4] Daisuke Aramaki and Atsushi Takahashi. Maximally-graded matrix factorizations for an invertible polynomial of chain type. *Advances in Mathematics*, Vol. 373, p. 107320, 2020.

Graduate School of Science and Engineering
Chiba University
Chiba 263-8522
JAPAN
E-mail address:24wd0102@student.gs.chiba-u.jp