A 型のシフト量子アフィン代数の有限次元既約表現の q-指標について

和田 堅太郎 (信州大学)
Kentaro Wada (Shinshu University)

1 Introduction

シフト量子アフィン代数は, 量子 K-理論的クーロン枝に関連して, [FT19] において導入されたある種の量子群であり, シフト準同型を通じて量子ループ代数の余イデアル部分代数と見なすことができる。量子ループ代数の表現論と同様に, シフト量子アフィン代数の有限次元表現を考える上で, その q-指標を考えることが重要な問題の一つとなる。しかし, シフト量子アフィン代数の有限次元既約表現の q-指標の具体的な表示はほとんど知られていない (量子ループ代数の場合でも, 計算方法は知られているが, 非常に特別な場合しか, 具体的に記述できていない。)

そのような状況の中で, ある種の Schur-Weyl 双対を通じて, cyclotomic q-Schur 代数の表現を, A 型のあるシフトのシフト量子アフィン代数の表現とみなせることが知られている ([Wad24])。さらに, cyclotomic q-Schur 代数の表現論は, Mathas を中心に組み合わせ論を用いて研究されているので, そこでの議論とそれらをシフトしたものを用いることによって, シフト量子アフィン代数のあるクラスの既約表現の q-指標を組み合わせ論を用いて具体的に記述することができた。論文 ([KW]) は準備中であるが, その結果について解説したい。なお, これらの結果は, 小寺諒介氏 (千葉大学) との共同研究に基づいています。

2 シフト量子アフィン代数

この節では, 特殊線形リー代数 $\mathfrak{sl}_m$ に付随したシフト量子アフィン代数, 及びその有限次元表現について, [FT19], [Her23] における定義や結果を簡単にまとめた後, シフト量子アフィン代数の有限次元表現の q-指標を記述する一つの方法を述べる。なお, この節の議論は全て, 一般の有限次元半単純リー代数に付随したシフト量子アフィン代数に対しても成り立つ。

2.1　シフト量子アフィン代数の定義.

この報告集を通じて, 代数は全て $\mathbb{C}$ 上の結合代数であるとし, パラメータ $q \in \mathbb{C}^\times$ は 1 の冪根ではないとする。

シフト量子アフィン代数は, 量子ループ代数を "シフトしたもの" として定義されるので, まず量子ループ代数について思い出そう。(このことから, シフト量子ループ代数と呼ぶ方が適切に思われるが, [FT19] でシフト量子アフィン代数と呼んでいるのでそれに従う。)

特殊線形リー代数 $\mathfrak{sl}_m$ に付随した量子ループ代数 $U_q(\mathfrak{sl}_m)$ は, ループリー代数 $L\mathfrak{sl}_m = \mathfrak{sl}_m \otimes \mathbb{C}[x^\pm]$ の自然な生成元 $e_i \otimes x^t$, $f_i \otimes x^t$, $h_i \otimes x^t$ $(1 \leq i \leq m-1,\ t \in \mathbb{Z})$ (ここで, e_i, f_i, h_i $(1 \leq i \leq m-1)$ は $\mathfrak{sl}_m$ の Chevalley 生成元) に対応した生成元

$$e_{i,t},\ f_{i,t},\ \psi^\pm_{i,\pm s} \quad (1 \leq i \leq m-1,\ t \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

(Drinfeld's new generator と呼ばれているもので, 以下, 単に Drinfeld 生成元と呼ぶ) と定義関係式を用いて定義される。ここで, カルタン部分の生成元である $\psi^\pm_{i,\pm s}$ の取り方は,

$$[e_{i,s}, f_{j,t}] = \delta_{i,j}(q-q^{-1})^{-1}\begin{cases} \psi^+_{i,s+t} & \text{if } s+t>0, \\ \psi^+_{i,0} - \psi^-_{i,0} & \text{if } s+t=0, \\ -\psi^-_{i,s+t} & \text{if } s+t<0 \end{cases}$$

を満たすように取る。

$$\{e_{i,t},\ \psi^\pm_{i,\pm s} \mid 1 \leq i \leq m-1,\ t \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$
$$\{f_{i,t},\ \psi^\pm_{i,\pm s} \mid 1 \leq i \leq m-1,\ t \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

で生成される $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の部分代数をそれぞれ B^+, B^- と表すと, $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の (Drinfeld 生成元に付随した) 三角分解より,

$$U_q(L\mathfrak{sl}_m) = B^- \cdot B^+$$

となる。シフト量子アフィン代数は, この $B^\pm$ の貼り合わせ方をシフトしたものである。具体的には, 以下のように定義される。

シフトを表すパラメータとして, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}) \in \mathbb{Z}^{m-1}$ を取る。シフト $\mathbf{b}$ に対し, シフト量子アフィン代数 $U_{q,[\mathbf{b}]} = U_{q,[\mathbf{b}]}(L\mathfrak{sl}_m)$ を以下のように定める；

まず生成元を,

$$e_{i,t},\ f_{i,t},\ \psi^+_{i,-b_i+s},\ (\psi^+_{i,-b_i})^{-1},\ \psi^-_{i,-s},\ (\psi^-_{i,0})^{-1} \quad (1 \leq i \leq m-1,\ t \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とする。量子ループ代数の生成元と比べて, $\psi^+_{*,*}$ の 2 番目の添字の下限が b_i だけシフトしていることに注意しよう。このとき, $\psi^+_{i,-b_i}\psi^-_{i,0}$ は中心元であり, さらに, $\mathbf{b} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ のとき,

$$U_{q,[\mathbf{0}]}/(\psi^+_{i,0}\psi^-_{i,0} - 1 \mid 1 \leq i \leq m-1)_{\mathrm{ideal}} \cong U_q(L\mathfrak{sl}_m) \tag{2.1.1}$$

となる。$U_{q,[\mathbf{b}]}$ の関係式に関しては, $B^{\pm}$ に対応する部分については, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の生成元と $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の生成元を, $\psi^+_{*,*}$ の添字をシフトさせた下で自然に対応させることによって, $B^{\pm}$ の中での関係式は全く同じとなり, その貼り合わせを表す関係式を

$$[e_{i,s}, f_{j,t}] = \delta_{i,j}(q - q^{-1})^{-1}\begin{cases} \psi^+_{i,s+t} & \text{if } s+t \geq -b_i \text{ and } s+t > 0, \\ \psi^+_{i,s+t} - \psi^-_{i,s+t} & \text{if } -b_i \leq s+t \leq 0, \\ -\psi^-_{i,s+t} & \text{if } s+t < -b_i \text{ and } s+t \leq 0, \\ 0 & \text{if } 0 < s+t < -b_i \end{cases} \tag{2.1.2}$$

となるようにしたものである。

[Her23] によって, $\mathbf{b} \notin \mathbb{Z}^{m-1}_{\geq 0}$ の場合, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の非自明な有限次元表現は存在しないことが示されているので, 以下では, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{m-1}_{\geq 0}$ (各シフト b_i は非負整数) であるとする。このとき, 関係式 (2.1.2) の右辺の最後のケース ($0 < s+t < -b_i$ の場合) は現れないことに注意しよう。

2.2 シフト量子アフィン代数の余積構造.

次に, シフト量子アフィン代数 $U_{q,[\mathbf{b}]}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{m-1}_{\geq 0}$) の余積構造について考えよう。

まず, 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の余積について復習する。アフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_m$ ($A^{(1)}_{m-1}$ 型の Kac-Moody リー代数) に付随した量子群を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_m)$ で表すことにする。つまり, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_m)$ は Kac-Moody 型の生成元と基本関係式で定義されるものとし, その生成元を Chevalley 生成元と呼ぶことにする。ただし, 次数作用素を除いたものを考えている。$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_m)$ には, Drinfeld-Jimbo 余積と呼ばれている Chevalley 生成元を用いて定義される余積 $\Delta : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_m) \to U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_m) \otimes U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_m)$ を考えることができる。このとき, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_m)$ の標準中心元 c を 1 としたものと量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ とが同型であることが, [Dri87], [Bec94] で示されている。この同型を通じて, $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ 上にも Drinfeld-Jimbo 余積が定まる。さらに, 同型 (2.1.1) に注意すると, Drinfeld-Jimbo 余積を $U_{q,[\mathbf{0}]}$ に自然に拡張することができる。このようにして得られる $U_{q,[\mathbf{0}]}$ 上の余積を,

$$\Delta : U_{q,[\mathbf{0}]} \to U_{q,[\mathbf{0}]} \otimes U_{q,[\mathbf{0}]}$$

と表すことにする。この準備のもとで, シフト量子アフィン代数の余積構造に関して, 以下のことが知られている。

Theorem 2.2.1 ([FT19]). $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{m-1}), \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{m-1}), \mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_{m-1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m-1}$ *s.t.* $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ と $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}) \in (\mathbb{C}^{\times})^{m-1}$ に対し, 以下のことが成り立つ。

(i) 代数としての単射準同型 $\iota^{\eta}_{[\mathbf{c},\mathbf{d}]} : U_{q,[\mathbf{b}]} \to U_{q,[\mathbf{0}]}$ が存在する。*(シフト準同型と呼ぶ)*

(ii) 代数としての準同型 $\Delta_{\mathbf{d},\mathbf{c}} : U_{q,[\mathbf{b}]} \to U_{q,[\mathbf{d}]} \otimes U_{q,[\mathbf{c}]}$ で以下の図式が可換となるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} U_{q,[\mathbf{b}]} \arrow[r, "\Delta_{\mathbf{d},\mathbf{c}}"] \arrow[d, "\iota^{\eta}_{[\mathbf{c},\mathbf{d}]}"'] & U_{q,[\mathbf{d}]} \otimes U_{q,[\mathbf{c}]} \arrow[d, "\iota^{\eta}_{[\mathbf{0},\mathbf{d}]} \otimes \iota^{\eta}_{[\mathbf{c},\mathbf{0}]}"] \\ U_{q,[\mathbf{0}]} \arrow[r, "\Delta"] & U_{q,[\mathbf{0}]} \otimes U_{q,[\mathbf{0}]} \end{tikzcd}$$

特に, $\iota^{\eta}_{[\mathbf{0},\mathbf{b}]}$ *(*$\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *のとき) (resp.* $\iota^{\eta}_{[\mathbf{b},\mathbf{0}]}$ *(*$\mathbf{d} = \mathbf{0}$ *のとき))* を考えると, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ は $U_{q,[\mathbf{0}]}$ の右 *(resp.* 左*)* 余イデアル部分代数とみなせる。

2.3 シフト量子アフィン代数の有限次元既約表現.

シフト量子アフィン代数の有限次元表現も, 量子ループ代数の有限次元表現と同様に, Drinfeld 生成元を用いた三角分解に付随したウェイト理論によって制御される。まず, そのことを簡単にまとめる。$U_{q,[\mathbf{b}]}$ の部分代数

$$\begin{aligned} U^{+}_{q,[\mathbf{b}]} &:= \langle e_{i,t} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, t \in \mathbb{Z} \rangle, \\ U^{-}_{q,[\mathbf{b}]} &:= \langle f_{i,t} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, t \in \mathbb{Z} \rangle, \\ U^{0}_{q,[\mathbf{b}]} &:= \langle \psi^{+}_{i,-b_i+s},\, (\psi^{+}_{i,-b_i})^{-1},\, \psi^{-}_{i,-s},\, (\psi^{-}_{i,0})^{-1} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \rangle \end{aligned}$$

を考えると, 三角分解 (線形空間としての同型写像)

$$U^{-}_{q,[\mathbf{b}]} \otimes U^{0}_{q,[\mathbf{b}]} \otimes U^{+}_{q,[\mathbf{b}]} \to U_{q,[\mathbf{b}]}, \quad x \otimes y \otimes z \mapsto xyz$$

を得る ([FT19])。特に, $U^{0}_{q,[\mathbf{b}]}$ は可換な部分代数であり, その作用に関する同時固有値が $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元表現を制御することになる。いくつか言葉遣いを定めておこう。

M を $U_{q,[\mathbf{b}]}$-加群とする。

- $\mathbb{C}$ の元の組 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^+_{i,-b_i+s}, \gamma^-_{i,-s})^{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}_{1\leq i\leq m-1}$ に対し,
$$\psi^+_{i,-b_i+s}\cdot v = \gamma^+_{i,-b_i+s} v, \quad \psi^-_{i,-s}\cdot v = \gamma^-_{i,-s} v \quad (1\leq i\leq m-1,\, s\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$
となるような $v\in M$ を $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイト $\boldsymbol{\gamma}$ の $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトベクトルという。
- $v\in M$ が特異ベクトル (resp. f-特異ベクトル) であるとは,
$$e_{i,t}\cdot v = 0 \quad (\text{resp. } f_{i,t}\cdot v = 0) \quad \text{for all } 1\leq i\leq m-1,\ t\in\mathbb{Z}$$
を満たすことである。
- M が最高ウェイト (resp. 最低ウェイト) $\boldsymbol{\gamma}$ の最高ウェイト表現 (resp. 最低ウェイト表現) であるとは, ある $v\in M$ に対し,
$$M = U_{q,[\mathbf{b}]}\cdot v$$
$$\text{s.t. } \begin{cases} \psi^+_{i,-b_i+s}\cdot v = \gamma^+_{i,-b_i+s} v, \quad \psi^-_{i,-s}\cdot v = \gamma^-_{i,-s} v \quad (1\leq i\leq m-1,\, s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}) \\ e_{i,t}\cdot v = 0 \quad (\text{resp. } f_{i,t}\cdot v = 0) \quad \text{for all } 1\leq i\leq m-1,\ t\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
を満たすことである。つまり, M が $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイト $\boldsymbol{\gamma}$ の $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトベクトル, かつ特異ベクトル (resp. f-特異ベクトル) である v によって生成されることである。このとき, v を最高ウェイトベクトル (resp. 最低ウェイトベクトル) という。

通常の三角分解に沿ったウェイト理論における議論によって, 以下のことが分かる。

Proposition 2.3.1. $U_{q,[\mathbf{b}]}$ *の任意の有限次元既約表現は最高ウェイト表現かつ最低ウェイト表現である。さらに, 有限次元既約表現は, その最高ウェイト (または最低ウェイト) によって, 同型を除いて一意的に定まる。*

この命題により, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元既約表現を分類するには, 既約な最高ウェイト表現のうちで, 有限次元となるような最高ウェイトを分類すればよい。

2.4 量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の有限次元既約表現の分類.

まず, 量子ループ代数の場合に, [CP91], [CP94] によって得られている分類について復習しよう。

量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ に対し, $e_{i,0}, f_{i,0}, \psi^{\pm}_{i,0}$ $(1\leq i\leq m-1)$ によって生成される部分代数は, $\mathfrak{sl}_m$ に付随した量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_m)$ と同型である。そこで, $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の表現の

type を $U_q(\mathfrak{sl}_m)$ に制限した時の type として定める。特に, 有限次元既約表現については, 必ず type が定まる。また, 任意の type の表現は, ある type 1 の表現と 1 次元表現とのテンソル積表現として得ることができるので, $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の有限次元既約表現を分類するには, type 1 のもののみを考えれば十分である。$U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の有限次元既約表現を分類するために, 多項式の組の集合

$$\mathbb{D} := \{\mathbf{P} = \big(P_i(z)\big)_{1\leq i\leq m-1} \mid P_i(z) \in \mathbb{C}[z] \text{ s.t. } P_i(0) = 1\}$$

を考える。$\mathbb{D} \ni \mathbf{P}$ のことを **Drinfeld 多項式**と呼ぶ*。このとき, 次のことが成り立つ。

Theorem 2.4.1 ([CP91], [CP94])**.** *$U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の type 1 の有限次元既約表現の同型類は, $\mathbb{D}$ と 1 対 1 に対応する。さらに, $\mathbf{P} = (P_i(z)) \in \mathbb{D}$ に対応する既約表現を $L(\mathbf{P})$ で表すとき, $L(\mathbf{P})$ の最高ウェイト $(\gamma^+_{i,s}, \gamma^-_{i,-s})^{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}_{1\leq i\leq m-1}$ は,*

$$\sum_{s\geq 0} \gamma^+_{i,s} z^s = q^{\deg P_i(z)} \frac{P_i(q^{-1}z)}{P_i(qz)} = \sum_{s\geq 0} \gamma^-_{i,-s} z^{-s}$$

によって与えられる。

2.5 シフト量子アフィン代数 $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元既約表現の分類.

$U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元既約表現の分類は, [Her23] で得られている。[Her23] で使っているシフトと我々のシフトとは (本質的には同じだが) 異なったもの†を使っているし, [Her23] では Drinfeld-Jimbo 余積ではなく, Drinfeld 余積を使って議論しているが, 有限次元既約表現の分類に関しては, 特に問題は起きないので, 我々の文脈に従って, [Her23] の結果をまとめる。

まず, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の 1 次元表現を考えよう。

$$\mathbb{B}_{[\mathbf{b}]} := \Big\{\boldsymbol{\beta} = (\beta_{i,-b_i+s})^{0\leq s\leq b_i}_{1\leq i\leq m-1} \mid \beta_{i,-b_i}, \beta_{i,0} \in \mathbb{C}^\times,\ \beta_{i,-b_i+s} \in \mathbb{C}\ (0 < s < b_i)\Big\}$$

* 正確には, Drinfeld 多項式の組というべきかもしれない。英語だと Drinfeld polynomials と書けば良いが, 日本語は単数・複数の区別がないので, こういうとき困る。

† 我々が使っているシフトは cyclotomic q-Schur 代数との関係 (Schur-Weyl duality) から従うシフトである。後述の $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトの記述を考えるうえでも, 我々のシフトの方が自然なような気もするが, 実際のところ, どのシフトが自然なのかはよく分からないし, 考える問題に応じて適切なシフトを考えるべきなのかもしれない。現時点ではよく分からない。

とおく。$\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{B}_{[\mathbf{b}]}$ に対し, 1 次元の $U_{q,[\mathbf{b}]}$-加群 $L_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{C}w$ が,

$$e_{i,t} \cdot w = f_{i,t} \cdot w = 0 \quad (1 \leq i \leq m-1,\ t \in \mathbb{Z}),$$
$$\psi^+_{i,-b_i+s} \cdot w = \begin{cases} \beta_{i,-b_i+s}\, w & \text{if } 0 \leq s \leq b_i, \\ 0 & \text{if } s > b_i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq m-1,\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$
$$\psi^-_{i,-s} \cdot w = \begin{cases} \beta_{i,-s}\, w & \text{if } 0 \leq s \leq b_i, \\ 0 & \text{if } s > b_i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq m-1,\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

によって定まる (well-defined であることは, 定義関係式を直接確認すれば簡単に分かる)。また, 任意の 1 次元表現が, ある $L_{\boldsymbol{\beta}}$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{B}_{[\mathbf{b}]}$) と同型であることも, 定義関係式よりすぐに分かる。

上で与えた $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の 1 次元表現を用いて, $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の type 1 の有限次元既約表現 $L(\mathbf{P})$ ($\mathbf{P} \in \mathbb{D}$) から $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元既約表現を以下のようにして構成することができる。

まず, (2.1.1) より, $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ は $U_{q,[0]}$ の商代数であるので, $L(\mathbf{P})$ を自然に $U_{q,[0]}$-加群とみなす。このとき, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の 1 次元表現 $L_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{C}w$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{B}_{[\mathbf{b}]}$) と $L(\mathbf{P})$ とのテンソル積

$$L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes_{\mathbb{C}} L(\mathbf{P})$$

を Theorem 2.2.1 における準同型

$$\Delta_{\mathbf{b},\mathbf{0}} : U_{q,[\mathbf{b}]} \to U_{q,[\mathbf{b}]} \otimes U_{q,[\mathbf{0}]}$$

を通じて, $U_{q,[\mathbf{b}]}$-加群と思う。すると, $L(\mathbf{P})$ の ($U_q(L\mathfrak{sl}_m)$-加群としての) 最高ウェイトベクトルを v_0 とするとき, $w \otimes v_0 \in L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes L(\mathbf{P})$ は, 特異かつ $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトベクトルとなり, $w \otimes v_0$ で生成される $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes L(\mathbf{P})$ の $U_{q,[\mathbf{b}]}$-部分加群 $U_{q,[\mathbf{b}]} \cdot (w \otimes v_0) \subset L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes L(\mathbf{P})$ は既約となることを示せる。そこで,

$$L(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{P}) := U_{q,[\mathbf{b}]} \cdot (w \otimes v_0) \subset L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes L(\mathbf{P})$$

とおく。すると, 次のことが成り立つ。

Theorem 2.5.1 ([Her23])**.** *$U_{q,[\mathbf{b}]}$ の任意の有限次元既約表現は, ある $L(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{P})$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{B}_{[\mathbf{b}]}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{D}$) と同型である。*

さらに, $w \otimes v_0$ への $\psi^+_{i,-b_i+s}$, $\psi^-_{i,-s}$ の作用を計算することにより, $L(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{P})$ の最高ウェ

イト $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma^+_{i,-b_i+s},\gamma^-_{i,-s})^{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}_{1\leq i\leq m-1}$ は,

$$\sum_{s\geq 0}\gamma^+_{i,-b_i+s}z^{-b_i+s}=q^{\deg P_i(z)}\frac{P_i(q^{-1}z)}{P_i(qz)}\frac{S_i(z)}{z^{b_i}}=\sum_{s\geq 0}\gamma^-_{i,-s}z^{-s},\qquad (2.5.1)$$

$$\text{where } S_i(z)=\sum_{s=0}^{b_i}\beta_{i,-b_i+s}z^s$$

を満たすことが分かる。そこで, $\beta_{i,-b_i},\beta_{i,0}\neq 0$ であることに注意して,

$$\mathbb{S}_{[\mathbf{b}]}:=\left\{\mathbf{S}=\big(S_i(z)\big)_{1\leq i\leq m-1}\mid S_i(z)\in\mathbb{C}[z]\text{ s.t. }S_i(0)\neq 0\text{ and }\deg S_i(z)=b_i\right\}$$

とおき, 最高ウエイトが (2.5.1) で与えられる $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元既約表現を $L(\mathbf{S},\mathbf{P})$ と表すことにすると, 全射

$$\mathbb{S}_{[\mathbf{b}]}\times\mathbb{D}\to\{U_{q,[\mathbf{b}]}\text{ の有限次元既約表現 }\}/_{\cong},\quad (\mathbf{S},\mathbf{P})\mapsto L(\mathbf{S},\mathbf{P})\qquad (2.5.2)$$

を得る。ここで, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ のとき, 写像 (2.5.2) は単射とはならない。実際に, $S_i(z)$ と $P_i(qz)$ が共通因子 $(1-az)$ を持つとすると, $P_i(z)$ は $(1-q^{-1}az)$ を因子に持つので,

$$S_i(z)=(1-az)S'_i(z),\quad P_i(z)=(1-q^{-1}az)P'_i(z)$$

と表せ,

$$\begin{aligned}q^{\deg P_i(z)}\frac{P_i(q^{-1}z)}{P_i(qz)}\frac{S_i(z)}{z^{b_i}}&=q^{\deg P'_i(z)+1}\frac{(1-q^{-2}az)P'_i(q^{-1}z)}{(1-az)P'_i(qz)}\frac{(1-az)S'_i(z)}{z^{b_i}}\\&=q^{\deg P'_i(z)}\frac{P'_i(q^{-1}z)}{P'_i(qz)}\frac{q(1-q^{-2}az)S'_i(z)}{z^{b_i}}\end{aligned}$$

となるので, $S_i(z)$ と $P_i(qz)$ が共通因子 $(1-az)$ を持つとき,

$$\widetilde{P}_i(z):=(1-q^{-1}az)^{-1}P_i(z),\quad \widetilde{S}_i(z):=q(1-q^{-2}az)(1-az)^{-1}S_i(z)$$

とおき, $\widetilde{\mathbf{S}}$ を $\mathbf{S}$ の $S_i(z)$ を $\widetilde{S}_i(z)$ に, $\widetilde{\mathbf{P}}$ を $\mathbf{P}$ の $P_i(z)$ を $\widetilde{P}_i(z)$ に置き換えたものとすると, $L(\mathbf{S},\mathbf{P})\cong L(\widetilde{\mathbf{S}},\widetilde{\mathbf{P}})$ となる。

そこで, $\mathbb{S}_{[\mathbf{b}]}\times\mathbb{D}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(\mathbf{S}_1,\mathbf{P}_1)\sim(\mathbf{S}_2,\mathbf{P}_2)\Leftrightarrow L(\mathbf{S}_1,\mathbf{P}_1)\cong L(\mathbf{S}_2,\mathbf{P}_2)$$

と定め,

$$\mathbb{D}_{[\mathbf{b}]}:=(\mathbb{S}_{[\mathbf{b}]}\times\mathbb{D})/_{\sim}$$

とおくと, 以下を得る。

Corollary 2.5.2. 写像

$$\mathbb{D}_{[\mathbf{b}]} \to \{U_{q,[\mathbf{b}]} \text{ の有限次元既約表現 }\}/_{\cong}, \quad (\mathbf{S},\mathbf{P}) \mapsto L(\mathbf{S},\mathbf{P})$$

は全単射である。特に,

$$\mathbb{D}^{\dagger}_{[\mathbf{b}]} := \left\{(\mathbf{S},\mathbf{P}) \in \mathbb{S}_{[\mathbf{b}]} \times \mathbb{D} \mid \ S_i(z) \text{ と } P_i(qz) \text{ は共通因子を持たない } (1 \leq i \leq m-1)\right\}$$

は $\mathbb{D}_{[\mathbf{b}]}$ の代表系を与える。

$U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元既約表現 L に対し, $L \cong L(\mathbf{S},\mathbf{P})$ となる多項式の組 $(\mathbf{S},\mathbf{P}) \in \mathbb{S}_{[\mathbf{b}]} \times \mathbb{D}$ を L の **Drinfeld 多項式**と呼ぶ事にする。

2.6 量子ループ代数の有限次元表現の q-指標.

量子ループ代数の有限次元表現を特徴付ける不変量として, その q-指標が [FR99] によって導入された。ここでは, 後の議論で必要となることを, [FR99], [FM01] に従ってまとめる。

$U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の type 1 の有限次元表現 M に対し, $\{\psi^{\pm}_{i,\pm s} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の作用に関する広義同時固有空間分解

$$M = \bigoplus_{\boldsymbol{\gamma}=(\gamma^{\pm}_{i,\pm s})} M_{\boldsymbol{\gamma}},$$

$$M_{\boldsymbol{\gamma}} = \left\{ v \in M \mid \begin{array}{r} (\psi^{\pm}_{i,\pm s} - \gamma^{\pm}_{i,\pm s})^{N_{i,\pm s}} \cdot v = 0 \text{ for some } N_{i,\pm s} \in \mathbb{Z}_{>0} \\ (1 \leq i \leq m-1,\, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \end{array} \right\}$$

を考える。このとき, $M_{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0$ となる $\boldsymbol{\gamma}$ を M の ℓ-ウェイトと呼び,

$$\ell\text{-wt}(M) = \{\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^{+}_{i,s}, \gamma^{-}_{i,-s})^{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}_{1 \leq i \leq m-1} \in \prod_{1 \leq i \leq m-1} \prod_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}^2 \mid M_{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0\}$$

とおく。このとき, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^{\pm}_{i,\pm s}) \in \ell\text{-wt}(M)$ に対し, ある多項式 $Q_i(z), R_i(z) \in \mathbb{C}[z]$ s.t. $Q_i(0) = R_i(0) = 1$ $(1 \leq i \leq m-1)$ が存在して,

$$\sum_{s \geq 0} \gamma^{+}_{i,s} z^s = q^{\deg Q_i - \deg R_i} \frac{Q_i(q^{-1}z)}{Q_i(qz)} \frac{R_i(qz)}{R_i(q^{-1}z)} = \sum_{s \geq 0} \gamma^{-}_{i,-s} z^{-s} \tag{2.6.1}$$

と表せることが, [FR99] で示されている。ここで, $Q_i(0) = R_i(0) = 1$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= (1-\zeta_{i,1}z)(1-\zeta_{i,2}z)\dots(1-\zeta_{i,k_i}z) \quad (\zeta_{i,j} \in \mathbb{C}^{\times}), \\ R_i(z) &= (1-\xi_{i,1}z)(1-\xi_{i,2}z)\dots(1-\xi_{i,l_i}z) \quad (\xi_{i,j} \in \mathbb{C}^{\times}) \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

と表すことができ,

$$
\begin{aligned}
&q^{\deg Q_i - \deg R_i} \frac{Q_i(q^{-1}z)}{Q_i(qz)} \frac{R_i(qz)}{R_i(q^{-1}z)} \\
&= \Big(q \frac{(1-\zeta_{i,1}q^{-1}z)}{(1-\zeta_{i,1}qz)} q \frac{(1-\zeta_{i,2}q^{-1}z)}{(1-\zeta_{i,2}qz)} \dots q \frac{(1-\zeta_{i,k_i}q^{-1}z)}{(1-\zeta_{i,k_i}qz)} \Big) \\
&\quad \times \Big(q^{-1} \frac{(1-\xi_{i,1}qz)}{(1-\xi_{i,1}q^{-1}z)} q^{-1} \frac{(1-\xi_{i,2}qz)}{(1-\xi_{i,2}q^{-1}z)} \dots q^{-1} \frac{(1-\xi_{i,l_i}qz)}{(1-\xi_{i,l_i}q^{-1}z)} \Big)
\end{aligned}
$$

となるので, $Y_{i,\zeta} := q\dfrac{(1-\zeta q^{-1}z)}{(1-\zeta qz)}$ とおけば,

$$
q^{\deg Q_i - \deg R_i} \frac{Q_i(q^{-1}z)}{Q_i(qz)} \frac{R_i(qz)}{R_i(q^{-1}z)} = \prod_{j=1}^{k_i} Y_{i,\zeta_{i,j}} \prod_{j'=1}^{l_i} Y_{i,\xi_{i,j'}}^{-1}
$$

と表せる。そこで, $\boldsymbol{\gamma} \in \ell\text{-wt}(M)$ に対し, (2.6.1) に現れる多項式が (2.6.2) の形で表されるとき,

$$
Y^{\boldsymbol{\gamma}} := \prod_{i=1}^{m-1} \Big(\prod_{j=1}^{k_i} Y_{i,\zeta_{i,j}} \prod_{j'=1}^{l_i} Y_{i,\xi_{i,j'}}^{-1} \Big) \in \mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta\in\mathbb{C}^\times}
$$

とおけば, 写像

$$
\ell\text{-wt}(M) \to \mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta\in\mathbb{C}^\times}, \quad \boldsymbol{\gamma} \mapsto Y^{\boldsymbol{\gamma}} \tag{2.6.3}
$$

が定まる。ここで, $Q_i(z)$ と $R_i(z)$ が共通因子 $(1-\zeta z)$ を持つとき, (2.6.1) の有理式において, 対応する因子が約分できるが, そのとき, 単項式 $Y^{\boldsymbol{\gamma}}$ において $Y_{i,\zeta}$ と $Y_{i,\zeta}^{-1}$ とが打ち消し合うので, 写像 (2.6.3) は well-defined であることに注意しよう。(次に議論するが, シフトした場合はこの部分に若干の問題が生じる。)

以上の準備の下で, $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の type 1 の有限次元表現 M に対し, **q-指標** $\chi_q(M)$ を

$$
\chi_q(M) := \sum_{\boldsymbol{\gamma}\in\ell\text{-wt}(M)} \dim M_{\boldsymbol{\gamma}} Y^{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta\in\mathbb{C}^\times}
$$

によって定める。すると, 以下のことが成り立つ。

Theorem 2.6.1 ([FR99], [FM01])**.** *量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_m)$ の type 1 の有限次元表現のなす圏を $U_q(L\mathfrak{sl}_m)\text{-mod}_f^1$ と表し, その Grothendieck 環を $K_0(U_q(L\mathfrak{sl}_m)\text{-mod}_f^1)$ と表すとき, 写像*

$$
\chi_q : K_0(U_q(L\mathfrak{sl}_m)\text{-mod}_f^1) \to \mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta\in\mathbb{C}^\times}, \quad M \mapsto \chi_q(M)
$$

は単射環準同型写像となる。

2.7 シフト量子アフィン代数の有限次元表現の q-指標.

次に, シフト量子アフィン代数 $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元表現に対し, その q-指標をどのように記述するべきかを考えよう。量子ループ代数の場合と同様に, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元表現 M に対し, $\{\psi^+_{i,-b_i+s}, \psi^-_{i,-s} \mid 1 \leq i \leq m-1,\, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の作用に関する広義同時固有空間分解

$$M = \bigoplus_{\boldsymbol{\gamma}=(\gamma^+_{i,-b_i+s}, \gamma^-_{i,-s})} M_{\boldsymbol{\gamma}},$$

$$M_{\boldsymbol{\gamma}} = \left\{ v \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} (\psi^+_{i,-b_i+s} - \gamma^+_{i,-b_i+s})^{N_{i,-b_i+s}} \cdot v = 0 \text{ for some } N_{i,-b_i+s} \in \mathbb{Z}_{>0} \\ (\psi^-_{i,-s} - \gamma^-_{i,-s})^{N_{i,-s}} \cdot v = 0 \text{ for some } N_{i,-s} \in \mathbb{Z}_{>0} \\ \hfill (1 \leq i \leq m-1,\, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \end{array} \right\}$$

を考える。このとき, $M_{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0$ となる $\boldsymbol{\gamma}$ を M の $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトと呼び,

$$\ell_{[\mathbf{b}]}\text{-wt}(M) = \{\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^+_{i,-b_i+s}, \gamma^-_{i,-s})^{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}_{1 \leq i \leq m-1} \in \prod_{1 \leq i \leq m-1} \prod_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}^2 \mid M_{\boldsymbol{\gamma}} \neq 0\}$$

とおく。このとき, M の $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトがどのように表せるかを知りたいのだが, そのためには, M の組成因子の $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトを調べればよい。さらに, Theorem 2.5.1 より, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元既約表現は, ある $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes L(\mathbf{P})$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{B}_{[\mathbf{b}]}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{D}$) の部分加群と同型なので, $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes L(\mathbf{P})$ に現れる $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトについて調べれば十分である。そこで, $L(\mathbf{P})$ の同時固有ベクトル v を取り, $w \otimes v$ に $\Delta_{\mathbf{b},0} : U_{q,[\mathbf{b}]} \to U_{q,[\mathbf{b}]} \otimes U_{q,[0]}$ を通じて $\psi^+_{i,-b_i+s}$, $\psi^-_{i,-s}$ 達を作用させたものを考えることにより, 以下のことを得る;

Proposition 2.7.1. $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^+_{i,-b_i+s}, \gamma^-_{i,-s}) \in \ell_{[\mathbf{b}]}\text{-wt}(M)$ *に対し, ある 多項式* $Q_i(z)$, $R_i(z)$, $S_i(z) \in \mathbb{C}[z]$ *s.t.* $Q_i(0) = R_i(0) = 1$, $S_i(0) \neq 0$, $\deg S_i(z) = b_i$ $(1 \leq i \leq m-1)$ *が存在し,*

$$\sum_{s \geq 0} \gamma^+_{i,-b_i+s} z^{-b_i+s} = q^{\deg Q_i - \deg R_i} \frac{Q_i(q^{-1}z)}{Q_i(qz)} \frac{R_i(qz)}{R_i(q^{-1}z)} \frac{S_i(z)}{z^{b_i}} = \sum_{s \geq 0} \gamma^-_{i,-s} z^{-s} \quad (2.7.1)$$

と表せる‡。

量子ループ代数の場合と同様に, $Q_i(0) = R_i(0) = 1$, $S_i(0) \neq 0$, $\deg S_i(z) = b_i$ に注意

‡ $\boldsymbol{\gamma} \in \ell_{[\mathbf{b}]}\text{-wt}(L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes L(\mathbf{P}))$ のとき, (2.7.1) に現れる $S_i(z)$ は, $S_i(z) = \sum_{s=0}^{b_i} \beta_{i,-b_i+s} z^s$ となる。

すれば,

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= (1-\zeta_{i,1}z)(1-\zeta_{i,2}z)\dots(1-\zeta_{i,k_i}z) \quad (\zeta_{i,j}\in\mathbb{C}^\times), \\ R_i(z) &= (1-\xi_{i,1}z)(1-\xi_{i,2}z)\dots(1-\xi_{i,l_i}z) \quad (\xi_{i,j}\in\mathbb{C}^\times), \\ S_i(z) &= a_i(1-\eta_{i,1}z)(1-\eta_{i,2}z)\dots(1-\eta_{i,b_i}z) \quad (a_i,\eta_{i,j}\in\mathbb{C}^\times) \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

と表すことができ,

$$\begin{aligned} & q^{\deg Q_i-\deg R_i}\frac{Q_i(q^{-1}z)}{Q_i(qz)}\frac{R_i(qz)}{R_i(q^{-1}z)}\frac{S_i(z)}{z^{b_i}} \\ &= \Big(q\frac{(1-\zeta_{i,1}q^{-1}z)}{(1-\zeta_{i,1}qz)}q\frac{(1-\zeta_{i,2}q^{-1}z)}{(1-\zeta_{i,2}qz)}\dots q\frac{(1-\zeta_{i,k_i}q^{-1}z)}{(1-\zeta_{i,k_i}qz)}\Big) \\ &\quad \times\Big(q^{-1}\frac{(1-\xi_{i,1}qz)}{(1-\xi_{i,1}q^{-1}z)}q^{-1}\frac{(1-\xi_{i,2}qz)}{(1-\xi_{i,2}q^{-1}z)}\dots q^{-1}\frac{(1-\xi_{i,l_i}qz)}{(1-\xi_{i,l_i}q^{-1}z)}\Big) \\ &\quad \times a_i\Big(\frac{(1-\eta_{i,1}z)}{z}\frac{(1-\eta_{i,2}z)}{z}\dots\frac{(1-\eta_{i,b_i}z)}{z}\Big) \end{aligned}$$

となるので, $Y_{i,\zeta} := q\dfrac{(1-\zeta q^{-1}z)}{(1-\zeta qz)}$, $Z_{i,\eta} := \dfrac{(1-\eta z)}{z}$, $\tau_{i,a} := a$ $(\zeta,\eta,a\in\mathbb{C}^\times)$ とおけば,

$$q^{\deg Q_i-\deg R_i}\frac{Q_i(q^{-1}z)}{Q_i(qz)}\frac{R_i(qz)}{R_i(q^{-1}z)}\frac{S_i(z)}{z^{b_i}} = \tau_{i,a_i}\prod_{j=1}^{k_i}Y_{i,\zeta_{i,j}}\prod_{j'=1}^{l_i}Y^{-1}_{i,\xi_{i,j'}}\prod_{p=1}^{b_i}Z_{i,\eta_{i,p}}$$

と表せる。そこで, $\boldsymbol{\gamma}\in\ell\text{-wt}(M)$ に対し, (2.7.1) に現れる多項式が (2.7.2) の形で表されるとき,

$$X^{\boldsymbol{\gamma}} := \prod_{i=1}^{m-1}\Big(\tau_{i,a_i}\prod_{j=1}^{k_i}Y_{i,\zeta_{i,j}}\prod_{j'=1}^{l_i}Y^{-1}_{i,\xi_{i,j'}}\prod_{p=1}^{b_i}Z_{i,\eta_{i,p}}\Big)\in\mathbb{Z}[Y^{\pm}_{i,\zeta},Z_{i,\eta},\tau_{i,a}]^{\zeta,\eta,a\in\mathbb{C}^\times}_{1\le i\le m-1}$$

とおく。しかし, 量子ループ代数の場合と違って, この定義は, $\boldsymbol{\gamma}\in\ell_{[\mathbf{b}]}\text{-wt}(M)$ に対し, $\boldsymbol{\gamma}$ を (2.7.2) の形で表す多項式の組 $(Q_i(z),R_i(z),S_i(z))_{1\le i\le m-1}$ の選び方に依存していて well-defined ではない。実際に, 以下の場合が問題となる。

(i) $Q_i(z)$ と $R_i(z)$ が共通因子 $(1-\zeta z)$ を持つ場合 :

このときは, 量子ループの場合と同様に, 対応する $Y_{i,\zeta}$ と $Y^{-1}_{i,\zeta}$ とが打ち消しあって問題にならない。

(ii) $S_i(z)$ と $Q_i(qz)$ が共通因子 $(1-\eta z)$ を持つ場合 :

$S_i(z)=(1-\eta z)S_i'(z)$, $Q_i(z)=(1-q^{-1}\eta z)Q_i'(z)$ と表せるので,

$$\begin{aligned}q^{\deg Q_i}\frac{Q_i(q^{-1}z)}{Q_i(qz)}\frac{S_i(z)}{z^{b_i}}&=q^{\deg Q_i'+1}\frac{(1-q^{-2}\eta z)Q_i'(q^{-1}z)}{(1-\eta z)Q_i'(qz)}\frac{(1-\eta z)S_i'(z)}{z^{b_i}}\\&=q^{\deg Q_i'}\frac{Q_i'(q^{-1}z)}{Q_i'(qz)}\frac{q(1-q^{-2}\eta z)S_i'(z)}{z^{b_i}}\end{aligned}$$

となる。

(iii) $S_i(z)$ と $R_i(q^{-1}z)$ が共通因子 $(1-\eta z)$ を持つ場合：
$S_i(z)=(1-\eta z)S_i'(z)$, $R_i(z)=(1-q\eta z)R_i'(z)$ と表せるので,

$$\begin{aligned}q^{-\deg R_i}\frac{R_i(qz)}{R_i(q^{-1}z)}\frac{S_i(z)}{z^{b_i}}&=q^{-\deg R_i'-1}\frac{(1-q^2\eta z)R_i'(qz)}{(1-\eta z)R_i'(q^{-1}z)}\frac{(1-\eta z)S_i'(z)}{z^{b_i}}\\&=q^{-\deg R_i'}\frac{R_i'(qz)}{R_i'(q^{-1}z)}\frac{q^{-1}(1-q^2\eta z)S_i'(z)}{z^{b_i}}\end{aligned}$$

となる。

以上の問題を解決するために,

$$\begin{aligned}&Y_{i,q^{-1}\eta}Z_{i,\eta}=\tau_q Z_{i,q^{-2}\eta}\quad(1\le i\le m-1,\eta\in\mathbb{C}^\times)\quad(\text{(ii) に対応}),\\&Y_{i,q\eta}^{-1}Z_{i,\eta}=\tau_{q^{-1}}Z_{i,q^2\eta}\quad(1\le i\le m-1,\eta\in\mathbb{C}^\times)\quad(\text{(iii) に対応}),\\&\tau_{i,a}\tau_{i,b}=\tau_{i,ab}\quad(a,b\in\mathbb{C}^\times)\quad(S_i(z)\text{ の定数項に対応})\end{aligned}$$

で生成される $\mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm},Z_{i,\eta},\tau_{i,a}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta,\eta,a\in\mathbb{C}^\times}$ の両側イデアルを $\mathfrak{I}$ とし, 写像

$$\ell_{[\mathbf{b}]}\text{-wt}(M)\to\left(\mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm},Z_{i,\eta},\tau_{i,a}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta,\eta,a\in\mathbb{C}^\times}\right)/\mathfrak{I},\quad\boldsymbol{\gamma}\mapsto X^{\boldsymbol{\gamma}}$$

を考えれば, これは well-defined となる。

以上の準備の下で, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元表現 M に対し, q-指標 $\chi_{[\mathbf{b}]}(M)$ を,

$$\chi_{[\mathbf{b}]}(M):=\sum_{\boldsymbol{\gamma}\in\ell_{[\mathbf{b}]}\text{-wt}(M)}\dim M_{\boldsymbol{\gamma}}X^{\boldsymbol{\gamma}}\in\left(\mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm},Z_{i,\eta},\tau_{i,a}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta,\eta,a\in\mathbb{C}^\times}\right)/\mathfrak{I},$$

によって定める。すると, 以下のことが成り立つ。

Proposition 2.7.2 ([KW]). シフト量子アフィン代数 $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の有限次元表現のなす圏を $U_{q,[\mathbf{b}]}\text{-mod}_f$ と表し, その *Grothendieck* 群を $K_0(U_{q,[\mathbf{b}]}\text{-mod})$ と表すとき, 写像

$$\chi_{[\mathbf{b}]}:K_0(U_{q,[\mathbf{b}]}\text{-mod})\to\left(\mathbb{Z}[Y_{i,\zeta}^{\pm},Z_{i,\eta},\tau_{i,a}]_{1\le i\le m-1}^{\zeta,\eta,a\in\mathbb{C}^\times}\right)/\mathfrak{I},\quad M\mapsto\chi_{[\mathbf{b}]}(M)$$

は単射群準同型写像となる。

3 cyclotomic q-Schur 代数とその表現

[Wad24] において, ある種の Schur-Weyl 双対を通じて, あるシフトのシフト量子アフィン代数から cyclotomic q-Schur 代数への代数の準同型写像が得られることが示されている ([和田] にその解説がある)。この代数射を通じて, cyclotomic q-Schur 代数の cell 加群や既約加群上にシフト量子アフィン代数の作用を考えることにより, シフト量子アフィン代数のあるクラスの有限次元既約表現の q-指標やより詳しい加群の構造を組み合わせ論を用いて具体的に記述できる。

この節では cyclotomic q-Schur 代数について必要なことを簡単にまとめた後, cyclotomic q-Schur 代数に現れる既約加群の Drinfeld 多項式や, cell 加群の q-指標を組み合わせ論を用いて具体的に記述する。

3.1 cyclotomic q-Schur 代数の定義.

$\mathscr{H}_{n,r}$ を, パラメータ $q, Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1} \in \mathbb{C}^\times$ を持った, $G(r,1,n)$ 型の複素鏡映群に付随した $\mathbb{C}$ 上の **Ariki-Koike 代数 (cyclotomic Hecke 代数)** とする。つまり, $\mathscr{H}_{n,r}$ は, $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ を生成元とし,

$$
\begin{aligned}
&(T_0 - Q_0)(T_0 - Q_1)\dots(T_0 - Q_{r-1}) = 0,\\
&(T_i - q)(T_i - q^{-1}) = 0 \quad (1 \le i \le n-1),\\
&T_0T_1T_0T_1 = T_1T_0T_1T_0, \quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \quad (1 \le i \le n-2),\\
&T_iT_j = T_jT_i \quad (|i-j| > 1)
\end{aligned}
$$

を基本関係式として定まる $\mathbb{C}$ 上の結合代数である。$T_1, \dots, T_{n-1}$ で生成される $\mathscr{H}_{n,r}$ の部分代数は, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ に付随した Iwahori-Hecke 代数と同型であり, $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $w = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_l}$ $(s_i = (i, i+1))$ を簡約表示とすれば, $T_w := T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_l} \in \mathscr{H}_{n,r}$ が w の簡約表示によらずに定まる。また, $1 \le i \le n$ に対し,

$$L_i := T_{i-1}\dots T_2T_1T_0T_1T_2\dots T_{i-1}$$

とおく。

cyclotomic q-Schur 代数を考えるために, 集合

$$\Lambda_n(m) = \left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^m \mid \sum_{i=1}^m \mu_i = n \right\}$$

を考える。$P = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\varepsilon_i$ を 一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}_m$ のウェイト格子とすると, 写像

$$\Lambda_n(m) \to P, \quad (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \mapsto \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varepsilon_i$$

によって, $\Lambda_n(m)$ を P の部分集合とみなすことができる。さらに,

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r \text{ s.t. } m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m$$

を一つ固定し,

$$m_{\langle 0 \rangle} = 0, \quad m_{\langle k \rangle} = \sum_{j=1}^{k} m_j \quad (1 \le k \le r)$$

とし, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \Lambda_n(m)$, $0 \le k \le r$ に対し,

$$a_k^{\mu}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{m_{\langle k \rangle}} \mu_i$$

とおく。つまり, $\mathbf{m}$ は集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ を r 個に分割する仕方を指定しており, $a_k^{\mu}(\mathbf{m})$ は, 添え字が k 番目までの分割に含まれる μ の成分の総和を表している。

以上の準備のもとで, $\mu \in \Lambda_n(m)$ に対し,

$$\begin{aligned} m_{\mu} &:= \Big(\sum_{w \in \mathfrak{S}_{\mu}} q^{\ell(w)} T_w \Big) \Big(\prod_{k=1}^{r-1} \prod_{i=1}^{a_k^{\mu}(\mathbf{m})} (L_i - Q_k) \Big) \in \mathscr{H}_{n,r}, \\ M_{\mathbf{m}}^{\mu} &:= m_{\mu} \mathscr{H}_{n,r} \subset \mathscr{H}_{n,r} \end{aligned}$$

とおく。$M_{\mathbf{m}}^{\mu}$ は積によって右 $\mathscr{H}_{n,r}$-加群 (右イデアル) となる。ここで, m_{μ} や $M_{\mathbf{m}}^{\mu}$ は集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ の分割の仕方 $\mathbf{m}$ に依存して定まることに注意しよう§。

$\mathscr{H}_{n,r}$ に付随した **cyclotomic q-Schur 代数** は, 右 $\mathscr{H}_{n,r}$-加群 $\bigoplus_{\mu \in \Lambda_n(m)} M_{\mathbf{m}}^{\mu}$ の自己準同型環

$$\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m}) := \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,r}^{\mathrm{opp}}} \Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_n(m)} M_{\mathbf{m}}^{\mu} \Big)$$

として定義される。

---

§ [DJM98] における, オリジナルの cyclotomic q-Schur 代数の定義では, $\Lambda_n(m)$ を r 個に分割した集合を用いて考えているが, 実際には同じものである。この対応については, [Wad24], [和田] を参照。

3.2 cyclotomic q-Schur 代数の表現論.

cyclotomic q-Schur 代数の表現論を記述するために, 組み合わせ論の準備をしよう。

まず, 分割 r 個の組で, 各分割のサイズの総和が n であるようなもの全体の集合

$$\Lambda_{n,r}^{+} := \left\{ \lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r)}) \mid \lambda^{(k)} : \text{分割}, \quad \sum_{k=1}^{r} |\lambda^{(k)}| = n \right\}$$

を考える。さらに, $\mathbf{m}$ に沿って, $\Lambda_{n,r}^{+}$ の部分集合

$$\widetilde{\Lambda}_{n,r}^{+}(\mathbf{m}) := \{ \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+} \mid \ell(\lambda^{(r)}) \leq m_r \},$$
$$\Lambda_{n,r}^{+}(\mathbf{m}) := \{ \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+} \mid \ell(\lambda^{(k)}) \leq m_k \text{ for all } 1 \leq k \leq r \}$$

を考える。$\lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}(\mathbf{m})$ のとき, 各分割 $\lambda^{(k)}$ の長さは m_k 以下なので, 足りない分は 0 として, $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r)}$ と並べることにより, $\Lambda_n(m)$ の元と思うことができ, この対応で, $\Lambda_{n,r}^{+}(\mathbf{m})$ を $\Lambda_n(m)$ の部分集合とみなすことができる。cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の cell 加群は $\widetilde{\Lambda}_{n,r}^{+}(\mathbf{m})$ の元に対し定まるが, 後の議論で使われるのは, $\Lambda_{n,r}^{+}(\mathbf{m})$ に対応する cell 加群や既約加群である。

$\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \in \Lambda_{n,r}^{+}$ に対し, λ のヤング図を

$$[\lambda] := \{ (i,j,k) \in \mathbb{Z}_{>0}^{3} \mid 1 \leq j \leq \lambda_i^{(k)}, \ 1 \leq k \leq r \}$$

と定める。これは, 各分割 $\lambda^{(k)}$ のヤング図を順に並べたものと同一視できる。また, $\lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}$ に対し, λ を枠とする盤 $\mathbf{T}$ を, $[\lambda]$ の元に非負整数を対応させる写像

$$\mathbf{T} : [\lambda] \to \mathbb{Z}_{>0},$$

(対応する箱に非負整数を書き込んだもの) とし, 盤 $\mathbf{T}$ のウェイト $\mathrm{wt}\,\mathbf{T}$ を,

$$\mathrm{wt}\,\mathbf{T} = (\mu_1, \mu_2, \dots), \text{ where } \mu_i := \sharp\{ x \in [\lambda] \mid \mathbf{T}(x) = i \}$$

によって定める。さらに, 盤 $\mathbf{T}$ が,

- $\mathrm{wt}\,\mathbf{T} \in \Lambda_n(m)$ ($\Leftrightarrow \mathbf{T}(x) \in \{1, 2, \dots, m\}$ for all $x \in [\lambda]$),
- $\mathbf{T}((i,j,k)) \leq \mathbf{T}((i,j+1,k))$ if $(i,j+1,k) \in [\lambda]$
  (箱に書かれた数字が, 各行で非減少)
- $\mathbf{T}((i,j,k)) < \mathbf{T}((i+1,j,k))$ if $(i+1,j,k) \in [\lambda]$,
  (箱に書かれた数字が, 各列で (狭義) 単調増加)

- $\mathbf{T}((i,j,k)) > m_{\langle k-1\rangle} = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1}$,

を満たすとき, $\mathbf{T}$ は $\mathbf{m}$ に関して半標準盤であるという。最後の条件を除けば, 通常の意味での半標準盤が r 個並んだものであり, 最後の条件のみが, $\mathbf{m}$ に依存して定まる。

$$\mathrm{SStd}(\lambda) := \{\ 枠が\ \lambda\ である\ \mathbf{m}\ に関する半標準盤\ \}$$

とおく。すると, 以下のことが知られている。

Theorem 3.2.1 ([DJM98])**.**

(i) $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ は $\{W^\lambda \mid \lambda \in \widetilde{\Lambda}^+_{n,r}(\mathbf{m})\}$ を *cell* 加群とする *cellular* 代数である。

(ii) *cell* 加群 W^λ は $\mathrm{SStd}(\lambda)$ で添え字付けられた基底 $\{\varphi_{\mathbf{T}} \mid \mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)\}$ を持つ。

(iii) $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ が半単純であるための必要十分条件は,

$$\prod_{i=1}^{n}(1+q^2+\cdots+q^{2(i-1)}) \prod_{0\le i<j\le r-1} \prod_{-n<k<n} (q^{2k}Q_i - Q_j) \neq 0$$

である。このとき, W^λ $(\lambda \in \widetilde{\Lambda}^+_{n,r}(\mathbf{m}))$ は全て既約で, $\{W^\lambda \mid \lambda \in \widetilde{\Lambda}^+_{n,r}(\mathbf{m})\}$ が $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の既約表現の同型類の完全代表系を与える。

(iv) $\widetilde{\Lambda}^+_{n,r}(\mathbf{m}) \supseteqq \Lambda^+_0 \supseteqq \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ を満たすある部分集合 Λ^+_0 (この集合は, パラメータに依存して決まる) に対し, $\{L^\lambda := W^\lambda/\operatorname{rad} W^\lambda \mid \lambda \in \Lambda^+_0\}$ が $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の既約表現の同型類の完全代表系を与える。

(v) $m_k \ge n$ $(1 \le {}^\forall k \le r)$ $\Leftrightarrow$ $\Lambda^+_{n,r} = \widetilde{\Lambda}^+_{n,r}(\mathbf{m}) = \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m}) = \Lambda^+_0$ であるとき, $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ は準遺伝代数であり, さらに, $\mathscr{H}_{n,r}$ の準遺伝被覆となる。

3.3 cyclotomic q-Schur 代数に現れる既約表現の Drinfeld 多項式.

以下では, パラメータ q は 1 の冪根でないとする。cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の定義に用いている $\mathbf{m} = (m_1,\dots,m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ s.t. $m_1+\cdots+m_r = m$ に対し, シフトパラメータ $\mathbf{b_m} = (b_1,b_2,\dots,b_{m-1}) \in \mathbb{Z}^{m-1}_{\ge 0}$ を,

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i = m_{\langle k\rangle} \text{ for some } k, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定める。このとき, [Wad24] で得られている Schur-Weyl 双対より, 結合代数の準同型写像

$$\Upsilon_{\mathbf{Q}} : U_{q,[\mathbf{b_m}]} \to \mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$$

が得られる。この準同型は, cyclotomic q-Schur 代数のパラメータ (Ariki-Koike 代数のパラメータ) $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{r-1})$ に依存して定まる。以下, この準同型 $\Upsilon_{\mathbf{Q}}$ を通じて, cyclotomic q-Schur 代数の表現を, $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$ の表現と思う。

$\Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ は $\Lambda_n(m)$ の部分集合とみなせたことに注意すると, $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し, $\mathrm{wt}(\mathbf{T}^\lambda) = \lambda$ となる $\mathbf{T}^\lambda \in \mathrm{SStd}(\lambda)$ が一意的に存在することが分かる。このとき, $\varphi_{\mathbf{T}^\lambda}$ によって生成される W^λ の $U_{q,[\mathbf{b}]}$-部分加群を $\widetilde{W}^\lambda := U_{q,[\mathbf{b_m}]} \cdot \varphi_{\mathbf{T}^\lambda}$ とおくと, $\widetilde{W}^\lambda$ は $\varphi_{\mathbf{T}^\lambda}$ を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイト加群となる。さらに, $\widetilde{L}^\lambda = \widetilde{W}^\lambda / \mathrm{rad}\, \widetilde{W}^\lambda$ ($\mathrm{rad}\, \widetilde{W}^\lambda$ は $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$-加群としての根基) とおけば, $\widetilde{L}^\lambda$ は, $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$ の既約表現となる。このとき, 以下が成り立つ。

Theorem 3.3.1 ([KW]). *$\widetilde{L}^\lambda$ の Drinfeld 多項式 $(S_i(z), P_i(z))_{1 \le i \le m-1}$ は以下で与えられる。*

$$S_i(z) = \begin{cases} -Q_k^{-1} q^{-\lambda_1^{(k+1)} - i} + q^{\lambda_1^{(k+1)}} z & \text{if } i = m_{\langle k \rangle} \text{ for some } k, \\ 1 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$P_i(z) = \prod_{p=1}^{\lambda_j^{(k)} - \lambda_{j+1}^{(k)}} \left(1 - Q_{k-1} q^{2\lambda_j^{(k)} - 2j + i + 1} q^{-2p} z\right) \text{ if } i = m_{\langle k-1 \rangle} + j \ (1 \le j \le m_k).$$

Remark 3.3.2.

(i) $m_k \ge n$ for all k を満たすとき, $\Upsilon_{\mathbf{Q}}$ は全射となり, $\widetilde{W}^\lambda = W^\lambda$, $\widetilde{L}^\lambda = L^\lambda$ となることが分かる。一般には, $\Upsilon_{\mathbf{Q}}$ が全射になるかどうかは分かっていない。仮に $\Upsilon_{\mathbf{Q}}$ が全射でなかったとしても, $\widetilde{W}^\lambda = W^\lambda$, $\widetilde{L}^\lambda = L^\lambda$ は成り立つように思われるが, 証明はできてない。

(ii) $r = 1$ のとき, $\widetilde{L}^\lambda = W^\lambda$ であり, これは, $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の分割 λ に対応する既約表現の評価値 (evaluation value) Q_0 における評価表現 (evaluation rep.) と同型である。

3.4 cyclotomic q-Schur 代数の cell 加群の q-指標.

$\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ の cell 加群 W^λ ($\lambda \in \widetilde{\Lambda}^+_{n,r}(\mathbf{m})$) の q-指標を記述するために, 1 つ組み合わせ論の記号を導入する。$x = (i, j, k) \in [\lambda]$ に対し,

$$\mathrm{res}(x) := Q_{k-1} q^{2(j-i)}$$

とおく。 このとき, 以下が成り立つ。

Theorem 3.4.1 ([KW])**.** $\lambda \in \widetilde{\Lambda}^+_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し,

$$\chi_{[\mathbf{b_m}]}(W^\lambda) = \sum_{\mathbf{T}\in \mathrm{SStd}(\lambda)} X^{\mathbf{T}}, \ \textit{where } X^{\mathbf{T}} := \prod_{i=1}^{m-1} \Big(\prod_{\substack{x\in[\lambda] \\ \mathbf{T}(x)=i}} Y_{i,q^{i-1}\mathrm{res}(x)} \prod_{\substack{y\in[\lambda] \\ \mathbf{T}(y)=i+1}} Y^{-1}_{i,q^{i+1}\mathrm{res}(y)} \Big) \times \prod_{k=1}^{r-1} \tau_{m_{\langle k\rangle}, -q^{-m_{\langle k\rangle}} Q_k^{-1}} Z_{m_{\langle k\rangle}, q^{m_{\langle k\rangle}} Q_k}.$$

Remark 3.4.2.

(i) $r=1$ のとき, W^λ は $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の分割 λ に対応する既約表現の評価値 Q_0 における評価表現 (evaluation rep.) と同型であった。このときは, [FM02] によって, 同じ結果が他の方法で既に得られている。

(ii) W^λ における L^μ の組成重複度 (分解定数) は, 三角性を持っており, 分解定数は, レベル r Fock 空間の圏化 (いわゆる LLT-Ariki 型理論) を通じて, 両側放物型 Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて記述できることが, [RSVV16], [Los16] で示されている。よって, 原理的には, L^λ の q-指標も W^λ の q-指標より計算できることになっている。分解定数に関しては扱っていないが, cyclotomic q-Schur 代数の表現圏を用いた Fock 空間の圏化は [Wad14] にある。

4 シフト量子アフィン代数のあるクラスの有限次元既約表現の q-指標

4.1 分離条件下での $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$-加群 W^λ の構造.

以下でも, パラメータ q は 1 の冪根でないと仮定する。さらに, 条件 (分離条件という)

$$\prod_{0\le i<j\le r-1} \prod_{-n<k<n} (q^{2k}Q_i - Q_j) \neq 0 \tag{4.1.1}$$

を課すと, $\mathscr{S}_{n,r}(\mathbf{m})$ は半単純となり, $\widetilde{L}^\lambda = W^\lambda$ となる。このとき, [JM00] で得られている W^λ の seminormal 基底 $\{\widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}} \mid \mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)\}$ を考えると, $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$ の作用に関して, $\widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}}$ ($\mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)$) は $\ell_{[\mathbf{b_m}]}$-ウェイトベクトルとなる。さらに, $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$ の作用が具体的に, 記述できる。その記述を与えるために, 少し組み合わせ論の準備をする。

$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$ とする。 $\mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)$ と $x \in [\lambda]$ に対し, λ を枠とする盤 $\mathbf{T}^\pm_x$ を,

$$\mathbf{T}^\pm_x(y) = \begin{cases} \mathbf{T}(x) \pm 1 & \text{if } y = x, \\ \mathbf{T}(y) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (y \in [\lambda])$$

によって定める。つまり, $\mathbf{T}^\pm_x$ は $\mathbf{T}$ の箱 x に書かれた数字に ± 1 を加え, 他の箱の数字はそのままにした盤である。さらに $1 \leq i \leq m-1$ に対し,

$$[\mathbf{T}]_{\alpha_i} := \{x \in [\lambda] \mid \mathbf{T}(x) = i+1 \text{ and } \mathbf{T}^-_x \in \mathrm{SStd}(\lambda)\},$$
$$[\mathbf{T}]_{-\alpha_i} := \{x \in [\lambda] \mid \mathbf{T}(x) = i \text{ and } \mathbf{T}^+_x \in \mathrm{SStd}(\lambda)\}$$

とおく。このとき, W^λ 上の $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$ の作用が,

$$e_{i,t} \cdot \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}} = \sum_{x \in [\mathbf{T}]_{\alpha_i}} B_{\mathbf{T}^-_x} (q^i \operatorname{res}(x))^t \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}^-_x},$$
$$f_{i,t} \cdot \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}} = \sum_{x \in [\mathbf{T}]_{-\alpha_i}} C_{\mathbf{T}^+_x} (q^i \operatorname{res}(x))^t \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}^+_x}$$

によって与えられる。ここで, $B_{\mathbf{T}^-_x}, C_{\mathbf{T}^+_x} \in \mathbb{C}^\times$ は $t \in \mathbb{Z}$ には依らずに定まる。また, $\psi^+_{i,-b_i+s}$, $\psi^-_{i,-s}$ の作用も具体的に書けるが, ここでは省略する。

4.2 分離条件下での $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$-加群 W^λ のシフト.

引き続き, q は 1 の冪根でないとし, 分離条件 (4.1.1) を満たすとする。

$\mathbf{b}' = (b'_1, \ldots, b'_{m-1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{m-1}$ に対し, $\mathbf{b} := \mathbf{b}' + \mathbf{b_m}$ とおくと, Theorem 2.2.1 における準同型写像 $\Delta_{\mathbf{b}',\mathbf{b_m}} : U_{q,[\mathbf{b}]} \to U_{q,[\mathbf{b}']} \otimes U_{q,[\mathbf{b_m}]}$ を考えることができる。この $\Delta_{\mathbf{b}',\mathbf{b_m}}$ を通じて, $U_{q,[\mathbf{b_m}]}$-加群 W^λ ($\lambda \in \Lambda^+_{n,r}(\mathbf{m})$) と $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{B}_{[\mathbf{b}']}$ に対応する $U_{q,[\mathbf{b}']}$ の 1 次元表現 $L_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{C}w$ とのテンソル積表現 $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^\lambda$ ($U_{q,[\mathbf{b}]}$-加群) を考えることができる。このとき, 以下のことが成り立つ。

Theorem 4.2.1 ([KW])**.** *上の設定で, $U_{q,[\mathbf{b}]}$-加群 $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^\lambda$ に関して以下のことが成り立つ。*

(i) $w \otimes \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}}$ ($\mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)$) は $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトベクトルである。さらに, $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^\lambda$ の $\ell_{[\mathbf{b}]}$-ウェイトは multiplicity-free である。

(ii) $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^\lambda$ の特異ベクトルは, (スカラー倍を除いて) $w \otimes \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}^\lambda}$ のみである。よって, $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^\lambda$ の $U_{q,[\mathbf{b}]}$-部分加群は必ず $w \otimes \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}^\lambda}$ を含む。

(iii) $w \otimes \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}}$ ($\mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)$) が f-特異ベクトルであるための必要十分条件は,

$$\prod_{x \in [\mathbf{T}]_{-\alpha_i}} (1 - q^i \operatorname{res}(x) z) \mid S'_i(z) \quad (1 \leq i \leq m-1) \tag{4.2.1}$$

である。ここで,

$$S'_i(z) = \sum_{s=0}^{b'_i} \beta_{i,-b'_i+s} z^s$$

である *(*$\psi^+_{i,-b'_i+s} \cdot w = \beta_{i,-b'_i+s} w$ であった*)*。

(iv) 条件 (4.2.1) を満たす $\mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)$ *(*よって, $w \otimes \widetilde{\varphi}_{\mathbf{T}}$ は f-特異ベクトル*)* に対し,

$$\mathrm{SStd}(\lambda)_{\leq \mathbf{T}} := \{\mathbf{S} \in \mathrm{SStd}(\lambda) \mid \mathbf{S}(x) \leq \mathbf{T}(x) \textit{ for all } x \in [\lambda]\}$$

とおく。このとき, $\{w \otimes \widetilde{\varphi}_{\mathbf{S}} \mid \mathbf{S} \in \mathrm{SStd}(\lambda)_{\leq \mathbf{T}}\}$ で張られる $L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^{\lambda}$ の部分空間 $(L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^{\lambda})_{\leq \mathbf{T}}$ は, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の作用で不変である。

(v) 条件 (4.2.1) を満たす $\mathbf{T} \in \mathrm{SStd}(\lambda)$ で, さらに, $\mathrm{SStd}(\lambda)_{\leq \mathbf{T}} \setminus \{\mathbf{T}\}$ の中に条件 (4.2.1) を満たすものが存在しないとき, $\mathbf{T}$ を $\mathbf{T}^*_{[\mathbf{b}']}$ で表すと, $\mathbf{T}^*_{[\mathbf{b}']} \in \mathrm{SStd}(\lambda)$ は, $\mathbf{b}'$ に対し一意的に定まる。このとき, $(L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^{\lambda})_{\leq \mathbf{T}^*_{[\mathbf{b}']}}$ は, $U_{q,[\mathbf{b}]}$ の既約表現である。

(vi) 既約な $U_{q,[\mathbf{b}]}$-加群 $(L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^{\lambda})_{\leq \mathbf{T}^*_{[\mathbf{b}']}}$ の *Drinfeld* 多項式 $(S_i(z), P_i(z))_{1 \leq i \leq m-1}$ は,

$$S_i(z) = S'_i(z) \times \begin{cases} \Big(-Q_k^{-1} q^{-\lambda_1^{(k+1)} - i} + q^{\lambda_1^{(k+1)}} z \Big) & \textit{if } i = m_{\langle k \rangle} \textit{ for some } k, \\ 1 & \textit{otherwise,} \end{cases}$$

$$P_i(z) = \prod_{p=1}^{\lambda_j^{(k)} - \lambda_{j+1}^{(k)}} \big(1 - Q_{k-1} q^{2\lambda_j^{(k)} - 2j + i + 1} q^{-2p} z\big) \textit{ if } i = m_{\langle k-1 \rangle} + j \ (1 \leq j \leq m_k)$$

で表され, q-指標は,

$$\chi_{[\mathbf{b}]}\big((L_{\boldsymbol{\beta}} \otimes W^{\lambda})_{\leq \mathbf{T}^*_{[\mathbf{b}']}}\big) = \Big(\prod_{i=1}^{m-1} \big(\tau_{i,a_i} \prod_{p=1}^{b'_i} Z_{i,\eta_{i,p}}\big)\Big) \Big(\sum_{\mathbf{S} \in \mathrm{SStd}(\lambda)_{\leq \mathbf{T}^*_{[\mathbf{b}']}}} X^{\mathbf{S}} \Big)$$

$$\textit{when } S'_i(z) = a_i (1 - \eta_{i,1} z)(1 - \eta_{i,2} z) \dots (1 - \eta_{i,b'_i} z)$$

によって与えられる。

参考文献

[Bec94] Jonathan Beck. Braid group action and quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 165(3):555–568, 1994.

[CP91] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 142(2):261–283, 1991.

[CP94] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[DJM98] Richard Dipper, Gordon James, and Andrew Mathas. Cyclotomic q-Schur algebras. *Math. Z.*, 229(3):385–416, 1998.

[Dri87] V. G. Drinfel'd. A new realization of Yangians and of quantum affine algebras. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 296(1):13–17, 1987.

[FM01] Edward Frenkel and Evgeny Mukhin. Combinatorics of q-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 216(1):23–57, 2001.

[FM02] Edward Frenkel and Evgeny Mukhin. The Hopf algebra $\mathrm{Rep}\, U_q\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty$. *Selecta Math. (N.S.)*, 8(4):537–635, 2002.

[FR99] Edward Frenkel and Nicolai Reshetikhin. The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathscr{W}$-algebras. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 163–205. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[FT19] Michael Finkelberg and Alexander Tsymbaliuk. Multiplicative slices, relativistic Toda and shifted quantum affine algebras. In *Representations and nilpotent orbits of Lie algebraic systems*, volume 330 of *Progr. Math.*, pages 133–304. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019.

[Her23] David Hernandez. Representations of shifted quantum affine algebras. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (13):11035–11126, 2023.

[JM00] Gordon James and Andrew Mathas. The Jantzen sum formula for cyclotomic q-Schur algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(11):5381–5404, 2000.

[KW] Ryosuke Kodera and Kentaro Wada. in preparation.

[Los16] Ivan Losev. Proof of Varagnolo-Vasserot conjecture on cyclotomic categories

$\mathcal{O}$. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(2):631–668, 2016.

[RSVV16] Raphaël Rouquier, Peng Shan, Michela Varagnolo, and Eric Vasserot. Categorifications and cyclotomic rational double affine Hecke algebras. *Invent. Math.*, 204(3):671–786, 2016.

[Wad14] Kentaro Wada. Induction and restriction functors for cyclotomic q-Schur algebras. *Osaka J. Math.*, 51(3):785–822, 2014.

[Wad24] Kentaro Wada. Schur-Weyl dualities for shifted quantum affine algebras and Ariki-Koike algebras. *J. Algebra*, 654:132–188, 2024.

[和田] 和田 堅太郎. Schur-Weyl duality for shifted quantum affine algebras and Ariki-Koike algebras, *Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2022* 報告集.