格子への線形な有限群作用における mod q 置換表現の準多項式性について

大阪大学・大学院理学研究科　内海　凌
Ryo Uchiumi
Graduate School of Science,
Osaka University *

概要

数え上げ問題に関連した様々な場面で，周期的な多項式である準多項式が現れる．とりわけ，Ehrhart 理論における Ehrhart 準多項式，超平面配置における特性準多項式と呼ばれるものについて多くの研究がなされており，Ehrhart 理論においては，群作用込みで数え上げる同変 Ehrhart 理論が研究されている．本研究では，超平面配置の特性多項式の同変理論を目指した研究として，有限群が線形に作用している格子の mod q reduction における置換表現の準多項式性について紹介する．なお，本研究は吉永正彦氏との共同研究 [UY24, arXiv:2409.01084] に基づく．

1 Quasi-polynomials

R を可換環とする．写像 $F : \mathbb{Z}_{(>0)} \longrightarrow R$ が**準多項式 (quasi-polynomial)** であるとは，正整数 $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$，および多項式 $f_1, \ldots, f_{\tilde{n}} \in R[t]$ が存在して，次を満たすときにいう:

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{if } z \equiv 1 \pmod{\tilde{n}}; \\ f_2(z) & \text{if } z \equiv 2 \pmod{\tilde{n}}; \\ & \vdots \\ f_{\tilde{n}}(z) & \text{if } z \equiv \tilde{n} \pmod{\tilde{n}} \end{cases} \qquad \text{for any } z \in \mathbb{Z}_{(>0)}.$$

正整数 $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$ を準多項式 F の**周期 (period)**，各多項式 f_i を準多項式 F の**第 i 構成素 (i-th constituent)** という．

$\mathbb{Z}_{>0}$ 上で定義される準多項式は，$\mathbb{Z}$ 上の準多項式として自然に延長できることに注意する．準多項式はしばしば "周期的な多項式" と呼ばれており，特に数え上げ問題に関連して様々な場面で現れている．周期 $\tilde{n}$ の準多項式は，任意の $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，同じ構成素列を繰り返すことによって周期 $t\tilde{n}$ の準多項式だとみなすことができる．$\tilde{n}$ が準多項式 F の**最小周期 (minimal period)** であるとは，$\tilde{n}$ が F の周期で，任意の $k < \tilde{n}$ が F の周期とはならないときにいう．

* E-mail: uchiumi.ryou.1xu@ecs.osaka-u.ac.jp / ryo.uchiumi.math@gmail.com

準多項式 F が **gcd-property** をもつとは，各構成素 f_i が $\gcd\{\tilde{n}, i\}$ だけで決まるときにいう．つまり，$i, j \in \{1, \ldots, \tilde{n}\}$ に対して $\gcd\{\tilde{n}, i\} = \gcd\{\tilde{n}, j\}$ ならば，$f_i = f_j$ となる．すべての準多項式が gcd-property をもつわけではないが，準多項式の重要な性質の一つである．

以下では，本稿の主結果と関係深い二種類の準多項式を挙げる．

1.1 Ehrhart quasi-polynomial

$\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}^\ell$ 上の有理多面体とし，これを q 倍した多面体 $q\mathcal{P}$ の格子点を数えることを考える．このとき，$q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に関する数え上げ関数

$$L_{\mathcal{P}} : q \longmapsto \#(q\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^\ell)$$

は準多項式である [BR07, Theorem 3.23]．関数 $L_{\mathcal{P}}$ は **Ehrhart 準多項式 (Ehrhart quasi-polynomial)** と呼ばれる．特に，$\mathcal{P}$ が格子多面体であれば，$L_{\mathcal{P}}$ は単に多項式 (最小周期 1 の準多項式) となる．

Example 1.1. $\ell = 1$ とし，長さ 1 の線分 $\mathcal{P} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ を考える．このとき，$\mathcal{P}$ の Ehrhart 準多項式は，周期 2 の準多項式である:

$$L_{\mathcal{P}}(q) = \begin{cases} q & \text{if } q \equiv 1 \pmod 2; \\ q+1 & \text{if } q \equiv 2 \pmod 2. \end{cases}$$

1.2 Characteristic quasi-polynomial

この節では，超平面配置における重要な不変量である特性多項式の精密化である特性準多項式を紹介する．特性準多項式も，超平面配置から定まる格子点の数え上げ関数になっている．

1.2.1 Hyperplane arrangement and characteristic polynomial

体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間 $V \coloneqq \mathbb{K}^\ell$ 上の余次元 1 の部分空間 (あるいは affine 部分空間) を V の**超平面 (hyperplane)** という．V 上の**超平面配置 (hyperplane arrangement)** とは，超平面の有限個の集合のことをいう．超平面配置は，代数，組合せ論をはじめ，トポロジーや応用数学など，数学のあらゆる分野にわたって研究されている．

超平面配置の特性多項式は，超平面の枚数や V の次元に関して帰納的に定義される．

超平面 $H_0 \in \mathcal{A}$ を固定し，二種類の超平面配置 $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ を与える:

$$\mathcal{A}' \coloneqq \mathcal{A} \setminus \{H_0\}, \quad \mathcal{A}'' \coloneqq \left\{ H \cap H_0 \neq \emptyset \;\middle|\; H \in \mathcal{A} \setminus \{H_0\} \right\}.$$

$\mathcal{A}'$ は $\mathcal{A}$ よりも個数の少ない V 上の超平面配置 ($\mathcal{A}$ の**削除 (deletion)** という) で，$\mathcal{A}''$ は V よりも次元の小さい H_0 上での超平面配置 ($\mathcal{A}$ の**制限 (restriction)** という) であることに注意する．このとき，$\mathcal{A}$ の**特性多項式 (characteristic polynomial)** は

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \begin{cases} t^\ell & \text{if } \mathcal{A} = \emptyset,\ \ell = \dim V; \\ \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t) & \text{if } \mathcal{A} \neq \emptyset \end{cases}$$

によって与えられる．$\mathcal{A} \neq \emptyset$ の場合の等式は**削除制限公式 (deletion-restriction formula)** と呼ばれており，$\mathcal{A}', \mathcal{A}'$ の選び方 (つまり H_0 の選び方) には依らない．

特性多項式は**組合せ型 (intersection poset)** という超平面の交わり方の情報からも決定することができ，"どのような性質が組合せ型だけから決定されるか" が超平面配置の研究における問題意識の一つである．とりわけ，特性多項式は $\mathcal{A}$ の補集合

$$M(\mathcal{A}) \coloneqq V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

がもつ情報をいくつも有している．例えば，

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき，特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ の t^k の係数は $M(\mathcal{A})$ の $\ell - k$ 次の Betti 数に等しい．
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，$(-1)^\ell \chi_{\mathcal{A}}(-1)$ は $M(\mathcal{A})$ の連結成分の個数に等しい．
- $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ (p は素数) のとき，$\chi_{\mathcal{A}}(p) = \# M(\mathcal{A})$ である．

はよく知られている．

1.2.2 Characteristic quasi-polynomial

整数係数ベクトル $\alpha = (a_1, \dots, a_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$，および整数係数行列 $A = \big(a_{ij}\big)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ の ***q*-reduction** とは，各成分を mod q することで得られるベクトル，行列のことをいい，それぞれ $[\alpha]_q$, $[A]_q$ で表す:

$$[\alpha]_q = \big([a_1]_q, \dots, [a_\ell]_q\big) \in \mathbb{Z}_q^\ell, \quad [A]_q = \big([a_{ij}]_q\big)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{Z}_q).$$

ただし，$\mathbb{Z}_q \coloneqq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ であり，$a \in \mathbb{Z}$ に対して $[a]_q \coloneqq a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$ である．

整数係数の列ベクトル $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^\ell$ をとる．各 α_i に対して，$\mathbb{Z}_q^\ell$ の "超平面" $H_{q,i}$ を

$$H_{q,i} \coloneqq \left\{ [x]_q \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; [x]_q \cdot [\alpha_i]_q = [0]_q \right\}$$

と定めることで，$\mathbb{Z}_q^\ell$ 上の "超平面配置" $\mathcal{A}_q \coloneqq \{H_{q,1}, \dots, H_{q,n}\}$ が得られる．配置 $\mathcal{A}_q$ の補集合を

$$M(\mathcal{A}; q) \coloneqq \mathbb{Z}_q^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^n H_{q,i}$$

で定義する．このとき，有限集合 $M(\mathcal{A}; q)$ に関する数え上げ関数

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}} : q \longmapsto \# M(\mathcal{A}; q)$$

は gcd-property をもつ準多項式であることが知られており [KTT08, Theorem 2.4]，**特性準多項式 (characteristic quasi-polynomial)** と呼ばれている．さらに，準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}$ の第 1 構成素は，ベクトル $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ から得られる $\mathbb{R}^\ell$ 上の超平面配置

$$\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}, \quad H_i \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; x\alpha_i = 0 \right\}$$

の特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ となるため，特性準多項式は特性多項式を精密化したものと考えることができる．また，特性準多項式の理論は，正整数 q ごとに格子点を数え上げているという点において

Ehrhart 準多項式と類似しており，Ehrhart 準多項式の “mod q 版” であるともいわれている．とりわけ，ルート系から決まる超平面配置 (Coxeter arrangement) の特性準多項式は，そのルート系における fundamental alcove の Ehrhart 準多項式と密接に関係していることがわかっている (cf. [Yos18]).

関数 $\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}$ が準多項式であることは，次の補題と包除原理によって示される．この補題は本稿の主結果の証明でも用いている．

Lemma 1.2 ([KTT08, Lemma 2.1])**.** 整数係数行列 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ に対して，各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ ごとに写像

$$\varphi_q : \mathbb{Z}_q^m \longrightarrow \mathbb{Z}_q^n;\ x \longmapsto x[A]_q$$

を与える．このとき，

$$\#\ker\varphi_q = \left(\prod_{j=1}^{r(A)} \gcd\{e_j, q\}\right) q^{m-r(A)}$$

である．ただし，$r(A) \coloneqq \operatorname{rank} A$ であり，$e_1, \ldots, e_{r(A)}$ は A の単因子とする．

Proof. 簡単な概略を述べる．行列 A は Smith 標準形，すなわち対角行列

$$A = \operatorname{diag}(e_1, \ldots, e_{r(A)}, 0\ldots, 0), \qquad (\text{ただし } e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_{r(A)})$$

であることを仮定してよい．このとき，

$$\operatorname{im}\varphi_q = [e_1]_q\mathbb{Z}_q \times \cdots \times [e_{r(A)}]_q\mathbb{Z}_q$$

となるから，$\#\operatorname{im}\varphi_q$ が計算できる．したがって，$\#\ker\varphi_q$ も得られる． □

Example 1.3. $V = \mathbb{R}^2$ とし，ベクトル

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

を考える．これらのベクトルからは，次の 3 本の直線からなる配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3\}$ が得られる:

$$H_1 = \left\{ (x, y) \in V \;\middle|\; y = 0 \right\}, \quad H_2 = \left\{ (x, y) \in V \;\middle|\; y = 2x \right\}, \quad H_3 = \left\{ (x, y) \in V \;\middle|\; y = 3x \right\}.$$

このとき，$\mathcal{A}$ の組合せ型は $L(\mathcal{A}) = \{V,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ \mathbf{0}\}$ であり，$\mathcal{A}$ の特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ は

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 3t + 2$$

となる．$\mathcal{A}$ の特性準多項式は

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}(q) = \begin{cases} q^2 - 3q + 2 & \text{if } q \equiv 1 \pmod 6; \\ q^2 - 3q + 3 & \text{if } q \equiv 2 \pmod 6; \\ q^2 - 3q + 4 & \text{if } q \equiv 3 \pmod 6; \\ q^2 - 3q + 3 & \text{if } q \equiv 4 \pmod 6; \\ q^2 - 3q + 2 & \text{if } q \equiv 5 \pmod 6; \\ q^2 - 3q + 5 & \text{if } q \equiv 6 \pmod 6 \end{cases}$$

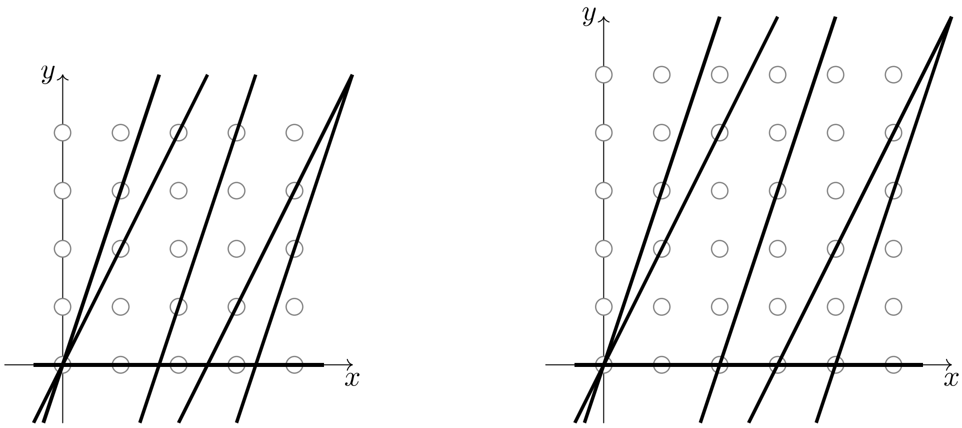

図 1　$\mathbb{Z}_5^2$ 上の $\mathcal{A}_5$ (左)，$\mathbb{Z}_6^2$ 上の $\mathcal{A}_6$ (右)．$M(\mathcal{A};5)$，$M(\mathcal{A};6)$ は直線上にない点からなる集合．

である．また，

$$\#(H_{q,i} \cap H_{q,j}) = \#\left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}_q^2 \;\middle|\; (x,y)\begin{pmatrix}\alpha_i & \alpha_j\end{pmatrix} = (0,0) \right\}$$

であるから，Lemma 1.2 より

$$\#(H_{q,1} \cap H_{q,2}) = \gcd\{2,q\}, \quad \#(H_{q,1} \cap H_{q,3}) = \gcd\{3,q\}, \quad \#(H_{q,2} \cap H_{q,3}) = 1$$

がわかる．

2　Equivariant Ehrhart theory

この章では本稿の主結果の背景にある**同変 Ehrhart 理論 (Erquivariant Ehrhart thory)** を紹介する．これは Stapledon [Sta11] が導入した Ehrhart 理論の同変版であり，有限群による対称性をもつ多面体において，その上の格子点を表現の構造込みで数えるものである．

2.1　Group action and representation

有限群 Γ の $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V 上の**表現 (representation)** とは，V の線形同型からなる群 $\mathrm{GL}(V)$ への群準同型 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ のことをいう．以下，群の表現 ρ は忠実 (faithful) である (すなわち，ρ が単射である) ことを仮定する．群の表現 ρ の**指標 (character)** とは，関数

$$\chi_\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C};\ \gamma \longmapsto \mathrm{tr}(\rho(\gamma))$$

のことをいう．ただし，tr は線形写像の trace を表す．表現の指標は，値が Γ の共役類によって決定される関数 (**類関数 (class function)**) であることに注意する．関数 $\phi, \psi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，その内積 (ϕ, ψ) を

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}$$

で定義する．ただし，$z \in \mathbb{C}$ に対して，$\bar{z}$ はその複素共役である．

本稿では，$\mathit{\Gamma}$ の既約指標全体を $\chi_1, \dots, \chi_k$ のように表す．このとき，$\{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ は $\mathit{\Gamma}$ の類関数からなる線形空間の正規直交基底をなしている．つまり，$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$ である．したがって，$\mathit{\Gamma}$ の任意の指標 χ は既約指標の和で

$$\chi = m_1\chi_1 + \cdots + m_k\chi_k$$

のように一意的に分解でき，各係数は $m_i = (\chi, \chi_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる．m_i は χ の χ_i における**重複度 (multiplicity)** という．

$\mathit{\Gamma}$ を有限群とし，$\mathit{\Gamma}$ が有限集合 X へ作用しているとする．すなわち，$\mathit{\Gamma}$ は X の対称群の部分群とみなせる．$\gamma \in \mathit{\Gamma}$ で不変な元の集合を X^γ で表す:

$$X^\gamma \coloneqq \left\{ x \in X \;\middle|\; \gamma x = x \right\}.$$

元 $x \in X$ の **$\mathit{\Gamma}$-軌道 ($\mathit{\Gamma}$-orbit)** とは，$\mathit{\Gamma}$ による像

$$\mathit{\Gamma}(x) \coloneqq \left\{ \gamma x \in X \;\middle|\; \gamma \in \mathit{\Gamma} \right\}$$

のことをいい，$x \in X$ の**固定部分群 (stabilizer subgroup)**[*1]とは，x を固定する元からなる部分群

$$\mathit{\Gamma}_x \coloneqq \left\{ \gamma \in \mathit{\Gamma} \;\middle|\; \gamma x = x \right\}$$

のことをいう．

有限群 $\mathit{\Gamma}$ が有限集合 X に作用しているとする．X で生成される $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}X \coloneqq \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}x$ に対して，$\mathit{\Gamma}$ の作用から表現 $\rho_X : \mathit{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}X)$ が自然に得られる．ρ_X を X の**置換表現 (permutation representation)**, その指標 χ_X を X の**置換指標 (permutation characrter)** という．X の置換表現 ρ_X における各元 $\gamma \in \mathit{\Gamma}$ の表現行列は置換行列となるため，置換指標 χ_X は,

$$\chi_X(\gamma) = \# X^\gamma \tag{2.1}$$

となることに注意する．特に，群 $\mathit{\Gamma}$ は元を左から掛けることで自分自身への作用を生む．この作用から従う置換表現を**正則表現 (regular representation)** という．その置換指標を χ_{R} で表すと，式 (2.1) より

$$\chi_{\mathrm{R}}(\gamma) = \begin{cases} \#\mathit{\Gamma} & \text{if } \gamma = 1; \\ 0 & \text{if } \gamma \neq 1. \end{cases}$$

がわかる．

2.2 Equivariant Ehrhart theory

$\mathit{\Gamma}$ を有限群とする．$L \cong \mathbb{Z}^\ell$ を格子とし，線形な作用 $\rho : \mathit{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ が与えられているとする．$\mathcal{P}$ を $\mathit{\Gamma}$ の作用で不変な格子多面体とし，これを q 倍した多面体上の格子点 $q\mathcal{P} \cap L$ を考える．この

[*1] 安定化部分群，等方部分群，isotropy group などともいう．

集合の元を単に数え上げるだけならば Ehrhart 多項式の理論に他ならないが，ここでは群 Γ の L への作用によって誘導する $q\mathcal{P} \cap L$ 上の置換指標 $\chi_{q\mathcal{P}}$ を考える．

このとき，置換指標 $\chi_{q\mathcal{P}}$ が q についてどのように依存しているのかが問題の一つである．特に Γ の単位元 1 に対しては，

$$\chi_{q\mathcal{P}}(1) = \#(q\mathcal{P} \cap L) = L_{\mathcal{P}}(q)$$

となり，これは単に Ehrhart 多項式である．一般には，次のようにして準多項式が現れることが知られている．

Theorem 2.1 ([Sta11, Theorem 5.7, Corollary 5.9])**.** 次の写像はいずれも準多項式である:

(1) $F : q \longmapsto \chi_{q\mathcal{P}}$;

(2) Γ の既約指標 χ に対して，$q \longmapsto (\chi, \chi_{q\mathcal{P}})$;

(1) の準多項式 F との詳細を述べる．F の各構成素は Γ の指標を係数に含む多項式で，その次数は $\dim \mathcal{P}$ に等しい．また，その最高次係数は $\frac{\operatorname{vol} \mathcal{P}}{\# \Gamma} \chi_{\mathrm{R}}$ である．$\mathcal{P}$ の代わりにその内部を考えた関数

$$F^* : q \longmapsto \#(\operatorname{int}(q\mathcal{P}) \cap L)^{\gamma}$$

との間には，Ehrhart reciprocity から得られる関係

$$F^*(q) = (-1)^{\dim \mathcal{P}} \det(\rho) F(-q) \tag{2.2}$$

が知られている．

Example 2.2. $L = \mathbb{Z}^2$ とし，γ を成分の入れ替えで定義する:

$$\gamma : (x, y) \longmapsto (y, x).$$

Γ は γ で生成される位数 2 の群とする．格子多面体 $\mathcal{P} = \operatorname{conv}\big\{(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)\big\}$ についての置換指標 $\chi_{q\mathcal{P}}$ を考える (図 2 参照).

Γ の単位元 1 に関しては，単に $\mathcal{P}$ の Ehrhart 多項式を計算すればよい:

$$\chi_{q\mathcal{P}}(1) = \#(q\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^2) = 2q^2 + 2q + 1.$$

$\mathcal{P}$ のうち，γ で固定される部分 $\mathcal{P}^{\gamma}$ は線分であり，この上の格子点の数え上げ関数は Example 1.1 で挙げた Ehrhart 多項式となる:

$$\chi_{q\mathcal{P}}(\gamma) = \begin{cases} q & \text{if } q \equiv 1 \pmod 2; \\ q+1 & \text{if } q \equiv 2 \pmod 2. \end{cases}$$

Γ の既約指標は自明な指標 $\mathbf{1}$ と行列式指標 $\boldsymbol{\delta}$ の 2 つである．これらを用いると

$$\begin{aligned} \chi_{q\mathcal{P}} &= \begin{cases} (\mathbf{1} + \boldsymbol{\delta})q^2 + (\frac{3}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta})q + \frac{1}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta} & \text{if } q \equiv 1 \pmod 2; \\ (\mathbf{1} + \boldsymbol{\delta})q^2 + (\frac{3}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta})q + \mathbf{1} & \text{if } q \equiv 2 \pmod 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (q^2 + \frac{3}{2}q + \frac{1}{2})\mathbf{1} + (q^2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2})\boldsymbol{\delta} & \text{if } q \equiv 1 \pmod 2; \\ (q^2 + \frac{3}{2}q + 1)\mathbf{1} + (q^2 + \frac{1}{2}q)\boldsymbol{\delta} & \text{if } q \equiv 2 \pmod 2. \end{cases} \end{aligned}$$

と計算できる．

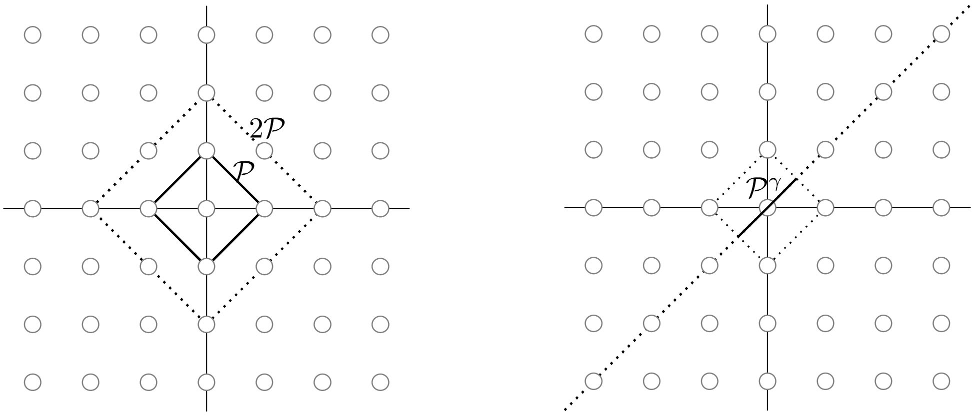

図 2　$\mathcal{P}$ (左)，$\mathcal{P}^{\gamma}$ (右).

3 Main results

3.1 Permutation representations on mod q lattices

我々の最終的な目標は，超平面配置の特性準多項式における同変版理論を構築することである．本稿では，$\mathcal{A} = \emptyset$ (空配置 (empty arrangement)) での結果を紹介する．

L を格子とし，L の $\mathbb{Z}$ に関する基底 $\{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$ をとる．すなわち，

$$L = \mathbb{Z}\beta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\beta_\ell$$

である．Γ を有限群とし，L への線形な作用 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ があるとする．各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，準同型 $\rho(\gamma)$ の表現行列を R_γ で表す．これによって，$\rho(\gamma)$ は行列倍の写像

$$\rho(\gamma) : x \longmapsto xR_\gamma$$

だとみなせる．

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$L_q := L/qL$ と定める．このとき，Γ の L への作用は q-reduction によって L_q への作用 ρ_q を誘導する:

$$\rho_q(\gamma) : L_q \longrightarrow L_q;\ x \longmapsto x[R_\gamma]_q.$$

作用 ρ_q に関する置換表現およびその指標 χ_{L_q} について調べることが本研究の主な内容である．

Remark 3.1. Γ が有限鏡映群，L が root lattice である場合には，L_q に関して Haiman [Hai94] や Rhoades [Rho14] によるいくつかの結果がある．しかし，いずれも q に関して，Coxeter 数と互いに素であるなどといった条件が付されている．

χ_{L_q} を Γ の既約指標 $\chi_1, \dots, \chi_k$ で分解すると，

$$\chi_{L_q} = (\chi_{L_q}, \chi_1)\chi_1 + \cdots + (\chi_{L_q}, \chi_k)\chi_k$$

となる．各既約指標 χ_i に対して $m(\chi_i; q) := (\chi_{L_q}, \chi_i)$ とおくと，$m(\chi_i; q)$ は q に関する非負整数値関数となる．本稿では，χ_{L_q} の代わりに，重複度の関数 $m(\chi_i; q)$ をよく考える．

Remark 3.2. Γ の 1 次元指標 λ に対しては,

$$m(\lambda;\, q) = \#\left\{\, \Gamma(x) \;\middle|\; x \in q\mathcal{P} \cap L,\ \Gamma_x \subseteq \lambda^{-1}(1) \,\right\}$$

となり，重複度の関数が Γ-軌道に関する数え上げ関数になっている．特に，λ が自明な指標 $\mathbf{1}$ であるとき，$m(\mathbf{1};\, q)$ は Γ-軌道の総数を数える関数である

本稿における主結果は次の通りである．

Theorem 3.3. 次の写像は gcd-property をもつ準多項式である:

(1) $m(\chi_i;\, q)$;

(2) $q \longmapsto \chi_{L_q}$.

Theorem 2.1 と同様にして，(1) と (2) は同値である．したがって，(1) が準多項式であることを示し，(2) をその系として与える．証明の途中で，関数 $m(\chi_i;\, q)$ の具体的表示や準多項式としての周期についても述べる．

Proof. 各既約指標 χ_i に対して，$m(\chi_i;\, q)$ はその定義から

$$m(\chi_i;\, q) = (\chi_{L_q}, \chi_i) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_{L_q}(\gamma)\chi_i(\gamma) \tag{3.1}$$

となることがわかる．右辺のうち，q に依存するのは $\chi_{L_q}(\gamma)$ だけであるから，これが q に関して準多項式となることがわかればよい．実際，表現行列 R_γ と単位行列 I による写像

$$\varphi_{q,\gamma} : L_q \longrightarrow L_q;\ x \longmapsto x[R_\gamma - I]_q$$

に対して，(2.1) より

$$\begin{aligned}
\chi_{L_q}(\gamma) &= \#\left\{\, x \in L_q \;\middle|\; \gamma x = x \,\right\} \\
&= \#\left\{\, x \in L_q \;\middle|\; x[R_\gamma]_q = x \,\right\} \\
&= \#\left\{\, x \in L_q \;\middle|\; x[R_\gamma - I]_q = 0 \,\right\} \\
&= \#\ker \varphi_{q,\gamma}
\end{aligned}$$

となるため，Lemma 1.2 より $\chi_{L_q}(\gamma)$ が準多項式であるとわかる．さらに，式 (3.1) に戻すことで,

$$m(\chi_i;\, q) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_i(\gamma) \left(\prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, q\} \right) q^{\ell - r(\gamma)} \tag{3.2}$$

が得られる．ただし，$r(\gamma) = \operatorname{rank}(R_\gamma - I)$ であり，$e_{\gamma,1}, \ldots, e_{\gamma,r(\gamma)}$ は $R_\gamma - I$ の単因子である．また，単因子が $e_{\gamma,1} \mid e_{\gamma,2} \mid \cdots \mid e_{\gamma,r(\gamma)}$ を満たしているとする．

$$\tilde{n} \coloneqq \operatorname{lcm}\left\{\, e_{\gamma,r(\gamma)} \;\middle|\; \gamma \in \Gamma \setminus \{1\} \,\right\} \tag{3.3}$$

とおくとき，$e_{\gamma,r(\gamma)} \mid \tilde{n}$ であるから

$$\prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, q\} = \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, \tilde{n}, q\} = \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\Big\{e_{\gamma,j},\ \gcd\{\tilde{n}, q\}\Big\}$$

となり，$\tilde{n}$ が準多項式 $\chi_{L_q}(\gamma)$ の周期であること，χ_{L_q} が gcd-property をもつことがわかる． □

(3.3) で得られる準多項式の周期 $\tilde{n}$ を **lcm-周期 (lcm-period)** と呼ぶ．

Corollary 3.4. 自明な指標 $\mathbf{1}$ の重複度 $m(\mathbf{1};\, q)$ と χ_{L_q} における lcm-周期 $\tilde{n}$ は最小周期である．

Remark 3.5. $m(\chi_i;\, q)$ は $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ ごとに非負整数値をとるが，準多項式の各構成素が整数係数の多項式になるとは限らない．同様に，χ_{L_q} は q ごとに Γ の指標となるが，準多項式としてみたときの各係数が Γ の指標であるとは限らない．すなわち，$\chi_1, \ldots, \chi_k$ の一次結合として表したとき，各係数が非負整数値をとるとは限らない．

3.2 Leading terms and relationship between components

Proposition 3.6. 準多項式 $m(\chi_i;\, q)$ の最高次の項は $\frac{\chi_i(1)}{\#\Gamma} q^\ell$ である．すなわち，χ_{L_q} の q に関する準多項式としての最高次の項は $\frac{\chi_{\mathrm{R}}}{\#\Gamma} q^\ell$ である．

Proof. 式 (3.2) によれば，$m(\chi_i;\, q)$ は高々 ℓ 次多項式であり，q^ℓ の項は $r(\gamma) = 0$ となる $\gamma \in \Gamma$ に対してのみ現れる．$r(\gamma) = 0$ であるためには $\mathrm{b}\gamma = 1$ であることが必要十分であるから，$m(\chi_i;\, q)$ の最高次の項は $\frac{\chi_i(1)}{\#\Gamma} q^\ell$ である．

既約分解 $\chi_{L_q} = m(\chi_1;\, q)\chi_1 + \cdots + m(\chi_k;\, q)\chi_k$ によれば，χ_{L_q} は q の準多項式として次数 ℓ であり，ℓ 次の係数は

$$\frac{\chi_1(1)}{\#\Gamma}\chi_1 + \cdots + \frac{\chi_k(1)}{\#\Gamma}\chi_k = \frac{\chi_{\mathrm{R}}}{\#\Gamma}.$$

となる． □

$\tilde{n}$ を χ_{L_q} の lcm-周期とする．各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，行列 $R_\gamma - I$ の最大単因子を e_γ で表す．準多項式 $m(\chi_i;\, q)$ の第 d 構成素を $m(\chi_i;\, t)_d$ で表す．

Proposition 3.7. d_1, d_2 を $\tilde{n}$ の正の約数とする．正整数 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$r(\gamma) < s$ を満たす任意の $\gamma \in \Gamma$ が $\gcd\{e_\gamma, d_1\} = \gcd\{e_\gamma, d_2\}$ を満たしているとき，

$$\deg\Big(m(\chi;\, t)_{d_1} - m(\chi;\, t)_{d_2}\Big) \le \ell - s.$$

Proof. $m(\chi;\, t)_{d_1} - m(\chi;\, t)_{d_2}$ の $\ell - s$ より大きい次数をもつ部分は

$$\frac{1}{\#\Gamma} \sum_{r(\gamma)<s} \chi(\gamma) \left(\prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_1\} - \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_2\} \right) t^{\ell - r(\gamma)} \tag{3.4}$$

となる．仮定をすべて満たすとき，

$$\gcd\{e_{\gamma,j}, d_1\} = \gcd\{e_{\gamma,j}, e_\gamma, d_1\} = \gcd\{e_{\gamma,j}, e_\gamma, d_2\} = \gcd\{e_{\gamma,j}, d_2\}$$

であるから，多項式 (3.4) は零であるとわかる． □

Proposition 3.8. $\tilde{n}$ の正の約数 d_1, d_2 が互いに素であるとする．正整数 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$r(\gamma) < s$ を満たす任意の $\gamma \in \Gamma$ が $\gcd\{e_\gamma, d_1\} = 1$ または $\gcd\{e_\gamma, d_2\} = 1$ を満たしているとき，

$$\deg\Big(m(\chi;\, t)_1 - m(\chi;\, t)_{d_1} - m(\chi;\, t)_{d_2} + m(\chi;\, t)_{d_1 d_2}\Big) \leq \ell - s.$$

Proof. $m(\chi;\, t)_1 - m(\chi;\, t)_{d_1} - m(\chi;\, t)_{d_2} + m(\chi;\, t)_{d_1 d_2}$ の $\ell - s$ より大きい次数をもつ部分は

$$\frac{1}{\#\Gamma} \sum_{r(\gamma)<s} \chi(\gamma) \left(1 - \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_1\} - \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_2\} + \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_1 d_2\}\right) t^{\ell - r(\gamma)} \quad (3.5)$$

となる．等式

$$\begin{aligned}&\left(1 - \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_1\} - \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_2\} + \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_1 d_2\}\right) \\ &\qquad = \left(1 - \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_1\}\right)\left(1 - \prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, d_2\}\right)\end{aligned}$$

に注意すれば，仮定をすべて満たすとき，多項式 (3.5) は零である． □

Remark 3.9. 特性準多項式についても，Proposition 3.7，Proposition 3.8 と同様の命題 [KTT08, Corollary 2.3 and Corollary 2.4] が知られている．また，その証明も同様に行われている．

3.3 Reciprocity for the multiplicities

Γ 上の関数 $\boldsymbol{\delta} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\boldsymbol{\delta}(\gamma) \coloneqq (-1)^{r(\gamma)} \quad (3.6)$$

で定める．ただし，$r(\gamma) \coloneqq \operatorname{rank}(R_\gamma - I)$ である．R_γ の対角化を考えることで，$\boldsymbol{\delta} = \det(\rho)$ であることがわかる [UY24, Lemma 2.9]．よって，$\boldsymbol{\delta}$ は Γ の 1 次元既約指標であるため，Γ の既約指標 χ_i に対して，積 $\chi_i \otimes \boldsymbol{\delta}$ もまた Γ の既約指標である．このとき，式 (3.2) を計算することで，関数 $m(\chi_i;\, q)$ と $m(\chi_i \otimes \boldsymbol{\delta};\, q)$ について次のような関係が得られる．

Theorem 3.10 (Reciprocity theorem, [UY24, Theorem 2.10])**.** Γ の既約指標 χ_i に対して，

$$m(\chi_i \otimes \boldsymbol{\delta};\, q) = (-1)^\ell m(\chi_i;\, -q).$$

特に，$\boldsymbol{\delta}$ が自明な指標であるとき，$m(\chi_i;\, q)$ は偶関数または奇関数のいずれかである．

この関係は，準多項式 $F : q \longmapsto \chi_{L_q}$ に関する次の関係式を誘導する:

$$F(q) = (-1)^{\ell} \boldsymbol{\delta} F(-q). \tag{3.7}$$

この関係式は，Equivariant Ehrhart 理論において Ehrhart reciprocity から得られていた関係式 (2.2) と酷似しているようにみえる．しかし，式 (3.7) は写像 F の自己双対的な性質を表していて，式 (2.2) は性質の異なるものである．

3.4 Examples

本稿の最後に，例を紹介する．

Example 3.11. Γ を γ で生成される 6 次巡回群とする．Γ の既約指標は，群準同型

$$\chi : \gamma \longmapsto \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{6}\right)$$

によって得られる $\chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^4, \chi^5, \chi^6$ である．ただし，χ^6 は自明な指標 $\mathbf{1}$ である．

$L = \mathbb{Z}\beta_1 \oplus \mathbb{Z}\beta_2 \cong \mathbb{Z}^2$ とし，Γ が

$$\gamma(\beta_1) = \beta_1 + \beta_2, \quad \gamma(\beta_2) = -\beta_1$$

で作用しているとする．このとき，

$$\begin{aligned}
L_q^{\gamma} = L_q^{\gamma^5} &= \{0\}, \\
L_q^{\gamma^2} = L_q^{\gamma^4} &= \begin{cases} \{0\} & \text{if } \gcd\{3, q\} = 1; \\ \left\{0,\ \dfrac{q}{3}(2\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2),\ \dfrac{q}{3}(\bar{\beta}_1 + 2\bar{\beta}_2)\right\} & \text{if } \gcd\{3, q\} = 3, \end{cases} \\
L_q^{\gamma^3} &= \begin{cases} \{0\} & \text{if } \gcd\{2, q\} = 1; \\ \left\{0,\ \dfrac{q}{2}\bar{\beta}_1,\ \dfrac{q}{2}\bar{\beta}_2,\ \dfrac{q}{2}(\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2)\right\} & \text{if } \gcd\{2, q\} = 2, \end{cases} \\
L_q^{\gamma^6} &= L_q
\end{aligned}$$

である (図 3 参照)．ただし，$\bar{\beta}_i$ は β_i を含む同値類を表す．$\chi_{L_q}(\gamma) = \#L_q^{\gamma}$ であるから，χ_{L_q} が周期

6 の準多項式であるとわかる．実際,

$$\chi_{L_q} = \begin{cases} \dfrac{q^2-1}{6}(\chi^1+\chi^2+\chi^3+\chi^4+\chi^5) + \dfrac{q^2+5}{6}\chi^6 & \gcd\{6,q\}=1; \\ \dfrac{q^2-4}{6}(\chi^1+\chi^3+\chi^5) + \dfrac{q^2+2}{6}(\chi^2+\chi^4) + \dfrac{q^2+8}{6}\chi^6 & \gcd\{6,q\}=2; \\ \dfrac{q^2-3}{6}(\chi^1+\chi^2+\chi^4+\chi^5) + \dfrac{q^3+3}{6}\chi^3 + \dfrac{q^2+9}{6}\chi^6 & \gcd\{6,q\}=3; \\ \dfrac{q^2-6}{6}(\chi^1+\chi^5) + \dfrac{q^2}{6}(\chi^2+\chi^3+\chi^4) + \dfrac{q^2+12}{6}\chi^6 & \gcd\{6,q\}=6 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{6}\Big(\chi_{\mathrm{R}}q^2 + 6(\mathbf{1}) - \chi_{\mathrm{R}}\Big) & \gcd\{6,q\}=1; \\ \dfrac{1}{6}\Big(\chi_{\mathrm{R}}q^2 + 12(\mathbf{1}) + 6(\chi^2+\chi^4) - 4\chi_{\mathrm{R}}\Big) & \gcd\{6,q\}=2; \\ \dfrac{1}{6}\Big(\chi_{\mathrm{R}}q^2 + 12(\mathbf{1}) + 6\chi^3 - 3\chi_{\mathrm{R}}\Big) & \gcd\{6,q\}=3; \\ \dfrac{1}{6}\Big(\chi_{\mathrm{R}}q^2 + 18(\mathbf{1}) + 6(\chi^2+\chi^3+\chi^4) - 6\chi_{\mathrm{R}}\Big) & \gcd\{6,q\}=6 \end{cases}$$

となる．ただし，$\chi_{\mathrm{R}} = \chi + \chi^2 + \chi^3 + \chi^4 + \chi^5 + \chi^6$ である．また，(3.6) で定まる $\boldsymbol{\delta}$ は自明な指標であるから，χ_{L_q} および各 $m(\chi^i; q)$ は q について偶関数となっている．

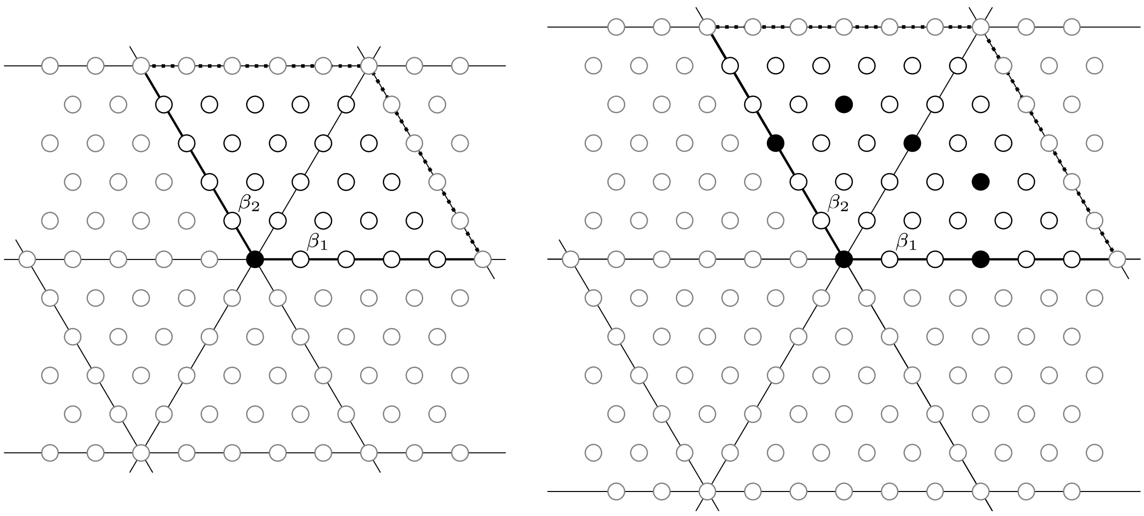

図 3　lattice L と $L/5L$ (左)．$L/6L$ (右)．● は位数 6 未満の点である．

References

[BR07] M. Beck and S. Robins, *Computing the continuous discretely*, Undergraduate Texts in Mathematics, vol. 285, Springer New York, Berlin, Heidelberg, October 2007.

[Hai94] M. D. Haiman, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, Journal of Algebraic Combinatorics **3** (1994), 17–76.

[KTT08] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao, *Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers*, Journal of Algebraic Combinatorics **27** (2008), no. 3, 317–330.

[Rho14] B. Rhoades, *Parking structures: Fuss analogs*, Journal of Algebraic Combinatorics **40** (2014), no. 2, 417–473.

[Sta11] A. Stapledon, *Equivariant ehrhart theory*, Advances in Mathematics **226** (2011), no. 4, 3622–3654.

[UY24] R. Uchiumi and M. Yoshinaga, *The quasi-polynomiality of mod q permutation representation for a linear finite group action on a lattice*, 2024.

[Yos18] M. Yoshinaga, *Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials*, Tohoku Mathematical Journal **70** (2018), no. 1, 39–63.