

クラスター代数, ワイル群とパンルヴェ方程式

鈴木 貴雄 *

1 はじめに

パンルヴェ方程式は, 20 世紀初めに発見された動く分岐点を持たない 2 階有理型非線形常微分方程式の総称である. その由来は線形常微分方程式の変形問題や無限次元可積分系の簡約など様々であるが, そのうちの 1 つにアフィン・ワイル群を由来とする q -差分方程式の連続極限がある. これは大まかに言うと, まずアフィン・ワイル群を有理関数体上の双有理変換群として実現し, 次にその群の平行移動と呼ばれる元として q -パンルヴェ方程式と呼ばれる 2 階非線形 q -差分方程式を構成し, 最後にその連続極限 $q \rightarrow 1$ を取るというものである¹.

q -パンルヴェ方程式の由来はアフィン・ワイル群の双有理表現に加えて, 線形 q -差分方程式の接続問題, 離散可積分系の簡約, パデ法など様々であり, 発見された方程式も多数であるが, その分類については坂井による [17] において 1 つの結果が得られた. そこでは, 全ての q -パンルヴェ方程式が由来となるアフィン・ワイル群の型によってラベル付けされ, 更に $E_8^{(1)}$ 型を頂点とする次の図のような退化構造を持つことが明らかにされた.

$$E_8^{(1)} \rightarrow E_7^{(1)} \rightarrow E_6^{(1)} \rightarrow D_5^{(1)} \rightarrow A_4^{(1)} \rightarrow E_3^{(1)} \rightarrow E_2^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)}$$

$\nearrow \begin{matrix} A_1^{(1)} \\ |\alpha|^2=8 \end{matrix}$

ここで, E_3 は $A_2 + A_1$ を, E_2 は $A_1 + \begin{matrix} A_1 \\ |\alpha|^2=14 \end{matrix}$ をそれぞれ表す.

最近, クラスター代数の理論を用いた q -パンルヴェ方程式の定式化が [1, 2, 6, 14, 15, 16] などにおいて次々に行われた. 特に [15] においては, $D_5^{(1)}$ 型から下の q -パンルヴェ方程式の退化が簾の頂点の合流によって与えられることが明らかにされた. 本稿の主目的は, $E_7^{(1)}$ 型から $D_5^{(1)}$ 型への退化を簾の頂点の合流によって与えることである².

2 クラスター代数

本節では, クラスター代数についての基本的な事項のうち必要なものだけを簡潔に紹介する. 詳しくは [3, 4, 13] を参照して欲しい.

Q は 1 ループと 2 サイクルを持たない簾とし, Q の頂点集合を I とする³. このとき, Q と 1 対 1 対応する交代行列 $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j \in I}$ を次のように定めることが出来る.

*〒 577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部, suzuki@math.kindai.ac.jp

¹アフィン・ワイル群を背景に持つパンルヴェ方程式の離散化として, 楕円差分, q -差分, 加法差分の 3 種類の差分方程式の存在が知られている. 詳しくは [11] を参照して欲しい.

² $E_8^{(1)}$ 型から $E_7^{(1)}$ 型への退化だけは未だ上手くいっておらず, その原因も不明である.

³有限個の頂点と辺を持つグラフで, 各辺に向きが付いたものを簾という. また, 始点と終点と同じ頂点となる辺を 1 ループといい, 2 つの頂点の間の辺とその逆向きの辺のペアを 2 サイクルという.

- $i \in I$ から $j \in I$ に向けて k 本の辺が存在するなら, $\lambda_{i,j} = k$, $\lambda_{j,i} = -k$ とおく.
- $i \in I$ と $j \in I$ の間に辺が存在しなければ, $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i} = 0$ とおく.

また, I で添字付けられたクラスター変数と呼ばれる変数の組を $x = (x_i)_{i \in I}$, 係数と呼ばれる変数の組を $y = (y_i)_{i \in I}$ とし, 三つ組 (Q, x, y) を種と呼ぶ.

$i \in I$ における Q の変異 μ_i を, 次のように定める.

1. $i_1 \in I$ から $i \in I$ に向けて k_1 本の辺が存在し, かつ $i \in I$ から $i_2 \in I$ に向けて k_2 本の辺が存在するなら, $i_1 \in I$ から $i_2 \in I$ に向けて $k_1 k_2$ 本の辺を加える.
2. 上記の操作の後で 2 サイクルが現れたなら, それらを全て消去する⁴.
3. 最後に, $i \in I$ に接する辺の向きを全て逆にする.

このとき, μ_i の Λ への作用は

$$\mu_i(\lambda_{i_1, i_2}) = \begin{cases} -\lambda_{i_1, i_2} & (i_1 = i \text{ or } i_2 = i) \\ \lambda_{i_1, i_2} + \frac{\text{sgn}(\lambda_{i_1, i}) + \text{sgn}(\lambda_{i, i_2})}{2} \lambda_{i_1, i} \lambda_{i, i_2} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる. また, μ_i の x への作用を

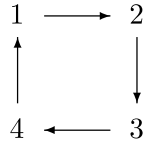
$$\mu_i(x_j) = \begin{cases} \frac{\prod_{\lambda_{i,j}>0} x_j^{\lambda_{i,j}+y_i} \prod_{\lambda_{i,j}<0} x_j^{\lambda_{j,i}}}{(1+y_i)x_i} & (j = i) \\ x_j & (j \neq i) \end{cases}$$

と定め, y への作用を

$$\mu_i(y_j) = \begin{cases} y_i^{-1} & (j = i) \\ y_j \left(1 + y_i^{\text{sgn}(\lambda_{j,i})}\right)^{\lambda_{j,i}} & (j \neq i) \end{cases}$$

と定める.

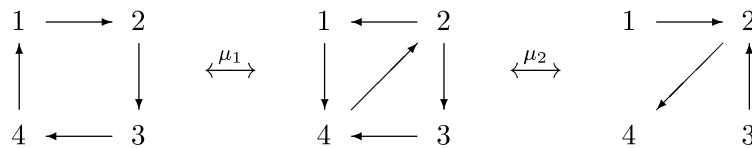
例 2.1. 次の図の籐を Q とする.



Q に対応する交代行列は

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. Q は μ_1 と μ_2 を続けて行うことで次の図のように変換される.



⁴この操作を正確に述べると次の通りである. 辺 $i_1 \rightarrow i_2$ が k_1 本, 辺 $i_2 \rightarrow i_1$ が k_2 本存在し $k_1 \geq k_2$ ならば, 2 サイクルが k_2 個現れたとみなして辺 $i_1 \rightarrow i_2$ を $k_1 - k_2$ 本だけ残して他は全て消去する.

このとき, Λ は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\mu_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\mu_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変換され, x は

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &\xleftrightarrow{\mu_1} \left(\frac{x_2 + y_1 x_4}{(1 + y_1)x_1}, x_2, x_3, x_4 \right) \\ &\xleftrightarrow{\mu_2} \left(\frac{x_2 + y_1 x_4}{(1 + y_1)x_1}, \frac{x_2 x_3 + y_1 x_3 x_4 + y_1 y_2 x_1 x_4}{(1 + y_1 + y_1 y_2)x_1 x_2}, x_3, x_4 \right) \end{aligned}$$

と変換され, y は

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3, y_4) &\xleftrightarrow{\mu_1} \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_1 y_2}{1 + y_1}, y_3, y_4(1 + y_1) \right) \\ &\xleftrightarrow{\mu_2} \left(\frac{y_2}{1 + y_1 + y_1 y_2}, \frac{1 + y_1}{y_1 y_2}, \frac{y_1 y_2 y_3}{1 + y_1 + y_1 y_2}, y_4(1 + y_1 + y_1 y_2) \right) \end{aligned}$$

と変換される⁵.

定義 2.2. 初期種 (Q_0, x_0, y_0) に対して有限回の変異を行うことで得られるクラスター変数の全体を X とする. このとき, 可換環 $\mathbb{Z}(y_0)[x|x \in X]$ を係数付きクラスター代数という.

最後に, クラスター代数のより一般的な定義について述べておく. $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ を積について可換な半体, $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ を群環とし, $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ をその商体とする. また, $x = (x_1, \dots, x_n)$ を $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ 上独立な変数の組とし, $y = (y_1, \dots, y_n)$ を $\mathbb{P}$ の元の組とする. このとき, 有限回の変異によって得られるクラスター変数全体で生成される $\mathbb{Q}\mathbb{P}(x)$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数 $\mathcal{A}(Q, x, y)$ を係数付きクラスター代数という. 定義 2.2 は, この定義において $\oplus$ を通常の和とし, $\mathbb{P}$ を引き算を持たない y の有理式全体としたものになっている. このような半体を普遍半体という. また, $\mathbb{P} = \{1\}$ に加法 $1 \oplus 1 = 1$ を入れたものを自明な半体といい, このとき $\mathcal{A}(Q, x, y) = \mathcal{A}(Q, x)$ は係数なしのクラスター代数となる.

3 アフィン・ワイル群

本節では, アフィン・ワイル群についての基本的な事項のうち必要なものだけを簡潔に紹介する. 詳しくは [10, 18] を参照して欲しい.

有限集合 J で添字付けられた行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \in J}$ を考える. A が次の 3 つの条件を満たすとき, これを一般カルタン行列という.

- $a_{i,i} = 2$ ($i \in J$) である.
- $i \neq j$ ($i, j \in J$) ならば $a_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ である.
- $a_{i,j} = 0$ ならば $a_{j,i} = 0$ である.

⁵この例に限らず, どのような Q に対しても $\mu_i^2 = 1$ ($i \in I$) が必ず成り立つ. なお, 変異の y への作用が籠の形に依存することから, 変異の合成は有理関数体上の自己同型写像の標準的な合成とは順序が逆になるので注意すること.

また, A に付随するワイル群 $W(A)$ を, 生成元 r_i ($i \in J$) とそれらの満たす基本関係式

$$r_i^2 = 1 \quad (i \in J), \quad (r_i r_j)^{m_{i,j}} = 1 \quad (i, j \in J, i \neq j),$$

ただし

$$m_{i,j} = \begin{cases} 2 & (a_{i,j}a_{j,i} = 0) \\ 3 & (a_{i,j}a_{j,i} = 1) \\ 4 & (a_{i,j}a_{j,i} = 2) \\ 6 & (a_{i,j}a_{j,i} = 3) \\ \infty & (a_{i,j}a_{j,i} \geq 4) \end{cases}$$

によって定める⁶.

$W(A)$ はルート格子と呼ばれる自由 $\mathbb{Z}$ 加群上で次のように実現される. 単純ルートと呼ばれる線形独立なベクトルの組 $\{\alpha_i\}_{i \in J}$ を用いて, ルート格子を $\bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i$ と定める. 更に, r_i を単純ルートに

$$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{i,j}\alpha_i \quad (i, j \in J)$$

と作用するルート格子上の変換として再定義する. このとき, r_i は単純鏡映と呼ばれ, 写像の合成を演算として $W(A)$ の基本関係式を満たす.

例 3.1. $J = \{1, 2\}$ とし,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $W(A)$ の生成元 r_1, r_2 は基本関係式

$$r_1^2 = r_2^2 = 1, \quad r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2$$

を満たす. これにより,

$$W(A) = \{1, r_1, r_2, r_1 r_2, r_2 r_1, r_1 r_2 r_1\}$$

となるが, 実は $W(A)$ は対称群 $\mathcal{S}_3$ と同型である. この事実は次のように確認出来る. $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ とし, r_i を $\mathbb{R}^3$ 上の変換

$$r_1(\varepsilon_i) = \varepsilon_{(1,2)(i)}, \quad r_2(\varepsilon_i) = \varepsilon_{(2,3)(i)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

として再定義する. ここで, $(1, 2)(i), (2, 3)(i)$ は自然数 i の互換を表す. このとき,

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

とおくと,

$$r_1(\alpha_1) = -\alpha_1, \quad r_1(\alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_1, \quad r_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad r_2(\alpha_2) = -\alpha_2$$

となり, $W(A)$ のルート格子 $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$ 上での実現が得られる.

以降では, アフィン型と呼ばれる $W(A)$ が無限群となるような一般カルタン行列のうち, 特に $A_n^{(1)}, D_n^{(1)}, E_n^{(1)}$ 型と名付けられたもののみ考える. それらの具体的な形は次の通りである.

⁶ $m_{i,j} = \infty$ は r_i と r_j の間に関係式が存在しないことを表す. また, $m_{i,j} = 2$ のとき r_i と r_j は可換である.

- $A_1^{(1)}$ 型:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $A_n^{(1)}$ ($n \geq 2$) 型:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & O \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & O & & & 2 & -1 \\ -1 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $D_n^{(1)}$ ($n \geq 4$) 型:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & 2 & -1 & & & & \\ -1 & -1 & 2 & -1 & & & O \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 2 & -1 \\ & O & & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & & & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $E_6^{(1)}$ 型:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $E_7^{(1)}$ 型:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $E_8^{(1)}$ 型:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ここで、添字集合は $X_n^{(1)}$ 型ならば $J = \{0, 1, \dots, n\}$ とする.

A がアフィン型るとき、全ての列の添字 $j \in J$ に対して

$$\sum_{i \in J} \epsilon_i a_{i,j} = 0$$

を満たすような正の整数の組 $(\epsilon_i)_{i \in J}$ が存在する. このような組のうち最大公約数が 1 となるものを選び、零ルートと呼ばれるベクトル δ を

$$\delta = \sum_{i \in J} \epsilon_i \alpha_i$$

と定めると、 δ は全ての単純鏡映の下で不変である. 特に $A_n^{(1)}, D_n^{(1)}, E_n^{(1)}$ 型の場合、 δ は次のように与えられる.

- $A_n^{(1)}$ ($n \geq 1$) 型:

$$\delta = \sum_{i=0}^n \alpha_i.$$

- $D_n^{(1)}$ ($n \geq 4$) 型:

$$\delta = \alpha_0 + \alpha_1 + 2 \sum_{i=2}^{n-2} \alpha_i + \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

- $E_6^{(1)}$ 型:

$$\delta = \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6.$$

- $E_7^{(1)}$ 型:

$$\delta = 2\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7.$$

- $E_8^{(1)}$ 型:

$$\delta = 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8.$$

最後に、乗法的な単純ルートを導入しておく. 具体的には、定数 p を用いて形式的に

$$a_i = p^{\alpha_i} \quad (i \in J), \quad q = p^\delta$$

とおき、 a_i を単純ルートと、 q を零ルートと改めてみなす. このとき、単純鏡映の単純ルートへの作用は

$$r_i(a_j) = a_j a_i^{-a_{i,j}} \quad (i, j \in J)$$

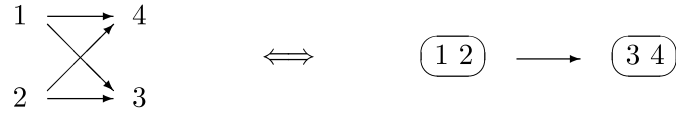
となり、零ルートは全ての単純鏡映の下で不変である.

4 籐の変異とアフィン・ワイル群の双有理表現

籐の中には有限回の変異によって頂点が置き換えられるものが存在し、このような性質は変異周期と呼ばれる。実は、変異周期を持ちかつクラスター変数の集合 X が無限集合となるような籐 Q を上手く選ぶことで、 $A_n^{(1)}, D_n^{(1)}, E_n^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群を有理関数体上の双有理変換として実現出来ることが分かっている。その手法と具体例を紹介することが本節の目的である。

4.1 アフィン・ワイル群の双有理表現の構成

以降では、クラスター変数 x は扱わないので (Q, y) を種とみなすことにする。また、籐の記述の簡略化のため次の図のような表記を用いる。



このとき、頂点の集合 $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ をそれぞれコピーと呼ぶことにする⁷。更に、 Q の 2 つの頂点 $i, j \in I$ の互換 (i, j) を導入する。 (i, j) は交代行列 Λ に行と列の入れ替えとして作用し、係数 y への作用は

$$(i, j)(y_k) = y_{(i,j)(k)} \quad (k \in I)$$

と自然に定まる。

Q が変異周期を持つとき、 Q を不変に保つような変異と互換の非自明な合成が存在する。この事実を用いてアフィン・ワイル群の双有理表現を系統的に構成する方法が、[12] において確立された。その概要は次の通りである⁸。

- Q が 3 サイクル $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ を持つとき、 Q は変異と互換の合成 $\mu_1\mu_2(2, 3)\mu_2\mu_1$ の下で不変である。このとき、変異と互換の合成は単純鏡映となり、対応する乗法的単純ルートは $y_1y_2y_3$ で与えられる。4 サイクル、5 サイクルなどについても同様である。
- Q が 4 サイクル $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ を持つときは、 Q は更に変異と互換の合成 $\mu_1(1, 3)\mu_1$ と $\mu_2(2, 4)\mu_2$ の下でも不変である。このとき、変異と互換の合成はいずれも単純鏡映となり、対応する乗法的単純ルートは y_1y_3 と y_2y_4 でそれぞれ与えられる。
- Q がコピー $\{1, 2\}$ を持つならば、 Q は互換 $(1, 2)$ の下で不変である。このとき、互換は単純鏡映となり、対応する乗法的単純ルートは y_1/y_2 または y_2/y_1 で与えられる。コピー $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}$ などについても同様である。

変異と互換の合成を考える際には、サイクル中の辺の始点と向きは問わないことを注意しておく。具体的には、例えば $\mu_1\mu_2(2, 3)\mu_2\mu_1$ の代わりに $\mu_3\mu_2(1, 2)\mu_2\mu_3$ としても y への作用は変わらない。

事実 4.1 ([1, 2]). 坂井の分類における q -パンルヴェ方程式の由来となるアフィン・ワイル群は、変異と互換によって有理関数体 $\mathbb{C}(y)$ 上の双有理変換として実現される⁹。

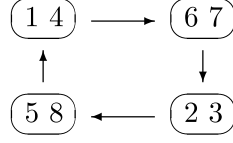
⁷ Λ を用いて言い直すと次のようになる。任意の $k \in I$ に対して $\lambda_{i,k} = \lambda_{j,k}$, $\lambda_{k,i} = \lambda_{k,j}$ を満たす $i, j \in I$ をひとまとめにして、 $\{i, j\}$ をコピーと呼ぶ。

⁸正確には、サイクルに含まれない全ての $i \in I$ において i からサイクルに入る辺とサイクルから i に出る辺の個数が等しい場合にのみ、この構成法が有効となる。

⁹正確には、 $E_2^{(1)}$ 型と $A_1^{(1)}|_{|\alpha|^2=8}$ 型については変異と互換だけでは実現出来ない。それらに加えて、 Q の全ての辺を反転させて全ての係数を $y_i \mapsto 1/y_i$ とする変換が必要である。ただし、既知の q -パンルヴェ方程式を構成するだけなら変異と互換だけで十分である。

4.2 $D_5^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群

次の図の籐を Q とする.



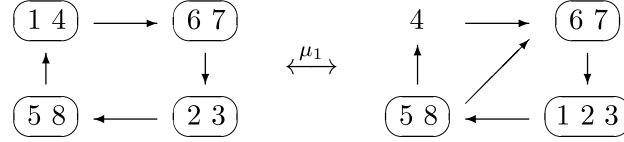
Q は 4 サイクル $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ を持ち, またコピー $\{1, 4\}, \{6, 7\}, \{2, 3\}, \{5, 8\}$ を持つ. これに基づいて, 単純鏡映を

$$r_0 = (1, 4), \quad r_1 = (2, 3), \quad r_2 = \mu_1(1, 2)\mu_1, \quad r_3 = \mu_5(5, 6)\mu_5, \quad r_4 = (5, 8), \quad r_5 = (6, 7)$$

と定め, 乗法的単純ルートを

$$a_0 = \frac{y_4}{y_1}, \quad a_1 = \frac{y_3}{y_2}, \quad a_2 = y_1 y_2, \quad a_3 = y_5 y_6, \quad a_4 = \frac{y_8}{y_5}, \quad a_5 = \frac{y_7}{y_6}$$

と定める. ただし, 合成は右から順に作用するものとする. このとき, μ_1 によって Q は次の図のように変換される.



右の籐は $(1, 2)$ の下で不変であるから, Q は r_2 の下で不変である. r_3 についても同様であり, 残りの r_0, r_1, r_4, r_5 の下では明らかに Q は不変である.

r_2 の y への作用は, 例 2.1 と同様の計算によって

$$\begin{aligned} r_2(y_1) &= \frac{1}{y_2}, \quad r_2(y_2) = \frac{1}{y_1}, \quad r_2(y_3) = y_3, \quad r_2(y_4) = y_4, \\ r_2(y_i) &= \frac{y_2 y_i (1 + y_1)}{1 + y_2} \quad (i = 5, 8), \quad r_2(y_i) = \frac{y_1 y_i (1 + y_2)}{1 + y_1} \quad (i = 6, 7) \end{aligned}$$

となり, ここから r_2 の乗法的単純ルートへの作用

$$r_2(a_0) = a_0 a_2, \quad r_2(a_1) = a_1 a_2, \quad r_2(a_2) = \frac{1}{a_2}, \quad r_2(a_3) = a_3 a_2, \quad r_2(a_4) = a_4, \quad r_2(a_5) = a_5$$

が従う. その他の単純鏡映についても同様である. こうして得られた単純鏡映は, $D_5^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群の基本関係式を満たす. 基本関係式はいずれも変異と互換の満たす関係式

$$\mu_i^2 = 1, \quad (i, j)\mu_i = \mu_j(i, j) \quad (i, j = 1, \dots, 8)$$

より導かれるが, その具体例を 2 つ挙げておく. まず $r_2 r_0 r_2 = r_0 r_2 r_0$ を導く. 変異と互換の合成においてサイクル中の辺の始点と向きは問わないことから $r_2 = \mu_2(1, 2)\mu_2$ が成り立つので, これを用いると

$$\begin{aligned} r_2 r_0 r_2 &= \mu_2(1, 2)\mu_2(1, 4)\mu_2(1, 2)\mu_2 \\ &= \mu_2(1, 2)(1, 4)(1, 2)\mu_2 \\ &= \mu_2(1, 4)(1, 2)(1, 4)\mu_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1, 4)\mu_2(1, 2)\mu_2(1, 4) \\
&= r_0 r_2 r_0
\end{aligned}$$

となる. 次に $r_2 r_3 r_2 = r_3 r_2 r_3$ を示す. 同様にして $\mu_1 \mu_5 \mu_2(2, 6)\mu_2 \mu_5 \mu_1 = \mu_6 \mu_2 \mu_5(1, 5)\mu_5 \mu_2 \mu_6$ と $r_3 = \mu_6(5, 6)\mu_6$ が成り立つので, これらを用いると

$$\begin{aligned}
r_2 r_3 r_2 &= \mu_1(1, 2)\mu_1 \mu_5(5, 6)\mu_5 \mu_1(1, 2)\mu_1 \\
&= \mu_1 \mu_2 \mu_5(5, 6)\mu_5 \mu_2 \mu_1 \\
&= (2, 5)\mu_1 \mu_5 \mu_2(2, 6)\mu_2 \mu_5 \mu_1(2, 5) \\
&= (2, 5)\mu_6 \mu_2 \mu_5(1, 5)\mu_5 \mu_2 \mu_6(2, 5) \\
&= \mu_6 \mu_5 \mu_2(1, 2)\mu_2 \mu_5 \mu_6 \\
&= \mu_6(5, 6)\mu_6 \mu_2(1, 2)\mu_2 \mu_6(5, 6)\mu_6 \\
&= r_3 r_2 r_3
\end{aligned}$$

となる.

$D_5^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群の双有理表現から $D_5^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式を導出するためには, 群の半直積拡大を考える必要がある¹⁰. そのために,

$$\pi_1 = (3, 8)(7, 3)(4, 7)(2, 5)(6, 2)(1, 6), \quad \pi_2 = (7, 8)(5, 6)(3, 4)(1, 2)$$

とおく. このとき, 明らかに Q は π_1, π_2 の下で不変である. また, π_1, π_2 の y への作用は, 例 2.1 と同様の計算によって

$$\begin{aligned}
\pi_1((y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)) &= (y_6, y_5, y_8, y_7, y_1, y_2, y_3, y_4), \\
\pi_2((y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)) &= (y_2, y_1, y_4, y_3, y_6, y_5, y_8, y_7)
\end{aligned}$$

となり, ここから乗法的単純ルートへの作用

$$\pi_1(a_i) = a_{\pi_1(i)}, \quad \pi_2(a_i) = a_{\pi_2(i)} \quad (i = 0, \dots, 6),$$

ただし

$$\pi_1((0, 1, 2, 3, 4, 5)) = (5, 4, 3, 2, 0, 1), \quad \pi_2((0, 1, 2, 3, 4, 5)) = (1, 0, 2, 3, 5, 4)$$

が従う. 更に, 変異と互換の満たす関係式より

$$\begin{aligned}
\pi_1^4 &= 1, \quad \pi_2^2 = 1, \\
\pi_1 r_0 &= r_4 \pi_1, \quad \pi_1 r_1 = r_5 \pi_1, \quad \pi_1 r_2 = r_3 \pi_1, \quad \pi_1 r_3 = r_2 \pi_1, \quad \pi_1 r_4 = r_1 \pi_1, \quad \pi_1 r_5 = r_0 \pi_1, \\
\pi_2 r_0 &= r_1 \pi_2, \quad \pi_2 r_1 = r_0 \pi_2, \quad \pi_2 r_2 = r_2 \pi_2, \quad \pi_2 r_3 = r_3 \pi_2, \quad \pi_2 r_4 = r_5 \pi_2, \quad \pi_2 r_5 = r_4 \pi_2
\end{aligned}$$

が導かれる. π_1, π_2 はディンキン図形の自己同型と呼ばれ,

$$\langle r_0, \dots, r_5, \pi_1, \pi_2 \rangle = \langle r_0, \dots, r_5 \rangle \rtimes \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$$

¹⁰ ここでの $D_5^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式とは, 神保・坂井による [9] において提唱されたものを指す.

は $D_5^{(1)}$ 型拡大アフィン・ワイル群と呼ばれる¹¹.

$D_5^{(1)}$ 型拡大アフィン・ワイル群の元 $T = r_2 r_0 r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_3 \pi_2$ を考える. T は平行移動と呼ばれ, その乗法的単純ルートへの作用は

$$T((a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)) = \left(a_0, a_1, \frac{a_2}{q}, a_3 q, a_4, a_5 \right)$$

となり, y_1, y_5 への作用は

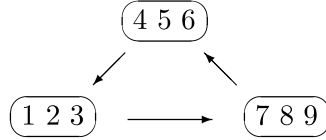
$$T(y_1) = \frac{(1 + y_5)(1 + y_8)}{y_4 y_5 y_8 (1 + y_6)(1 + y_7)},$$

$$T(y_5) = \frac{y_1 (1 + y_2 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 T(y_1)) (1 + y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 T(y_1))}{y_8 (y_1 + y_4 T(y_1)) (1 + T(y_1))}$$

となる. これらの作用は $D_5^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式と等価である¹².

4.3 $E_6^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群

ここでは q -パンルヴェ方程式の導出については割愛し, アフィン・ワイル群の構成のみを簡潔に説明する. 次の図の籠を Q とする.



Q は 3 サイクル $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$ を持ち, またコピー $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}$ を持つ. これに基づいて, 単純鏡映を

$$r_0 = (5, 6), \quad r_1 = (2, 3), \quad r_2 = (1, 2), \quad r_3 = \mu_1 \mu_4 (4, 7) \mu_4 \mu_1,$$

$$r_4 = (7, 8), \quad r_5 = (8, 9), \quad r_6 = (4, 5)$$

と定め, 乗法的単純ルートを

$$a_0 = \frac{y_6}{y_5}, \quad a_1 = \frac{y_3}{y_2}, \quad a_2 = \frac{y_2}{y_1}, \quad a_3 = y_1 y_4 y_7, \quad a_4 = \frac{y_8}{y_7}, \quad a_5 = \frac{y_9}{y_8}, \quad a_6 = \frac{y_5}{y_4}$$

と定める. このとき, $D_5^{(1)}$ 型の場合と同様にして, Q が単純鏡映の下で不変であることが分かる.

r_3 の y への作用は, 例 2.1 と同様の計算によって

$$r_3(y_1) = \frac{1}{y'_1}, \quad r_3(y_i) = \frac{y_i y'_4 (1 + y'_7)}{1 + y'_4} \quad (i = 2, 3),$$

$$r_3(y_4) = \frac{y'_1 y'_7}{1 + y'_1}, \quad r_3(y_i) = \frac{y_i (1 + y_1) y'_1}{1 + y'_1} \quad (i = 5, 6),$$

¹¹ディンキン図形の自己同型の名前の由来は次の通りである. π_k ($k = 1, 2$) の一般カルタン行列 $A = (a_{i,j})$ への作用を $\pi_k(a_{i,j}) = a_{\pi_k(i), \pi_k(j)}$ と定めたとき, A は π_k の下で不変である. ただし, ディンキン図形の自己同型を籠から導出するアルゴリズムは未だ見つかっておらず, 現状ではおそらく各個撃破しか手がない.

¹²ディンキン図形の自己同型を用いずに差分方程式を導出することも勿論可能ではあるが, その場合に得られる方程式は神保・坂井のものと比べてより大きくかつ複雑な形のものになる.

$$r_3(y_7) = \frac{1+y'_1}{y'_4}, \quad r_3(y_i) = \frac{y_1 y_i (1+y'_1)}{1+y_1} \quad (i=8,9),$$

ただし

$$y'_1 = \frac{y'_7(1+y'_4)}{y_1(1+y'_7)} = \frac{y_7(1+y_4+y_1 y_4)}{1+y_1+y_1 y_7}, \quad y'_4 = y_4(1+y_1), \quad y'_7 = \frac{y_1 y_7}{1+y_1}$$

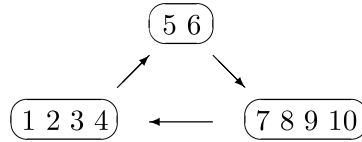
となり, ここから r_3 の乗法的単純ルートへの作用

$$\begin{aligned} r_3(a_0) &= a_0, & r_3(a_1) &= a_1, & r_3(a_2) &= a_2 a_3, & r_3(a_3) &= \frac{1}{a_3}, \\ r_3(a_4) &= a_4 a_3, & r_3(a_5) &= a_5, & r_3(a_6) &= a_6 a_3 \end{aligned}$$

が従う. その他の単純鏡映についても同様である. また, $D_5^{(1)}$ 型の場合と同様にして, 単純鏡映が $E_6^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群の基本関係式を満たすことが分かる.

4.4 $E_7^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群

ここでも q -パンルヴェ方程式の導出については割愛し, アフィン・ワイル群の構成のみを簡潔に説明する. 次の図の籐を Q とする.



Q は 3 サイクル $1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1$ を持ち, またコピー $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}$ を持つ. これに基づいて, 単純鏡映を

$$\begin{aligned} r_0 &= (5, 6), & r_1 &= (3, 4), & r_2 &= (2, 3), & r_3 &= (1, 2), \\ r_4 &= \mu_1 \mu_5 (5, 7) \mu_5 \mu_1, & r_5 &= (7, 8), & r_6 &= (8, 9), & r_7 &= (9, 10) \end{aligned}$$

と定め, 乗法的単純ルートを

$$a_0 = \frac{y_6}{y_5}, \quad a_1 = \frac{y_4}{y_3}, \quad a_2 = \frac{y_3}{y_2}, \quad a_3 = \frac{y_2}{y_1}, \quad a_4 = y_1 y_5 y_7, \quad a_5 = \frac{y_8}{y_7}, \quad a_6 = \frac{y_9}{y_8}, \quad a_7 = \frac{y_{10}}{y_9}$$

と定める. このとき, $D_5^{(1)}$ 型の場合と同様にして, Q が単純鏡映の下で不変であることが分かる.

r_4 の y への作用は, 例 2.1 と同様の計算によって

$$\begin{aligned} r_4(y_1) &= \frac{1}{y'_1}, & r_4(y_i) &= \frac{y_i y'_7 (1+y'_5)}{1+y'_7} \quad (i=2,3,4), \\ r_4(y_5) &= \frac{1+y'_1}{y'_7}, & r_4(y_6) &= \frac{y_1 y_6 (1+y'_1)}{1+y_1}, \\ r_4(y_7) &= \frac{y'_1}{y'_5 (1+y'_1)}, & r_4(y_i) &= \frac{y_i (1+y_1) y'_1}{1+y'_1} \quad (i=8,9,10), \end{aligned}$$

ただし

$$y'_1 = \frac{y'_5 (1+y'_7)}{y_1 (1+y'_5)} = \frac{y_5 (1+y_7+y_1 y_7)}{1+y_1+y_1 y_5}, \quad y'_5 = \frac{y_1 y_5}{1+y_1}, \quad y'_7 = y_7 (1+y_1)$$

となり, ここから r_4 の乗法的単純ルートへの作用

$$\begin{aligned} r_4(a_0) &= a_0 a_4, & r_4(a_1) &= a_1, & r_4(a_2) &= a_2, & r_4(a_3) &= a_3 a_4, \\ r_4(a_4) &= \frac{1}{a_4}, & r_4(a_5) &= a_5 a_3, & r_4(a_6) &= a_6, & r_4(a_7) &= a_7 \end{aligned}$$

が従う. その他の単純鏡映についても同様である. また, $D_5^{(1)}$ 型の場合と同様にして, 単純鏡映が $E_7^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群の基本関係式を満たすことが分かる.

5 簾の頂点の合流と q -パルルヴェ方程式の退化

本節では, 第 4 節で与えたアフィン・ワイル群の双有理表現の退化が簾の頂点の合流に由来することを述べる¹³. 本節では, 区別のため合流後の簾を R と, 係数を z とそれぞれ表すことにする.

5.1 簾の頂点の合流

簾 Q の 2 つの頂点 $i, j \in I$ の合流 $i \rightarrow j$ を, 次のように定める.

1. i と j の間の辺を全て消去する.
2. 更に, i と j を重ねて新たな 1 つの頂点 j とする.

合流 $i \rightarrow j$ は, 交代行列 Λ に対しては次のような操作になっている.

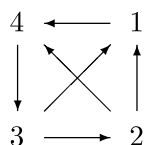
1. i 行を j 行に, i 列を j 列にそれぞれ加える.
2. 更に, i 行と i 列を消去して, 行列サイズを 1 つ下げる.

また, 係数 y に対しては次のような操作と定める.

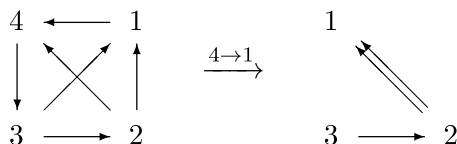
1. $y_i = \varepsilon$, $y_j = z_j / \varepsilon$, $y_k = z_k$ ($k \neq i, j$) と置き換える.
2. 更に, 極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ を取る.

変異に対しては, y に対する操作に基づいて合流前の $\mu_i \mu_j$ を合流後の μ_j と定める¹⁴.

例 5.1. 次の図の簾を Q とする.



Q は合流 $4 \rightarrow 1$ によって次の図のように変換される. 右の簾が R となる.



¹³ディンキン図形の自己同型の退化については, 未だ明らかに出来ていない.

¹⁴この定義の下で単純鏡映と合流操作は両立するが, 実は変異と合流操作は両立しない. これは変異によって簾の形が変わることが原因と思われる. その意味では, この定義ではまだ不十分とも言える. ただし, 石橋典氏と狩野隼輔氏によると, 簾に flozen と呼ばれる頂点を付け加えれば変異と合流操作の両立も上手くいくらしい.

このとき, Λ は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と変換され, y は

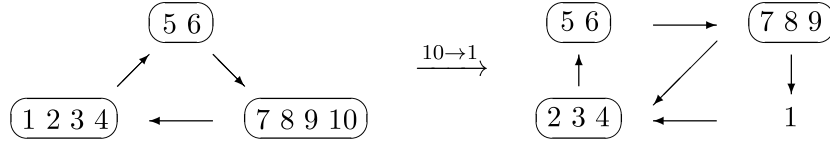
$$(y_4 y_1, y_2, y_3, y_4) \xrightarrow{4 \rightarrow 1} (z_1, z_2, z_3, 0)$$

と変換される.

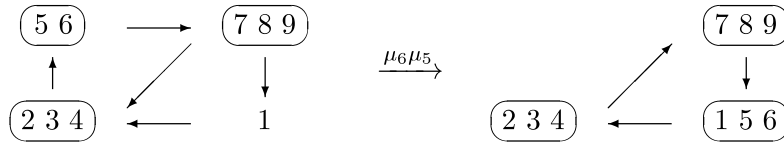
5.2 $E_7^{(1)}$ 型から $E_6^{(1)}$ 型への退化

本小節では, 区別のため $E_6^{(1)}$ 型の乗法的単純ルートを $b_0, \dots, b_6$ と, 単純鏡映を $s_0, \dots, s_6$ とそれぞれ表すことにする.

第 4.4 節で与えられた $E_7^{(1)}$ 型の籐を Q とし, それに対して頂点の合流 $10 \rightarrow 1$ を考える. このとき, Q は次の図のように R に変換される.



更に, 変異 μ_5 と μ_6 を続けて行くと, R は次の図のように変換される.



ここで, μ_5 と μ_6 は可換であることを注意しておく. 最後に互換 $(1, 4)$ を行くと, 第 4.3 節で与えられた $E_6^{(1)}$ 型の籐が導かれる. これを R' と表すことにする.

Q において, y は $10 \rightarrow 1$ によって

$$(y_1 y_{10}, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}) \xrightarrow{10 \rightarrow 1} (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, 0)$$

と変換され, 一方で R' において, z は $\mu_5 \mu_6(1, 4)$ によって

$$\begin{aligned} \mu_5 \mu_6(1, 4)(z_1) &= z_4, & \mu_5 \mu_6(1, 4)(z_i) &= \frac{z_i z_5 z_6}{(1 + z_5)(1 + z_6)} \quad (i = 2, 3), \\ \mu_5 \mu_6(1, 4)(z_4) &= \frac{z_1 z_5 z_6}{(1 + z_5)(1 + z_6)}, & \mu_5 \mu_6(1, 4)(z_i) &= \frac{1}{z_i} \quad (i = 5, 6), \\ \mu_5 \mu_6(1, 4)(z_i) &= z_i(1 + z_5)(1 + z_6) \quad (i = 7, 8, 9) \end{aligned}$$

と変換される. これにより, 乗法的単純ルートは

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a_0}, a_2, \frac{1}{a_1 a_2}, a_1 a_2 a_3 a_4, a_5, a_6, \frac{1}{a_4 a_5 a_6 a_7} \right) &= \left(\frac{z_5}{z_6}, \frac{z_3}{z_2}, \frac{z_2}{z_4}, z_4 z_5 z_7, \frac{z_8}{z_7}, \frac{z_9}{z_8}, \frac{1}{z_1 z_5 z_{10}} \right) \\ &\xrightarrow{10 \rightarrow 1} \left(\frac{z_5}{z_6}, \frac{z_3}{z_2}, \frac{z_2}{z_4}, z_4 z_5 z_7, \frac{z_8}{z_7}, \frac{z_9}{z_8}, \frac{1}{z_1 z_5} \right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(1,4)\mu_6\mu_5} \left(\frac{z_6}{z_5}, \frac{z_3}{z_2}, \frac{z_2}{z_1}, z_1 z_6 z_7, \frac{z_8}{z_7}, \frac{z_9}{z_8}, \frac{z_5}{z_4} \right)$$

$$= (b_0, b_1, b_2, b_0 b_3 b_6, b_4, b_5, b_6)$$

と変換され, ここから単純鏡映の合流が次の表のように従う.

$E_7^{(1)}$	r_0	r_2	$r_1 r_2 r_1$	$r_1 r_2 r_3 r_4 r_3 r_2 r_1$	r_5	r_6	$r_7 r_6 r_5 r_4 r_5 r_6 r_7$
$E_6^{(1)}$	s_0	s_1	s_2	$s_0 s_6 s_3 s_6 s_0$	s_4	s_5	s_6

実際, $r_7 r_6 r_5 r_4 r_5 r_6 r_7$ から s_6 への合流は

$$\begin{aligned} r_7 r_6 r_5 r_4 r_5 r_6 r_7 &= (9, 10)(8, 9)(7, 8)\mu_1\mu_5(5, 7)\mu_5\mu_1(7, 8)(8, 9)(9, 10) \\ &= \mu_1\mu_5(5, 10)\mu_5\mu_1 \\ &= \mu_{10}\mu_1(1, 5)\mu_1\mu_{10} \\ &\xrightarrow{10 \rightarrow 1} \mu_1(1, 5)\mu_1 \\ &= \mu_5(1, 5)\mu_5 \\ &= \mu_6\mu_5(1, 4)(4, 5)(1, 4)\mu_5\mu_6 \\ &= \mu_6\mu_5(1, 4)s_6(1, 4)\mu_5\mu_6 \end{aligned}$$

で与えられる. 合流後に $(1, 4)\mu_6\mu_5$ を行ったため, s_6 の前後に $(1, 4)\mu_5\mu_6$ とその逆変換が残ることを注意しておく. また, $r_1 r_2 r_3 r_4 r_3 r_2 r_1$ から $s_0 s_6 s_3 s_6 s_0$ への合流は

$$\begin{aligned} r_1 r_2 r_3 r_4 r_3 r_2 r_1 &= (3, 4)(2, 3)(1, 2)\mu_1\mu_5(5, 7)\mu_5\mu_1(1, 2)(2, 3)(3, 4) \\ &= \mu_4\mu_5(5, 7)\mu_5\mu_4 \\ &\xrightarrow{10 \rightarrow 1} \mu_4\mu_5(5, 7)\mu_5\mu_4 \\ &= \mu_5\mu_4(4, 7)\mu_4\mu_5 \\ &= \mu_5\mu_6(1, 4)(5, 6)(4, 5)\mu_4\mu_1(1, 7)\mu_1\mu_4(4, 5)(5, 6)(1, 4)\mu_6\mu_5 \\ &= \mu_5\mu_6(1, 4)s_0 s_6 s_3 s_6 s_0(1, 4)\mu_6\mu_5 \end{aligned}$$

で与えられる. その他の単純鏡映についても同様である.

単純鏡映の係数への作用は合流操作と両立しているが, その具体例を 1 つ挙げておく. $r_{4567} = r_7 r_6 r_5 r_4 r_5 r_6 r_7$ と表すことにする. このとき, 上で見たように $r_{4567} = \mu_{10}\mu_1(1, 5)\mu_1\mu_{10}$ であり, その y への作用は

$$\begin{aligned} r_{4567}(y_1) &= \frac{1}{y'_1}, \quad r_{4567}(y_i) = \frac{y_i y'_{10}(1 + y'_5)}{1 + y'_{10}} \quad (i = 2, 3, 4), \\ r_{4567}(y_5) &= \frac{1 + y'_1}{y'_{10}}, \quad r_{4567}(y_6) = \frac{y_1 y_6(1 + y'_1)}{1 + y_1}, \\ r_{4567}(y_i) &= \frac{y_i(1 + y_1)y'_1}{1 + y'_1} \quad (i = 7, 8, 9), \quad r_{4567}(y_{10}) = \frac{y'_1}{y'_5(1 + y'_1)}, \end{aligned}$$

ただし

$$y'_1 = \frac{y_5(1 + y_{10} + y_1 y_{10})}{1 + y_1 + y_1 y_5}, \quad y'_5 = \frac{y_1 y_5}{1 + y_1}, \quad y'_{10} = y_{10}(1 + y_1)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} & (y'_1, (1+y_1)y'_1, y'_5, y'_{10}) \\ &= \left(\frac{\varepsilon z_5(1+\varepsilon+z_1)}{\varepsilon+z_1+z_1z_5}, \frac{z_5(\varepsilon+z_1)(1+\varepsilon+z_1)}{\varepsilon+z_1+z_1z_5}, \frac{z_1z_5}{\varepsilon+z_1}, \varepsilon+z_1 \right) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(0, \frac{z_5(1+z_1)}{1+z_5}, z_5, z_1 \right) \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} & (y_1y_{10}, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}) \\ &\xrightarrow{r_{4567}} \xrightarrow{10 \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z_5}, \frac{z_2z_1(1+z_5)}{1+z_1}, \dots, \frac{z_4z_1(1+z_5)}{1+z_1}, \frac{1}{z_1}, z_6, \frac{z_5z_7(1+z_1)}{1+z_5}, \dots, \frac{z_5z_9(1+z_1)}{1+z_5}, 0 \right) \end{aligned}$$

となる. 一方で,

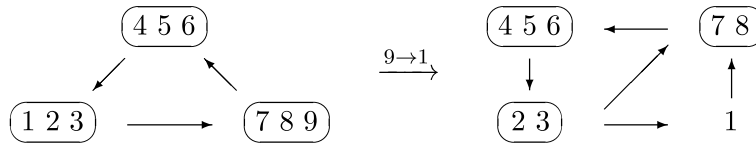
$$\begin{aligned} & (y_1y_{10}, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}) \\ &\xrightarrow{10 \rightarrow 1} \xrightarrow{\mu_1(1,5)\mu_1} \left(\frac{1}{z_5}, \frac{z_2z_1(1+z_5)}{1+z_1}, \dots, \frac{z_4z_1(1+z_5)}{1+z_1}, \frac{1}{z_1}, z_6, \frac{z_5z_7(1+z_1)}{1+z_5}, \dots, \frac{z_5z_9(1+z_1)}{1+z_5}, 0 \right) \end{aligned}$$

となるので, 単純鏡映と合流操作は両立する. 最後の $\mu_1(1,5)\mu_1$ は R' ではなく R において行っていることを注意しておく.

5.3 $E_6^{(1)}$ 型から $D_5^{(1)}$ 型への退化

本小節では, 区別のため $D_5^{(1)}$ 型の乗法的単純ルートを $b_0, \dots, b_5$ と, 単純鏡映を $s_0, \dots, s_5$ とそれぞれ表すことにする.

第 4.3 節で与えられた $E_6^{(1)}$ 型の籐を Q とし, それに対して頂点の合流 $9 \rightarrow 1$ を考える. このとき, Q は次の図のように R に変換される.



更に, 変異 μ_4 と互換 $(6,8)(3,6)(2,5)$ を続けて行くと, 第 4.2 節で与えられた $D_5^{(1)}$ 型の籐が導かれる. これを R' と表すことにする.

Q において, y は $9 \rightarrow 1$ によって

$$(y_1y_9, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9) \xrightarrow{9 \rightarrow 1} (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, 0)$$

と変換され, 一方で R' において, z は $\mu_4(2,5)(3,6)(6,8)$ によって

$$\begin{aligned} \mu_4(2,5)(3,6)(6,8)(z_1) &= z_1, & \mu_4(2,5)(3,6)(6,8)(z_2) &= z_5(1+z_4), \\ \mu_4(2,5)(3,6)(6,8)(z_3) &= z_8(1+z_4), & \mu_4(2,5)(3,6)(6,8)(z_4) &= \frac{1}{z_4}, \\ \mu_4(2,5)(3,6)(6,8)(z_5) &= z_2, & \mu_4(2,5)(3,6)(6,8)(z_6) &= z_3, \end{aligned}$$

$$\mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8)(z_7) = \frac{z_4 z_7}{1 + z_4}, \quad \mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8)(z_8) = \frac{z_4 z_6}{1 + z_4}$$

と変換される. これにより, 乗法的単純ルートは

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a_3 a_4 a_5}, a_0, a_3 a_4 a_5 a_6, a_2 a_3 a_4, a_1, \frac{1}{a_4} \right) &= \left(\frac{1}{z_1 z_4 z_9}, \frac{z_6}{z_5}, z_1 z_5 z_9, z_2 z_4 z_8, \frac{z_3}{z_2}, \frac{z_7}{z_8} \right) \\ &\xrightarrow{10 \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z_1 z_4}, \frac{z_6}{z_5}, z_1 z_5, z_2 z_4 z_8, \frac{z_3}{z_2}, \frac{z_7}{z_8} \right) \\ &\xrightarrow{(6,8)(3,6)(2,5)\mu_4} \left(\frac{z_4}{z_1}, \frac{z_3}{z_2}, z_1 z_2, z_5 z_6, \frac{z_8}{z_5}, \frac{z_7}{z_6} \right) \\ &= (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \end{aligned}$$

と変換され, ここから単純鏡映の合流が次の表のように従う.

$E_6^{(1)}$	$r_5 r_4 r_3 r_4 r_5$	r_0	$r_6 r_5 r_4 r_3 r_4 r_5 r_6$	$r_4 r_2 r_3 r_2 r_4$	r_1	r_4
$D_5^{(1)}$	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5

実際, $r_5 r_4 r_3 r_4 r_5$ から s_0 への合流は

$$\begin{aligned} r_5 r_4 r_3 r_4 r_5 &= (8, 9)(7, 8)\mu_1 \mu_4(4, 7)\mu_4 \mu_1(7, 8)(8, 9) \\ &= \mu_1 \mu_4(4, 9)\mu_4 \mu_1 \\ &= \mu_9 \mu_1(1, 4)\mu_1 \mu_9 \\ &\xrightarrow{9 \rightarrow 1} \mu_1(1, 4)\mu_1 \\ &= \mu_4(1, 4)\mu_4 \\ &= \mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8)(1, 4)(6, 8)(3, 6)(2, 5)\mu_4 \\ &= \mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8)s_0(6, 8)(3, 6)(2, 5)\mu_4 \end{aligned}$$

で与えられる. 合流後に $(6, 8)(3, 6)(2, 5)\mu_4$ を行ったため, s_0 の前後に $(6, 8)(3, 6)(2, 5)\mu_4$ とその逆変換が残ることを注意しておく. また, $r_6 r_5 r_4 r_3 r_4 r_5 r_6$ から s_2 への合流は

$$\begin{aligned} r_6 r_5 r_4 r_3 r_4 r_5 r_6 &= (4, 5)(8, 9)(7, 8)\mu_1 \mu_4(4, 7)\mu_4 \mu_1(7, 8)(8, 9)(4, 5) \\ &= \mu_1 \mu_4(5, 9)\mu_4 \mu_1 \\ &= \mu_9 \mu_1(1, 5)\mu_1 \mu_9 \\ &\xrightarrow{9 \rightarrow 1} \mu_1(1, 5)\mu_1 \\ &= \mu_5(1, 5)\mu_5 \\ &= \mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8)\mu_2(1, 2)\mu_2(6, 8)(3, 6)(2, 5)\mu_4 \\ &= \mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8)s_2(6, 8)(3, 6)(2, 5)\mu_4 \end{aligned}$$

で与えられ, $r_4 r_2 r_3 r_2 r_4$ から s_3 への合流は

$$\begin{aligned} r_4 r_2 r_3 r_2 r_4 &= (7, 8)(1, 2)\mu_1 \mu_4(4, 7)\mu_4 \mu_1(1, 2)(7, 8) \\ &= \mu_2 \mu_4(4, 8)\mu_4 \mu_2 \\ &\xrightarrow{9 \rightarrow 1} \mu_2 \mu_4(4, 8)\mu_4 \mu_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_4 \mu_2(2, 8) \mu_2 \mu_4 \\
&= \mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8) \mu_5(5, 6) \mu_5(6, 8)(3, 6)(2, 5) \mu_4 \\
&= \mu_4(2, 5)(3, 6)(6, 8) s_3(6, 8)(3, 6)(2, 5) \mu_4
\end{aligned}$$

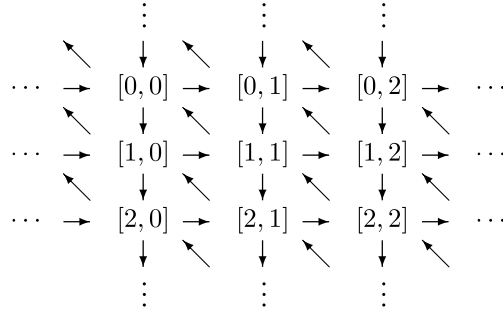
で与えられる. その他の単純鏡映についても同様である. 単純鏡映の係数への作用と合流操作が両立することは, 第 5.2 節と同様にして確認出来る.

6 その他の話題

本稿の内容に関連する幾つかの話題について述べておく.

6.1 高階化

頂点集合を $I = \{[j, i] \mid j \in \mathbb{Z}_{mn}, i \in \mathbb{Z}_m\}$ とし, トーラス上の簀 Q を次の図のように定める.



Q は水平方向に mn 個の m サイクル

$$[j, 0] \rightarrow [j, 1] \rightarrow \cdots \rightarrow [j, m-1] \rightarrow [j, 0]$$

を持ち, 鉛直方向に m 個の mn サイクル

$$[0, i] \rightarrow [1, i] \rightarrow \cdots \rightarrow [mn-1, i] \rightarrow [0, i]$$

を持ち, 斜め方向に m 個の mn サイクル

$$[0, i] \rightarrow [mn-1, i+1] \rightarrow \cdots \rightarrow [1, i-1] \rightarrow [0, i]$$

を持つ. これに基づいて, 第 4 節と同様にして単純鏡映 r_j ($j \in \mathbb{Z}_{mn}$), s_i, s'_i ($i \in \mathbb{Z}_m$) を定める¹⁵. このとき, 群 $\langle r_0, \dots, r_{mn-1} \rangle$, $\langle s_0, \dots, s_{m-1} \rangle$, $\langle s'_0, \dots, s'_{m-1} \rangle$ は $A_{mn-1}^{(1)}$ 型, $A_{m-1}^{(1)}$ 型, $A_{m-1}^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群とそれぞれ同型であり, 更にこれらの群は互いに可換である ([7, 8, 12]).

Q は $(m, n) = (2, 2)$ のとき第 4.2 節で与えられた $D_5^{(1)}$ 型の簀と, $(m, n) = (3, 1)$ のとき第 4.3 節で与えられた $E_6^{(1)}$ 型の簀とそれぞれ一致し, これにより q -パンルヴェ方程式の高階化を導く簀とみなすことが出来る. 実際, $m = 2$ の場合は [16] において詳しく調べられ, q -ガルニエ系と呼ばれる $2n$ 階非線形 q -差分方程式のあるクラスが導出されている¹⁶.

¹⁵ $m = 2$ の場合は水平方向のサイクルが存在しないが, その場合も 2 サイクルが存在するとみなして単純鏡映を定める.

¹⁶ q -ガルニエ系を導出するためには単純鏡映に加えて, ディンキン図形の自己同型を適切に定める必要がある.

6.2 量子化

一般に, 係数 y についてのポワソン括弧は

$$\{y_i, y_j\} = \lambda_{i,j} y_i y_j$$

と定められる. これに基づいて, y を

$$y_i y_j = p^{-2\lambda_{i,j}} y_j y_i$$

と非可換化し, 更に変異 μ_i ($i \in I$) を

$$\mu_i(y_j) = \begin{cases} y_i^{-1} & (j = i) \\ \left\{ y_j^{1/|\lambda_{j,i}|} \left(1 + p y_i^{\text{sgn}(\lambda_{j,i})} \right) \right\}^{|\lambda_{j,i}|} & (j \neq i) \end{cases}$$

と定めることで, 拡大アフィン・ワイル群の双有理表現の量子化が可能となる ([1]). 実際, 第 4.2 節で与えられた $D_5^{(1)}$ 型の簾にこの手法を適用することで, 長谷川による [5] において提唱された $D_5^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ方程式の量子化が得られる.

実は, 単純鏡映が満たす基本関係式は一般に非可換化の前後で不変である ([13]). これにより, q -ガルニエ系の量子化も原理的には可能であるが, それを詳しく調べることは今後の課題である.

謝辞

クラスター代数について有益な議論や助言を頂いた共同研究者の大久保直人氏に感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 20K03645 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, *Cluster integrable systems, q -Painlevé equations and their quantization*, J. High Energ. Phys. (2018) 077.
- [2] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov and M. Semenyakin, *Cluster reductions, mutations, and q -Painlevé equations*, arXiv:2411.00325.
- [3] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002) 497–529.
- [4] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV: Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007) 112–164.
- [5] K. Hasegawa, *Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation*, Adv. Stud. Pure Math. **61** (2011) 275–288.
- [6] A. Hone and R. Inoue, *Discrete Painlevé equations from Y -systems*, J. Phys. A: Math. and Theor. **47** (2014) 474007.
- [7] R. Inoue, T. Ishibashi and H. Oya, *Cluster realizations of Weyl groups and higher Teichmüller theory*, Selecta Math. **27** (2021) 37.

- [8] R. Inoue, T. Lam and P. Pylyavskyy, *On the cluster nature and quantization of geometric R -matrices*, Publ. RIMS **55** (2019) 25–78.
- [9] M. Jimbo and H. Sakai, *A q -analog of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145–154.
- [10] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1990).
- [11] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, *Geometric aspects of Painlevé equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) Number 7.
- [12] T. Masuda, N. Okubo and T. Tsuda, *Birational Weyl group actions via mutation combinatorics in cluster algebras*, arXiv:2303.06704; RIMS Kôkyûroku **2127** (2018) 20–38 (in Japanese).
- [13] 中西 知樹, 団代数論の基礎, (東京大学出版会 2024).
- [14] N. Okubo, *Bilinear equations and q -discrete Painlevé equations satisfied by variables and coefficients in cluster algebras*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 355201.
- [15] T. Suzuki and N. Okubo, *Cluster algebra and q -Painlevé equations: higher order generalization and degeneration structure*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B78** (2020) 53–75.
- [16] N. Okubo and T. Suzuki, *Generalized q -Painlevé VI systems of type $(A_{2n+1} + A_1 + A_1)^{(1)}$ arising from cluster algebra*, Int. Math. Res. Not. (2020) 6561–6607.
- [17] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **220** (2001) 165–229.
- [18] 脇本 実, 無限次元リー環, (岩波書店, 1999).