# Bose–Mesner 代数に基づいたアソシエーションスキームの代数的一般化

広島大学先進理工系科学研究科
小川 健翔 *
Kento Ogawa
GRADUATE SCHOOL OF ADVANCED SCIENCE AND ENGINEERING, HIROSHIMA UNIVERSITY

## 1 序文

アソシエーションスキームは代数的組合せ論における重要な対象の一つであり, 有限等質空間の一般化でもある. 有限等質空間に Hecke 環が付随するのと同様に, アソシエーションスキームには Bose–Mesner 代数と呼ばれる代数が付随する. そして, 有限等質空間と同様に, アソシエーションスキームにおいても Bose–Mesner 代数が持つ代数構造を通して調和解析を展開することができる ([1]). Bose–Mesner 代数を調べることは, アソシエーションスキームの研究における重要な研究手法の一つである.

Bose–Mesner 代数を含む純代数的な枠組みはいくつか知られている ([2, 3, 5, 6]). 本稿では, Bose–Mesner 代数が持つ二つの Hilbert 代数構造に着目し, "代数" の定式化を一つ与える. その定式化を与えたことが本稿で紹介する主結果である.

## 2 アソシエーションスキームと Hilbert 代数

本節ではアソシエーションスキームと Hilbert 代数について簡単に復習をする.

有限集合 $X$ に対して $X$ 上の複素数値関数のなす集合を $C(X)$ と書き, $M_X(\mathbb{C}) = C(X \times X)$ と書く. $M_X(\mathbb{C})$ は $|X|$ 次複素正方行列の集合と同一視できる. 有限集合 $X$

* Email address: knt-ogawa@hiroshima-u.ac.jp
本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2132 の支援を受けたものである.

に対し, $M_X(\mathbb{C})$ の行列積に関する単位元 (つまり単位行列) を $I_X$ と書き, Hadamard 積に関する単位元を $J_X$ と書く. 有限集合の間の写像 $f\colon X \to Y$ に対して $f$ が誘導する $C(Y)$ から $C(X)$ への写像を $f^\dagger$ と書く.

## 2.1 アソシエーションスキーム

$X$ と $\mathcal{I}$ を空でない有限集合とし, $R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を全射な写像とする.

**定義 2.1.** 組 $(X, R, \mathcal{I})$ が**アソシエーションスキーム**であるとは, 以下の三条件を満たすときをいう:

(i) 像 $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ は行列積に関して閉じている.
(ii) 単位行列 $I_X$ は $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ の原始的な単位元である.
(iii) 像 $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ は転置に関して閉じている.

アソシエーションスキーム $(X, R, \mathcal{I})$ に対して $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ のことを $X$ の **Bose–Mesner 代数**と呼ぶ. アソシエーションスキームが**可換**であるとはその Bose–Mesner 代数が可換であるときをいう.

次に述べる例は有限等質空間がアソシエーションスキームであることを示す重要な例である.

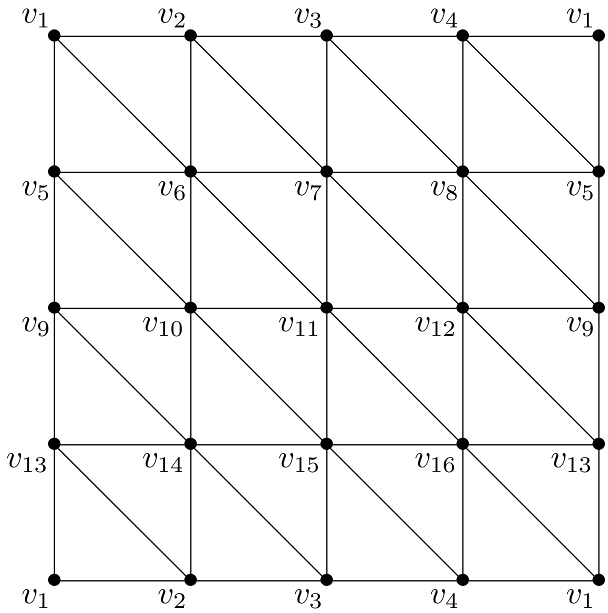
**例 2.2.** $G$ を有限群とし, $X$ を有限 $G$ 等質空間とする. $G$ の $X \times X$ への対角的な作用を考え, $\mathcal{I} \coloneqq G\backslash(X \times X)$ と定める. 標準的な商写像 $X \times X \to \mathcal{I}$ を $R$ と書く. このとき組 $(X, R, \mathcal{I})$ はアソシエーションスキームである. このアソシエーションスキームは **Schurian スキーム**と呼ばれる. この場合の Bose–Mesner 代数は $\mathrm{Hom}_G(C(X), C(X))$ と同型である.

**例 2.3.**

(1) $G \coloneqq \mathbb{F}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, $X \coloneqq \mathbb{F}_2^n$ として得られる Schurian スキームを *Hamming* スキームという.
(2) $V$ を $n$ 元集合とする. $G \coloneqq \mathfrak{S}_n$, $X \coloneqq \binom{V}{d} \coloneqq \{x \subseteq V \mid \#(x) = d\}$ $(d \leq \frac{n}{2})$ として得られる Schurian スキームを *Johnson* スキームという.

Schurian スキームではないアソシエーションスキームの例も一つあげておく.

**例 2.4.** 次のグラフを考える.




$X \coloneqq \{v_i \mid 1 \leq i \leq 16\}$, $\mathcal{I} \coloneqq \{0, 1, 2\}$ とおき, 写像 $R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ をグラフ距離で定める. このとき組 $(X, R, \mathcal{I})$ は Schurian スキームではないアソシエーションスキームである. このアソシエーションスキームは *Shrikhande* グラフと呼ばれる.

可換アソシエーションスキーム上の指標理論についても触れておく. 以下 $(X, R, \mathcal{I})$ を可換なアソシエーションスキームとする. $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ は行列積に関して半単純であるため, このときある有限集合 $\mathcal{J}$ が存在して $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ は $C(\mathcal{J})$ と同型である. 一方, 明らかに $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ と $C(\mathcal{I})$ と同型である (このときは $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ 上の積として Hadamard 積を考える). まとめると $R^\dagger(C(\mathcal{I}))$ は次の二つの分解を持つ.

$$C(\mathcal{I}) \underset{\text{Hadamard 積}}{\cong} R^\dagger(C(\mathcal{I})) \underset{\text{行列積}}{\cong} C(\mathcal{J})$$

これらの同型を通して, 有限群上の指標理論が可換アソシエーションスキーム上へと一般化される (詳細は [1]).

## 2.2 Hilbert 代数

**定義 2.5.** $\mathcal{A}$ を複素 Hilbert 空間とし, $m$ を $\mathcal{A}$ 上の積, $\sigma$ を $(\mathcal{A}, m)$ 上の対合とする. 組 $(\mathcal{A}, m, \sigma)$ が **Hilbert 代数**であるとは以下の四条件を満たすときをいう:

(i) $\sigma$ は等長である, すなわち, 任意の $x$, $y \in \mathcal{A}$ に対して $\langle x, y \rangle = \langle \sigma(y), \sigma(x) \rangle$ が成り

立つ.

(ii) 任意の $x \in \mathcal{A}$ に対し, 左掛け算作用素 $m(x, -)$ は有界作用素.

(iii) (Riesz の表現定理) 任意の $x$, $y$, $z \in \mathcal{A}$ に対して $\langle m(x,y), z\rangle = \langle y, m(\sigma(x), z)\rangle$ が成り立つ.

(iv) $\mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}$ は稠密.

Hilbert 代数が**単位的**であるとは, 代数として単位的であるときをいう.

定義 2.5 において, 代数 $(\mathcal{A}, m)$ が有限次元かつ単位的であれば, 組 $(\mathcal{A}, m, \sigma)$ が定義 2.5 (i)–(iv) を満たすことと定義 2.5 (i), (iii) を満たすことは同値である.

**例 2.6.** $X$ を有限集合とする.

(1) $C(X)$ は標準的な Hermite 内積に関して複素 Hilbert 空間である. 積を各点積, 対合を複素共役とすると $C(X)$ は単位的 Hilbert 代数である.

(2) $M_X(\mathbb{C})$ は Hilbert–Schmidt 内積に関して複素 Hilbert 空間である. 積を行列積, 対合を随伴とすると $M_X(\mathbb{C})$ は単位的 Hilbert 代数である.

# 3 アソシエーションスキームの代数的一般化

## 3.1 主結果

アソシエーションスキームの代数的一般化を行う上で, Bose–Mesner 代数と有限次元複素全行列代数のいずれをも含む代数を考えたい. 本節ではそのような代数の一つの定式化を与える. その定式化を与えたことが本稿における主結果である.

**定義 3.1.** $\mathcal{A}$ を有限次元複素 Hilbert 空間とする. $m$ と $w$ を $\mathcal{A}$ 上の積, $\sigma$ と $\tau$ を $\mathcal{A}$ 上の反線形写像, $1_m$ と $1_w$ を $\mathcal{A}$ の元とする. 組 $(\mathcal{A}, m, \sigma, 1_m, w, \tau, 1_w)$ が**性質 (P)** を満たすとは以下の三条件を満たすときをいう:

(i) 組 $(\mathcal{A}, m, \sigma, 1_m)$ と組 $(\mathcal{A}, w, \tau, 1_w)$ はともに単位的 Hilbert 代数である.

(ii) $m(1_w, 1_w)$ は $1_w$ の正の定数倍であり, $w(1_m, 1_m)$ は $1_m$ の正の定数倍である.

(iii) $\sigma$ は $\mathcal{A}$ の $w$ に関する (反線形な) 環準同型写像であり, $\tau$ は $\mathcal{A}$ の $m$ に関する (反線形な) 環準同型写像である.

誤解の恐れがなければ性質 (P) を満たす組 $(\mathcal{A}, m, \sigma, 1_m, w, \tau, 1_w)$ のことを単に $\mathcal{A}$ と

書く.

定義 3.1 に現れる構造 $(m,\sigma,1_m)$ と $(w,\tau,1_w)$ は対称的な関係にある．これらの構造は記号的な区別しかつかない．そのため, どちらの積について言及しているか明確にしたいときには $m$ 積や $w$ 積と呼ぶことにする．対合と単位元に関しても同様である.

性質 (P) を満たす対象の部分集合が構造の制限に関して閉じているとき, それもまた構造の制限に関して性質 (P) を満たす.

性質 (P) を満たす対象の例をいくつか紹介しよう.

**例 3.2.**

(1) 一元集合は自明な構造に関して性質 (P) を満たす.
(2) 可換な単位的 Hilbert 代数はパラレルな単位的 Hilbert 代数の構造を合わせることで性質 (P) を満たす.
(3) $M_X(\mathbb{C})$ を空でない有限集合 $X$ 上の複素正方行列のなす複素線形空間とする. $M_X(\mathbb{C})$ を Hilbert–Schmidt 内積に関して複素 Hilbert 空間とみなす．$M_X(\mathbb{C})$ には次の二つの単位的 Hilbert 代数の構造が入る;
   - (行列積, 随伴, $I_X$),
   - (Hadamard 積, 複素共役, $J_X$).

   $M_X(\mathbb{C})$ はこれらの構造に関して性質 (P) を満たす.
(4) アソシエーションスキーム $(X,R,\mathcal{I})$ の Bose–Mesner 代数は $M_X(\mathbb{C})$ の構造の制限に関して性質 (P) を満たす.

## 3.2 性質 (P) を満たす対象のテンソル積

本節では性質 (P) を満たす対象の線形空間としてのテンソル積上に, 性質 (P) を満たす標準的な構造が定まることを紹介する．そしてそのテンソル積を用いて, 性質 (P) を満たす対象であって二つの積がともに非可換であるものを構成する.

**命題 3.3.** 組 $(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}},\sigma_{\mathcal{A}},1_{m_{\mathcal{A}}},w_{\mathcal{A}},\tau_{\mathcal{A}},1_{w_{\mathcal{A}}})$ と $(\mathcal{B},m_{\mathcal{B}},\sigma_{\mathcal{B}},1_{m_{\mathcal{B}}},w_{\mathcal{B}},\tau_{\mathcal{B}},1_{w_{\mathcal{B}}})$ はともに性質 (P) を満たすとする．このとき組 $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},m_{\mathcal{A}}\otimes m_{\mathcal{B}},\sigma_{\mathcal{A}}\otimes\sigma_{\mathcal{B}},1_{m_{\mathcal{A}}}\otimes 1_{m_{\mathcal{B}}},w_{\mathcal{A}}\otimes w_{\mathcal{B}},\tau_{\mathcal{A}}\otimes\tau_{\mathcal{B}},1_{w_{\mathcal{A}}}\otimes 1_{w_{\mathcal{B}}})$ もまた性質 (P) を満たす.

以降, 性質 (P) を満たす対象 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の複素 Hilbert 空間としてのテンソル積 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ は命題 3.3 で与えられる構造を備えているものとする．テンソル積上の積の可換性は次の

ように各成分の可換性により特徴づけることが出来る.

**命題 3.4.** $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は性質 (P) を満たすとする. $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ がいずれも $m$ 積 (resp. $w$ 積) について可換であることは $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ が $m$ 積 (resp. $w$ 積) に関して可換であるための必要十分条件である.

**例 3.5.** 複素 Hilbert 空間として $M_4(\mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C})\otimes M_2(\mathbb{C})$ が成り立つ. 一方の $M_2(\mathbb{C})$ に関しては

$$(M_2(\mathbb{C}), \text{行列積}, \text{随伴}, I_2, \text{Hadamard 積}, \text{複素共役}, J_2)$$

であるとみなし, もう一方の $M_2(\mathbb{C})$ に関しては

$$(M_2(\mathbb{C}), \text{Hadamard 積}, \text{複素共役}, J_2, \text{行列積}, \text{随伴}, I_2)$$

であるとみなす. 命題 3.3 より, $M_4(\mathbb{C})$ 上に性質 (P) を満たす構造が誘導される. 命題 3.4 より, $M_4(\mathbb{C})$ 上の $m$ 積と $w$ 積はいずれもが非可換である. それぞれの構造を $M_4(\mathbb{C})$ 側で記述すると以下のようになる: $M_4(\mathbb{C})$ の任意の二元 $A = (A_{ij})_{1\le i,j\le 2}$, $B = (B_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ (各 $A_{i,j}$ と $B_{i,j}$ は $2\times 2$ 行列) に対し,

$$\begin{aligned}
m(A\otimes B) &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}, \\
\sigma(A) &= \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}, \\
1_m &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
w(A\otimes B) &= \begin{pmatrix} A_{11}\circ B_{11} + A_{12}\circ B_{21} & A_{11}\circ B_{12} + A_{12}\circ B_{22} \\ A_{21}\circ B_{11} + A_{22}\circ B_{21} & A_{21}\circ B_{12} + A_{22}\circ B_{22} \end{pmatrix}, \\
\tau(A) &= \begin{pmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{21}} \\ \overline{A_{12}} & \overline{A_{22}} \end{pmatrix}, \\
1_w &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ここで $^*$ は随伴を表し, $\circ$ は Hadamard 積, $\overline{\phantom{x}}$ は複素共役を表す.

## 3.3　性質 (P) を満たす対象の圏と Bose–Mesner 代数

本節ではまずアソシエーションスキームの全射圏 $\mathbf{AS}_{\mathrm{surj}}$ を紹介する．次にアソシエーションスキームの Bose–Mesner 代数と有限次元複素行列代数のいずれをも対象に持つ代数的な圏 $\mathcal{P}$ を紹介する．そして Bose–Mesner 代数をとる操作がアソシエーションスキームの全射圏 $\mathbf{AS}_{\mathrm{surj}}$ から圏 $\mathcal{P}$ のモノ射の圏への反変関手を与えることを紹介する．

圏の用語は主に S. MacLane[7] に従う．

圏 $\mathbf{AS}_{\mathrm{surj}}$ を次で定義する:

- 対象はアソシエーションスキーム．
- アソシエーションスキーム $(X, R_X, \mathcal{I}_X)$ から $(Y, R_Y, \mathcal{I}_Y)$ への射は二つの全射な写像の組 $(f\colon X \to Y, \varphi\colon \mathcal{I}_X \to \mathcal{I}_Y)$ であって $\varphi \circ R_X = R_Y \circ (f \times f)$ を満たすもの．すなわち, 次の図式を可換にするもの．

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "R_X"] \arrow[d, "f \times f"'] & \mathcal{I}_X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \times Y \arrow[r, "R_Y"'] & \mathcal{I}_Y \end{tikzcd} .$$

- 合成は写像としての合成の組．
- 恒等射は恒等写像の組．

**注意 3.6.** 射に全射性を要求しないアソシエーションスキームの圏は [4, 8] などで扱われている．

圏 $\mathcal{P}$ を次で定義する:

- 対象は性質 (P) を満たす組 $(\mathcal{A}, m, \sigma, 1_m, w, \tau, 1_w)$．
- 射は対象間の写像 $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ であって複素線形かつ $m$ 積, $w$ 積, $m$ 対合, $w$ 対合のいずれをも保つもの．
- 合成は写像としての合成．
- 恒等射は恒等写像．

$\mathcal{P}$ の射に対し, その射がモノ射であることと単射であることは同値である. $\mathcal{P}$ の射の例をいくつか挙げておく.

**例 3.7.**

(1) すべての元を零元につぶす $\mathcal{P}$ の対象間の写像は $\mathcal{P}$ の射である.
(2) アソシエーションスキーム $(X, R, I)$ が誘導する写像 $R^\dagger \colon C(I) \to M_X(\mathbb{C})$ は $\mathcal{P}$ のモノ射である.
(3) ここでは $M_X(\mathbb{C})$ 上の行列積は正規化された行列積で取り換えて考える ($X$ は有限集合). このときファイバーの濃度が一定の全射な写像 $f \colon X \to Y$ が誘導する写像 $(f \times f)^\dagger \colon M_Y(\mathbb{C}) \to M_X(\mathbb{C})$ は $\mathcal{P}$ のモノ射である.

$\mathcal{P}$ のモノ射の圏を $\mathcal{M}$ と書く. 圏 $\mathbf{AS}_{\mathrm{surj}}$ から圏 $\mathcal{M}$ への反変関手 BM を次のようにして定める:

- 圏 $\mathbf{AS}_{\mathrm{surj}}$ の対象 $(X, R, I)$ に対し, $\mathrm{BM}(X, R, I)$ をモノ射 $R^\dagger \colon C(I) \to M_X(\mathbb{C})$ と定める. ただし, $M_X(\mathbb{C})$ 上には行列積の代わりに正規化された行列積を構造として入れる.
- 圏 $\mathbf{AS}_{\mathrm{surj}}$ の射 $(f, \varphi) \colon (X, R_X, I_X) \to (Y, R_Y, I_Y)$ に対し, $\mathrm{BM}(f, \varphi) \coloneqq ((f \times f)^\dagger, \varphi^\dagger)$ と定める.

BM が反変関手として well-defined であることは簡単な計算により分かる. この反変関手は忠実である. すなわち, 次のことが成り立つ.

**定理 3.8.** アソシエーションスキーム $(X, R, I)$ に対して $R^\dagger \colon C(I) \to C(X \times X)$ を対応させることは $\mathbf{AS}_{\mathrm{surj}}$ から $\mathcal{M}$ への忠実な反変関手を与える.

# 参考文献


[1] Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Tatsuro Ito, and Rie Tanaka. *Algebraic combinatorics*, volume 5. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021.

[2] Quanguo Chen and Shuanhong Wang. Radford's formula for generalized weak biFrobenius algebras. *Rocky Mountain J. Math.*, 44(2):419–433, 2014.

[3] Yukio Doi. Bi-Frobenius algebras and group-like algebras. In *Hopf algebras*, volume 237 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 143–155. Dekker,

New York, 2004.

[4] Akihide Hanaki. A category of association schemes. *J. Combin. Theory Ser. A*, 117(8):1207–1217, 2010.

[5] Yukiyosi Kawada. Ueber den Dualitätssatz der Charaktere nichtkommutativer Gruppen. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3)*, 24:97–109, 1942.

[6] M. Koppinen. On algebras with two multiplications, including Hopf algebras and Bose-Mesner algebras. *J. Algebra*, 182(1):256–273, 1996.

[7] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*, volume Vol. 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[8] Paul-Hermann Zieschang. *An algebraic approach to association schemes*, volume 1628 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.