CMPP 予想についての注意

（Remarks on CMPP conjecture）

東京科学大学情報理工学院　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*

Department of Mathematical and Computing Science, School of Computing, Institute of Science Tokyo

1　はじめに

Rogers-Ramanujan 分割定理（以下，RR 分割定理）の一般化として，Andrews-Gordon 分割定理

> $0 \leq a \leq k$ を固定する（ただし $k \geq 1$）．任意の $n \geq 0$ について，n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ で，条件 (A) を満たすものは，条件 (B) を満たすものと同数存在する．
>
> (A) $f_1(\lambda) \leq a$ かつ $1 \leq \forall i \leq \ell - k, \lambda_i - \lambda_{i+k} \geq 2$.
>
> (B) $1 \leq \forall i \leq \ell, \lambda_i \not\equiv 0, \pm(a+1) \pmod{2k+3}$.

を思い出す [17, §3.2]（$k=1$ が RR 分割定理である）．ここで $f_i(\lambda) = |\{j \mid \lambda_j = i\}|$ は λ 中の i の個数である．条件 (A) は「$f_1(\lambda) \leq a$ かつ $\forall i \geq 1, f_i(\lambda) + f_{i+1}(\lambda) \leq k$」とも言いかえられることを注意する．これの一般化として Capparelli-Meurman-Primc-Primc 予想（以下，CMPP 予想）があり，2024 年 10 月の RIMS 研究集会「組合せ論的表現論の発展」で，共著論文 [6] について発表させていただいた．

2　CMPP 予想

CMPP 予想 [2, 12] は 3 つの命題からなる．まず，適当な $\ell+1$ 色分割からなる集合 $\mathrm{CMPP}_1(k_0, \ldots, k_\ell)$ を定義しよう（ここで $\ell \geq 1$ で，$k_0, \ldots, k_\ell \geq 0$ である）．例で説明したほうが分かりやすいと思われるので，$\ell = 3$ で説明する．与えられた $k_0, \ldots, k_3$ について，以下のような配列を考える．

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
k_3 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 & & \\
& 0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 & \\
k_2 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 & & \\
& 0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 & \cdots \\
k_1 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 & & \\
& 0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 & \\
k_0 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 & &
\end{array}
$$

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University, JSPS Kakenhi Grant 23K03051, JST CREST Grant Number JPMJCR2113, Japan.

ここで，下の一段目が 0 色目の色がついた奇数分割 $\lambda^{(0)}$ の $f_1(\lambda^{(0)})$, $f_3(\lambda^{(0)})$,... を意味しており，下から 2 段目と 3 段目が 1 色目の色がついた分割 $\lambda^{(1)}$ の $f_1(\lambda^{(1)})$, $f_2(\lambda^{(1)})$,... を意味している．この調子で，上の 1 段目と 2 段目が ℓ 色目の色がついた分割 $\lambda^{(\ell)}$ の $f_1(\lambda^{(\ell)})$, $f_2(\lambda^{(\ell)})$,... を意味している．$\ell+1$ 色分割 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell)})$（ただし $\lambda^{(0)}$ は奇数分割である）が，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathrm{CMPP}_1(k_0,\dots,k_\ell)$ とは，任意の downward path P について，P 上の数の合計が $k:=k_0+\cdots+k_\ell$ 以下であることと定義する．downward path とは，配列を左下または右下に進む道のことである．

さらに $n\geq 0$ について

$$\mathrm{CMPP}_1(k_0,\dots,k_\ell)(n)=\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathrm{CMPP}_1(k_0,\dots,k_\ell)\mid n=|\boldsymbol{\lambda}|(:=|\lambda^{(0)}|+\cdots+|\lambda^{(\ell)}|)\}$$

とする．CMPP 予想の 1 つ目の命題は

> $\sum_{n\geq 0}|\mathrm{CMPP}_1(k_0,\dots,k_\ell)(n)|q^n$ は，$C_\ell^{(1)}$ 型アフィン・リー環の標準加群 $V_{C_\ell^{(1)}}(k_0\Lambda_0+\cdots+k_\ell\Lambda_\ell)$ の指標（の主特殊化，すなわち $e^{-\alpha_i}\mapsto q$）$\mathrm{ch}\,V_{C_\ell^{(1)}}(k_0\Lambda_0+\cdots+k_\ell\Lambda_\ell)$ と一致するだろう．

というものである [2, Conjecture 3.3]．ただし $\ell=1$ のとき，$C_1^{(1)}=A_1^{(1)}$ とする．

$\mathrm{ch}\,V_{C_\ell^{(1)}}(k_0\Lambda_0+\cdots+k_\ell\Lambda_\ell)$ は，Weyl-Kac 指標公式から求めることが可能で（Lepowsky 分子公式），具体形は省略するが，$\mathrm{ch}\,V_{C_1^{(1)}}(\Lambda_0+\Lambda_1)=(q^2;q^4)_\infty/(q,q,q^3,q^3;q^4)_\infty$ といった具合である．

この予想は，$\ell=1$ のときは Meurman-Primc による定理である [10]．さらに講演では， [10] の簡単な解説を行うことによって，この予想の affine VOA の観点からの出自 [13, 14] を説明した．なお $k=1$ のときも示されている [3, 5, 16]．最近 $k_1=\cdots=k_\ell=0$ の場合も示された [15]．

次に，ℓ 色分割の部分集合 $\mathrm{CMPP}_2(k_0,\dots,k_\ell)$（および $\mathrm{CMPP}_2(k_0,\dots,k_\ell)(n)$）を，以下の配列（ただしこれは $\ell=3$ の例である）から CMPP_1 と同様に定義する（$\ell\geq 1$，$k_0,\dots,k_\ell\geq 0$）．

$$\begin{array}{cccccccccccc}
k_3 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 & & & \\
& 0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 & & \\
k_2 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 & & & \\
& 0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 & \cdots & \\
k_1 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 & & & \\
& k_0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 & &
\end{array}$$

$\ell=1$ のとき $\mathrm{CMPP}_2(k_0,k_1)$ は，Andrews-Gordon 分割定理で $k=k_0+k_1$, $a=k_1$ とした分割の集合である． [2, Conjecture 4.1] では，$\sum_{n\geq 0}|\mathrm{CMPP}_2(k_0,\dots,k_\ell)(n)|q^n$ の無限積表示を具体的に予想している． [6, (1.5), Appendix A] では，この無限積が $A_{2\ell}^{(2)}$ 型アフィン・リー環の標準加群の非標準的な特殊化で得られることを示した．これによって，CMPP 予想の 2 つ目の命題は

> $\sum_{n\geq 0}|\mathrm{CMPP}_2(k_0,\dots,k_\ell)(n)|q^n$ は，$A_{2\ell}^{(2)}$ 型アフィン・リー環の標準加群 $V_{A_{2\ell}^{(2)}}(2k_0\Lambda_0+k_1\Lambda_1+\cdots+k_\ell\Lambda_\ell)$ の指標の特殊化 $e^{-\alpha_0}\mapsto -1, e^{-\alpha_1}\mapsto q,\dots,e^{-\alpha_\ell}\mapsto q$ と一致するだろう．

と,（無限積側が）表現論的に言いかえられたことになる．

残った $\mathrm{CMPP}_3(k_0,\dots,k_\ell)$ の定義 [12] はここでは行わないが，CMPP_1, CMPP_2 と同様に，適当な ℓ 色分割として定義される． [6, (2.5), Appendix A] において， [12, Conjecture 2.1] で予想された $\sum_{n\geq 0}|\mathrm{CMPP}_3(k_0,\dots,k_\ell)(n)|q^n$ の無限積表示は，$D_{\ell+1}^{(2)}$ 型アフィン・リー環の標準加群 $V_{D_{\ell+1}^{(2)}}(2k_0\Lambda_0+k_1\Lambda_1+\cdots+k_{\ell-1}\Lambda_{\ell-1}+2k_\ell\Lambda_\ell)$ の指標の（非標準的な）特殊化 $e^{-\alpha_0}\mapsto -1, e^{-\alpha_1}\mapsto q,\dots,e^{-\alpha_{\ell-1}}\mapsto q, q^{-\alpha_\ell}=-1$ と一致することを示した．以上により CMPP 予想の 3 つの命題は，$C_\ell^{(1)}, A_{2\ell}^{(2)}, D_{\ell+1}^{(2)}$ 型アフィン・リー環と関係していることが分かったことになる．なお $\mathrm{CMPP}_2,\mathrm{CMPP}_3$ に関しても，$k_0+\cdots+k_\ell=1$ のときは示されている [5, 16].

3 Hall-Littlewood 関数および Griffin-Ono-Warnaar 恒等式

RR 分割定理は，$A_1^{(1)}$ 型レベル 3 の標準加群を用いた principal picture の頂点作用素の解釈を持つ [7]．homogeneous picture における RR 型分割定理の研究も [8] 以来さかんである．CMPP 予想もその一例と考えられる．一方で，RR 分割定理には Hall-Littlewood 関数 $P_\mu(t)$ を用いた研究も [18] 以来なされており（教科書の解説に [1] もある），GOW 恒等式 [4] は有名である（著者の 1 人の自伝風の本 [11] で経緯が簡単にふれられている）．講演では $\mathrm{CMPP}_i(k,0,\dots,0)$（$i=1,2,3$）と $\mathrm{CMPP}_2(0,\dots,0,k)$ に対するアプローチとして，GOW 恒等式との関連についての予想を述べた．

まず $\sum_{\mu_1\le m} q^{a|\mu|}P_{2\mu}(1,q,q^2,\dots;q^{2n+b})$ が具体的な無限積表示を持つ場合として，[4, Theorem 1.1, Theorem 1.2, Theorem 1.3] がある．この無限積表示は $\mathrm{CMPP}_2(0,\dots,0,k)$, $\mathrm{CMPP}_2(k,0,\dots,0)$, $\mathrm{CMPP}_1(k,0,\dots,0)$, $\mathrm{CMPP}_3(k,0,\dots,0)$ と同じである，という観察を発展させて，$\mathrm{CMPP}_2(0,\dots,0,k)$, $\mathrm{CMPP}_2(k,0,\dots,0)$ に関して，次の予想を提出した [6, Conjecture 1.4].

> $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{CMPP}_2(0,\dots,0,k)} z^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|} = \sum_{\mu_1\le k}(zq)^{|\mu|}P_{2\mu}(1,q,q^2,\dots;q^{2n-1})$ が成り立つだろう．同様に，
> $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{CMPP}_2(k,0,\dots,0)} z^{\ell(\lambda)}q^{|\lambda|} = \sum_{\mu_1\le k}(zq^2)^{|\mu|}P_{2\mu}(1,q,q^2,\dots;q^{2n-1})$ が成り立つだろう．

ただし $0,\dots,0$ は，0 の n 個の繰り返しを意味する．$\mathrm{CMPP}_1(k,0,\dots,0)$ と $\mathrm{CMPP}_3(k,0,\dots,0)$ とに関する，[4, Theorem 1.2, Theorem 1.3] の z-enhancement に関する予想については，[6, Conjecture 4.7] を参照されたい．これらが示されれば，$z=1$ とすることで，[4] から $\mathrm{CMPP}_2(0,\dots,0,k)$, $\mathrm{CMPP}_2(k,0,\dots,0)$, $\mathrm{CMPP}_1(k,0,\dots,0)$, $\mathrm{CMPP}_3(k,0,\dots,0)$ についての CMPP 予想が示されることになる（前節で述べたように，$\mathrm{CMPP}_1(k,0,\dots,0)$ については [15] で示されている）．

さて [9, p.213] にあるように r を分割 μ の共役とすると

$$(zq)^{|\mu|}P_{2\mu}(1,q,q^2,\dots;q)=\prod_{i\ge1}\frac{z^{r_i}q^{r_i^2}}{(q;q)_{r_i-r_{i+1}}}$$

が成り立つ．よって $n=1$ のとき

$$\sum_{\mu_1\le k}(zq)^{|\mu|}P_{2\mu}(1,q,q^2,\dots;q)=\sum_{r_1,\dots,r_k\ge0}\prod_{i=1}^{k}\frac{z^{r_i}q^{r_i^2}}{(q;q)_{r_i-r_{i+1}}}$$

である．右辺は Andrews-Gordon 分割定理の（$a=k$ の場合の）分割集合の母関数の表示として有名である（$k=1$ が RR 恒等式であった）．これに動機付けられて，[6, Conjecture 2.2] では

> $k\ge1$ について，$\displaystyle\sum_{\mu_1\le k}(zq)^{|\mu|}P_{2\mu}(1,q,q^2,\dots;q^2)=\sum_{\substack{r_1,\dots,r_k\ge0\\ s_1,\dots,s_k\ge0}}\prod_{i=1}^{k}\frac{z^{r_i+s_i}q^{(r_i+s_i)^2+s_i^2+s_i}}{(q;q)_{r_i-r_{i+1}}(q^2;q^2)_{s_i-s_{i-1}}}$ が成り立つだろう．ただし $r_{k+1}=0=s_0$ とする．

を予想として提出した．[6, Conjecture 2.2, Conjecture 4.7] と [4, Theorem 1.2] は

> $\displaystyle\sum_{\substack{r_1,\dots,r_k\ge0\\ s_1,\dots,s_k\ge0}}\prod_{i=1}^{k}\frac{q^{(r_i+s_i)^2+s_i^2+s_i}}{(q;q)_{r_i-r_{i+1}}(q^2;q^2)_{s_i-s_{i-1}}}=\frac{(q,q^{k+1},q^{k+2};q^{k+2})_\infty}{(q;q^2)_\infty(q;q)_\infty}$ が成り立つだろう．

といった新しい RR 型恒等式（現状は予想である）をもたらし，興味深い．ここで右辺は $\mathrm{ch}\,V_{C_1^{(1)}}(k\Lambda_0)$ である．[6, Conjecture 2.2, Conjecture 4.7] と [4, Theorem 1.3] から得られる，RR 型恒等式の予想については [6, Conjecture 4.9] の下の式を参照されたい．

4　まとめ

CMPP_1 は $C_n^{(1)}$ 型アフィン VOA に出自を持つが，それの組合せ論的類似である $\mathrm{CMPP}_2, \mathrm{CMPP}_3$ は指標の非標準的な特殊化を通して $A_{2n}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$ 型アフィン・リー環とも関連することが分かった．頂点作用素だけではなく Hall-Littlewood 関数との関係も予想される．

講演の機会を与えてくださった小寺諒介さんに感謝いたします．ありがとうございました．

参考文献

[1] H-C. Chan, *An Invitation to q-series, From Jacobi's Triple Product Identity to Ramanujan's "most beautiful identity"*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.

[2] S. Capparelli, A. Meurman, A. Primc and M. Primc, *New partition identities from $C_\ell^{(1)}$-modules*, Glas.Mat.Ser.III **57(77)** (2022), no.2, 161–184.

[3] J. Dousse and I. Konan, *Characters of level 1 standard modules of $C_n^{(1)}$ as generating functions for generalised partitions*, arXiv:2212.12728

[4] J.M. Griffin, K. Ono and S.O. Warnaar, *A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties*, Duke Math.J. **165** (2016), no.8, 1475–1527.

[5] N. Jing, K. Misra and C.D. Savage, *On multi-color partitions and the generalized Rogers-Ramanujan identities*, Commun.Contemp.Math.**3** (2001), no.4, 533–548.

[6] S. Kanade, M.C. Russell, S. Tsuchioka and S.O. Warnaar, *Remarks on the conjectures of Capparelli, Meurman, Primc and Primc* arXiv:2404.03851

[7] J. Lepowsky and R. Wilson, *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent.Math. **77** (1984), 199–290.

[8] J. Lepowsky and M. Primc, *Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$*, Contemp.Math. **46** AMS (1985).

[9] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[10] A. Meurman and M. Primc, *Annihilating fields of standard modules of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})^\sim$ and combinatorial identities*, Mem.Amer.Math.Soc.**137** (1999), no.652, viii+89pp.

[11] K. Ono and A.D. Aczel, *My Search for Ramanujan. How I Learned to Count*, Springer, Cham, 2016.

[12] M. Primc, *New partition identities for odd W odd*, Rad Hrvat.Akad.Znan.Umjet.Mat.Znan. **28(558)** (2024), 49–56.

[13] M. Primc and T. Šikić, *Combinatorial bases of basic modules for affine Lie algebras $C_n^{(1)}$*, J.Math.Phys.**57** (2016), no.9, 19 pp.

[14] M. Primc and T. Šikić, *Leading terms of relations for standard modules of the affine Lie algebras $C_n^{(1)}$*, Ramanujan J.**48** (2019), no.3, 509–543.

[15] M. Primc and G. Trupčević, *Linear independence for $C_\ell^{(1)}$ by using $C_{2\ell}^{(1)}$*, J.Algebra **661** (2025), 341–356.

[16] M.C. Russell, *Companions to the Andrews-Gordon and Andrews-Bressoud identities, and recent conjectures of Capparelli, Meurman, Primc, and Primc*, arXiv:2306.16251

[17] A.V. Sills, *An Invitation to the Rogers-Ramanujan Identities. With a Foreword by George E. Andrews*, CRC Press, (2018).

[18] J.R. Stembridge, *Hall-Littlewood functions, plane partitions, and the Rogers-Ramanujan identities*, Trans.Amer.Math.Soc.**319** (1990), no.2, 469–498.