Aitchison 幾何に基づく分割表の対称性について

東京理科大学大学院・創域理工学研究科 中村 慶太
Keita Nakamura
Department of Information Sciences, Tokyo University of Science

明星大学・データサイエンス学環 中川 智之
Tomoyuki Nakagawa
School of Data Science, Meisei University

東京理科大学・創域理工学部 田畑 耕治
Kouji Tahata
Department of Information Sciences, Tokyo University of Science

1　はじめに

分割表は，カテゴリカルデータ間の関係性を整理し，視覚的および統計的に把握するための基本的な枠組みとして，さまざまな分野で広く利用されている Agresti (2013); Kateri (2014)．特に，医療分野における治療法と回復率の関連，社会学における性別と職業選択の関係など，複数のカテゴリ変数間の相互関係を明らかにするための有効な手法として位置づけられている．このような分析では，独立性の検定やオッズ比の推定といった統計的推論が中心的な役割を果たすが，分割表のサイズや構造に応じて適切な手法を選択する必要がある点にも留意しなければならない．とりわけ，分割表は解析対象となる表の構造的な特性を活かした多様な統計的アプローチが展開されており，カテゴリカルデータ解析の発展に貢献している．

特に，行と列に同じカテゴリを持つ正方分割表においては，セルの配置が持つ対称性に注目が集まる (Bowker, 1948)．ここでいう対称性とは，表内の任意の (i,j) セルとその対応する (j,i) セルの値が等しいことであり，これは対象間の交換可能性を反映する．この構造は，あるカテゴリから他のカテゴリへの移動の程度が，その逆方向の移動とどのように対比されるかを検討する場面で頻繁に観察される．典型的な例としては，社会学

における移動行列があり，ここでは親の職業と子の職業の対応関係が分析される (Upton, 1985)．また，マーケティングにおいても，同一の消費者による複数回の購買行動において，ブランド間の移動の対称性が検討される (Beh and Lombardo, 2022)．こうした状況では，対称性，または対称性からの隔たりが，対象間の移動構造に関する特性を反映するため，単なる独立性の検討とは異なる統計的関心が生じる．

分割表の背後には，各セルに対応する確率を成分とする確率ベクトル（確率表）が存在し，それらは確率全体の集合，すなわち確率単体と呼ばれる空間に属している (Fienberg, 1968)．確率単体は，全ての成分が非負で総和が 1 となるようなベクトルの集合であり，この構造を通じて分割表を幾何学的対象として捉えることが可能になる．特に，情報幾何学の枠組みを導入することで，確率分布の空間における統計的モデルの構造や，仮説検定における検定統計量といった概念を，リーマン多様体上の幾何的概念として記述できる (Amari, 2016)．このような視点は，分割表に対するモデルの関係性や制約構造を深く理解する上で有用であり，統計的推論の幾何学的理解を可能にする．

確率単体という共通の幾何的構造を基盤としつつも，その役割が異なる枠組みとして，組成データ解析が挙げられる (Aitchison, 1982, 1986)．組成データとは，全体の大きさに対する各構成要素の比率で表現されるデータであり, 地質学, 生物学, 経済学など多くの応用分野に現れる．これらのデータは確率表と同様に確率単体上に位置するが，その解析には Aitchison 幾何と呼ばれる特有の代数的・幾何的構造が用いられる (Pawlowsky-Glahn and Egozcue, 2001)．Aitchison 幾何では，ユークリッド空間との同型写像を通じてベクトル演算や距離の定義が再構成され，従来のユークリッド幾何とは異なる，比の関係に着目した解析が可能となる．この枠組みは，情報幾何とは異なる観点から分布構造を捉える道を提供している．

本稿は，筆者らが提案した Nakamura et al. (2024) における解析枠組みを概説することを目的としており，その理論的背景，方法論，および応用例について主要な内容を整理する．この枠組みでは，分割表の背後にある確率表を確率単体の要素として捉え，その上に Aitchison 幾何を導入することにより，比に基づく構造を反映した代数的・幾何学的操作を可能としている．これにより，従来の情報幾何とは異なる視点から分割表の構造を考察する手がかりが得られる．本稿の構成は以下の通りである．第 2 節では，組成データ解析における Aitchison 幾何の数学的背景について解説する．第 3 節では，正方分割表における対称性が Aitchison 幾何の下でどのように特徴づけられるかについて検討する．第 4 節では，観測された分割表が対称性からどの程度逸脱しているかを評価するための尺度を Aitchison 幾何の枠組みで定式化する．第 5 節では，Stuart (1953) で用いられた女性の裸眼視力データに枠組みを適用した例を提示する．第 6 節では，本稿の議論を総括する．

なお，定理の詳細な証明については，Nakamura et al. (2024) を参照されたい．

2 Aitchison 幾何学と単体上の演算

Aitchison 幾何学は, 組成データを適切に解析するために構築された代数的・幾何学的枠組みであり, 組成データ解析において中心的な役割を果たしている．本節では, Nakamura et al. (2024) で提案した解析枠組みの理解のために必要な範囲で，Aitchison 幾何学を概説する．具体的には，この幾何学を構成する基本的な演算である摂動（perturbation）およびべき乗 (powering)，さらに中心対数比変換 (centered log-ratio transformation, clr) と Aitchison 計量について説明する．これらを導入することで，確率単体上の解析をユークリッド空間の枠組みで行うことが可能となり，分割表に対応する確率表の幾何学的性質を明確に捉える手段が得られる．

まず，$I \times J$ の分割表において，p_{ij} は個体が (i, j) セルに分類される確率であるとし，これらを成分とする確率表を $\mathbf{P} = (p_{ij})$ で表す．さらに，全てのセルで $p_{ij} > 0$ かつ $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} p_{ij} = 1$ であると仮定する．このとき，$\mathbf{P}$ は $(IJ-1)$ 次元の確率単体

$$\mathcal{S}^{IJ} = \left\{ \mathbf{P} = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{IJ}) \in \mathbb{R}^{IJ} \;\middle|\; p_{ij} > 0, \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} p_{ij} = 1 \right\}$$

の要素とみなされる．演算や計量を定義するために必要な閉鎖操作（closure operator）とは，任意の正の要素を持つベクトルを確率単体に写す操作であり，次式で与えられる．

$$\mathcal{C}\mathbf{X} = \left(\frac{x_{11}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} x_{ij}}, \ldots, \frac{x_{IJ}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} x_{ij}} \right),$$

ただし，$\mathbf{X} = (x_{ij})$ はすべての成分が正の実ベクトルとする．

Aitchison (1982, 1986) はこの単体上に，閉鎖操作を用いた以下の 2 つの演算を定義している．

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \oplus \mathbf{Q} &= \mathcal{C}(p_{11}q_{11}, p_{12}q_{12}, \ldots, p_{IJ}q_{IJ}), \\ \alpha \odot \mathbf{P} &= \mathcal{C}(p_{11}^{\alpha}, p_{12}^{\alpha}, \ldots, p_{IJ}^{\alpha}). \end{aligned}$$

これらの演算により，$\mathcal{S}^{IJ}$ はベクトル空間として扱うことが可能となる (Pawlowsky-Glahn and Egozcue, 2001; Aitchison et al., 2001).

さらに，clr 変換はこの確率単体からユークリッド空間への同型写像を提供し，解析をより柔軟にする (Aitchison, 1986)．幾何平均 $g(\mathbf{P}) = (\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij})^{1/(IJ)}$ に基づく clr

変換は，次のように定義される．

$$\mathrm{clr}(\mathbf{P}) = (\mathrm{clr}_{11}(\mathbf{P}), \mathrm{clr}_{12}(\mathbf{P}), \ldots, \mathrm{clr}_{IJ}(\mathbf{P})) = \left(\log \frac{p_{11}}{g(\mathbf{P})}, \log \frac{p_{12}}{g(\mathbf{P})}, \ldots, \log \frac{p_{IJ}}{g(\mathbf{P})} \right).$$

この変換により得られるベクトルの総和はゼロであり，$\mathbb{R}^{IJ}$ の $(IJ-1)$ 次元部分空間に属する．逆変換は指数写像と閉鎖操作 $\mathcal{C}$ を用いて次式で与えられる．

$$\mathbf{P} = \mathcal{C} \exp[\mathrm{clr}(\mathbf{P})].$$

ここで，指数写像 exp は各要素に対して指数変換を施す．Aitchison 幾何における内積，ノルム，および距離は clr 変換を通じて次のように与えられる．

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle_A = \langle \mathrm{clr}(\mathbf{P}), \mathrm{clr}(\mathbf{Q}) \rangle, \quad \|\mathbf{P}\|_A = \|\mathrm{clr}(\mathbf{P})\|, \quad d_A(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \|\mathrm{clr}(\mathbf{P}) - \mathrm{clr}(\mathbf{Q})\|.$$

ここで、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ はユークリッド内積，$\| \cdot \|$ はユークリッドノルムを表す．これらの構造により，$\mathcal{S}^{IJ}$ はユークリッド空間として機能し，直交射影や直交分解が可能になる (Billheimer et al., 2001; Pawlowsky-Glahn and Egozcue, 2001)．したがって，Aitchison 幾何は，確率単体上での独立性や対称性などの性質を幾何学的に記述・解析する強力な枠組みを提供する．

3　対称性を持つ確率表

本節では，Nakamura et al. (2024) で提案された枠組みに基づき，正方分割表における対称性の特徴づけについて概説する．ここでいう対称性は，正方確率表において，(i, j) セルの確率と (j, i) セルの確率が等しい場合に成立する．すなわち，対称性を持つ確率表 $\mathbf{P}$ は転置を用いて次のように定義される．

Definition 1 (対称な確率表)**.** $\mathbf{P} \in \mathcal{S}^{I^2}$ を $I \times I$ の確率表とする．もし

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\top}$$

が成り立つならば，$\mathbf{P}$ は対称な確率表と呼ばれる．ここで，$\cdot^{\top}$ は行列の転置に対応するベクトルの並び替えである．

この定義に基づき，対称な確率表の集合が線形部分空間を構成することを次の定理が示している．

Theorem 1 (対称確率表の部分空間)**.** 対称な $I \times I$ 確率表全体の集合を $\mathcal{S}^{I^2}_{sym}$ とする．このとき，$\mathcal{S}^{I^2}_{sym}$ は $\mathcal{S}^{I^2}$ の $(I-1)(I+2)/2$ 次元の部分空間である．

この結果とヒルベルトの射影定理により，任意の確率表 $\mathbf{P} \in \mathcal{S}^{I^2}$ に対して，$\mathcal{S}^{I^2}_{\text{sym}}$ への一意な直交射影が存在する．すなわち，任意の $\mathbf{P} \in \mathcal{S}^{I^2}$ に対して，その最も Aitchison 距離の意味で近い対称な確率表を $\mathbf{P}_{\text{sym}} \in \mathcal{S}^{I^2}_{\text{sym}}$ とすると，$\mathbf{P}$ は次のように一意に分解される．

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{sym}} \oplus \mathbf{P}_{\text{skew}},$$

ここで，$\mathbf{P}_{\text{skew}} = \mathbf{P} \ominus \mathbf{P}_{\text{sym}}$ は歪対称な確率表と呼ばれ，$\mathcal{S}^{I^2}_{\text{sym}}$ の直交補空間 $\mathcal{S}^{I^2}_{\text{skew}}$ の要素である．この分解は，Aitchison 内積の意味で直交している．

$$\langle \mathbf{P}_{\text{sym}}, \mathbf{P}_{\text{skew}} \rangle_A = 0.$$

以下の定理は，この直交射影の具体的な形を与える．

Theorem 2 (対称部分空間への直交射影)**.** 任意の確率表 $\mathbf{P} \in \mathcal{S}^{I^2}$ に対して，その対称部分空間 $\mathcal{S}^{I^2}_{\text{sym}}$ への最も *Aitchison* 距離の意味で近い確率表 $\mathbf{P}_{\text{sym}}$ は次式で与えられる．

$$\mathbf{P}_{\text{sym}} = 0.5 \odot (\mathbf{P} \oplus \mathbf{P}^\top).$$

この Theorem 2 は，各セルの値とその対称位置の値の幾何平均をとる操作に基づいており，この推定量は情報理論的アプローチにおける最小識別情報推定量 (Ireland et al., 1969) として知られている．

情報幾何学における射影の観点から見ると，最尤推定量と最小識別情報推定量は一般には異なる解を導く．情報幾何学では，最尤推定量は m-測地線に沿った e-平坦部分多様体への射影として得られるのに対し，最小識別情報推定量は e-測地線に沿った m-平坦部分多様体への射影として得られる．この射影の違いにより，両者は対称な場合を除いて一致しない．なお，情報幾何学と Aitchison 幾何の関係については，Pistone and Shoaib (2024) による詳細な議論を参照されたい．

直交射影により，Aitchison ノルムの二乗はピタゴラスの定理により次のように分解される．

Theorem 3. $\mathbf{P} \in \mathcal{S}^{I^2}$ を $I \times I$ の表とし，分解 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{sym}} \oplus \mathbf{P}_{\text{skew}}$ を考える．このとき，*Aitchison* ノルムに関して次の等式が成り立つ．

$$\|\mathbf{P}\|_A^2 = \|\mathbf{P}_{\text{sym}}\|_A^2 + \|\mathbf{P}_{\text{skew}}\|_A^2.$$

この等式は，分割表が持つ対称性からの隔たりの度合いを，歪対称成分のノルムを通じて測定することを可能にする．すなわち，$\|\mathbf{P}_{\text{skew}}\|_A^2$ が大きいほど，元の確率表は対称性から大きく逸脱していることを意味する．

4　対称性からの隔たりを測る尺度

前節の議論を踏まえ，本節では，Nakamura et al. (2024) において導入された対称性からの隔たりを測る尺度について概説する．具体的には，simplicial skewness および relative simplicial skewness といった尺度の定義とその性質を説明する．

Definition 2 (simplicial skewness)**.** 任意の確率表 $\mathbf{P} \in \mathcal{S}^{I^2}$ に対して，その直交分解 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathrm{sym}} \oplus \mathbf{P}_{\mathrm{skew}}$ を考える．ここで，$\mathbf{P}_{\mathrm{sym}}$ は対称成分，$\mathbf{P}_{\mathrm{skew}}$ は歪対称成分である．このとき，歪対称成分の *Aitchison* ノルムの二乗

$$E^2(\mathbf{P}) = \|\mathbf{P}_{\mathrm{skew}}\|_A^2$$

を *simplicial skewness* と呼ぶ．この尺度は $0 \leq E^2(\mathbf{P}) < +\infty$ の範囲を取る．

この尺度が $E^2(\mathbf{P}) = 0$ となるのは $\mathbf{P}$ が完全に対称である場合に限る．この尺度は対称性からの隔たりの大きさを絶対的な量で測ったものである．以下の尺度は，全体に対する歪対称成分の相対的な寄与を示し，simplicial skewness を補完する情報を伝える．

Definition 3 (relative simplicial skewness)**.** $\mathbf{P}$ の全体の *Aitchison* ノルムの二乗 $\|\mathbf{P}\|_A^2$ に対する歪対称成分のノルムの二乗の比

$$R_E^2(\mathbf{P}) = \frac{E^2(\mathbf{P})}{\|\mathbf{P}\|_A^2} = \frac{\|\mathbf{P}_{\mathrm{skew}}\|_A^2}{\|\mathbf{P}\|_A^2}$$

を *relative simplicial skewness* と呼ぶ．この尺度は $0 \leq R_E^2(\mathbf{P}) \leq 1$ の範囲を取る．

これらの尺度は，既存の非対称モデル (McCullagh, 1978; Goodman, 1979; Agresti, 1983; Kateri and Papaioannou, 1997; Kateri and Agresti, 2007; Tahata, 2020) における非対称性の記述とも密接に関連している．例えば，飽和した非対称モデルは，正方確率表の各セル (i, j) に対して

$$p_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}\phi_{ij}, & (i < j), \\ \phi_{ij}, & (i \geq j), \end{cases} \quad \text{ただし } \phi_{ij} = \phi_{ji},\ \delta_{ij} > 0,$$

と表され，$\delta_{ij} > 0$ が非対称性の程度を示すパラメータとして導入される．この構造のもとで，歪対称成分はこの δ_{ij} に基づく非対称性の情報を反映しており，simplicial skewness $E^2(\mathbf{P})$ は

$$E^2(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\sum_{i<j}(\log \delta_{ij})^2$$

と表される．すなわち，simplicial skewness は非対称モデルにおける対数非対称性パラメータの二乗和と一致し，非対称性パラメータの大きさを測る自然な指標となる．この観点から，simplicial skewness はパラメトリックモデルにおける非対称性の尺度として理論的な裏付けを持つ．

分割表における歪対称性の局所的な構造を把握するためには，各セルが対称性からの逸脱にどの程度寄与しているかを明確にする必要がある．この目的のために，歪対称成分 $\mathbf{P}_{\mathrm{skew}}$ に対して clr 変換を適用し，各セルの逸脱量を定量化する．

Definition 4 (cell skewness)**.** 歪対称成分 $\mathbf{P}_{\mathrm{skew}} \in \mathcal{S}^{I^2}_{\mathrm{skew}}$ に対して，その *clr* 変換 $\mathrm{clr}(\mathbf{P}_{\mathrm{skew}})$ の (i,j) 成分

$$s_{ij} = \mathrm{clr}_{ij}(\mathbf{P}_{\mathrm{skew}})$$

を (i,j) セルの *cell skewness* と呼ぶ．

この定義により，simplicial skewness は各セルの cell skewness の二乗和として次のように表される．

$$E^2(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} s_{ij}^2.$$

すなわち，simplicial skewness は全セルにおける対称性からの逸脱量を集約したものであり，cell skewness はその局所的な内訳を示す指標である．

Cell skewness s_{ij} の値は，個々のセルがどの程度対称性から逸脱しているかを直接示すが，この値だけでは各セルが全体の非対称性の強さにどの程度貢献しているかを相対的に比較することは難しい．そこで，simplicial skewness の全体値で割った符号付き割合として，各セルの貢献度を明示する方法を導入する．これにより，単なる逸脱量としての cell skewness に加え，そのセルが全体的な対称性からの隔たりにどれほど寄与しているかを把握できる．

Definition 5 (skewness array)**.** 歪対称成分 $\mathbf{P}_{\mathrm{skew}}$ に対して，*cell skewness* $s_{ij} = \mathrm{clr}_{ij}(\mathbf{P}_{\mathrm{skew}})$ を用いて定義される $sgn(s_{ij})s_{ij}^2/E^2(\mathbf{P})$ を要素に持つ $I \times I$ 行列を *skewness array* と呼ぶ．ここで，$sgn(\cdot)$ は符号関数であり，$E^2(\mathbf{P})$ は *simplicial skewness* である．

この skewness array は，各セルの寄与割合を符号付きで表現するものであり，対称性からの隔たりに対してどのセルが強く影響を与えているかを定量的に示す．

表 1　30-39 歳の 7477 人の女性の裸眼視力データ (Stuart, 1953)

Right eye \ Left eye	Highest grade	Second grade	Third grade	Lowest grade	Total
Highest grade	1520	266	124	66	1976
Second grade	234	1512	432	78	2256
Third grade	117	362	1772	205	2456
Lowest grade	36	82	179	492	789
Total	1907	2222	2507	841	7477

表 2　裸眼視力データの標本割合

Right eye \ Left eye	Highest grade	Second grade	Third grade	Lowest grade	Geometric margin
Highest grade	0.2033	0.0356	0.0166	0.0088	0.2285
Second grade	0.0313	0.2022	0.0578	0.0104	0.3149
Third grade	0.0156	0.0484	0.2370	0.0274	0.3356
Lowest grade	0.0048	0.0110	0.0239	0.0658	0.1210
Geometric margin	0.1893	0.3181	0.3474	0.1452	1.000

5　実データへの応用

前節までに述べた simplicial skewness および cell skewness，さらに skewness array の枠組みは，理論的な整合性を備えると同時に，実際のデータ解析においても有効な手法を提供する．本節では，Nakamura et al. (2024) で提示された具体的な応用例に従い，この方法を実データに適用する過程を概説する．対象とするのは，対称性の評価および逸脱構造の可視化を目的とした，Stuart (1953) による裸眼視力データの解析である．

表 1 のデータは，30 歳から 39 歳までの 7477 人の女性の右目と左目の視力等級を記録したものであり，行と列に同じ 4 段階の視力等級（Highest, Second, Third, Lowest grade）を持つ正方分割表となっている．各セル (i, j) は右目が等級 i，左目が等級 j の人数を表しており，視力等級間の対称性が関心の対象となる．

分析のために，まず観測された分割表を，表 2 に示すように，各セルを全体人数で割った比率として正規化し，背後の確率表 $\mathbf{P}$ の推定値 $\hat{\mathbf{P}}$ を得る．その後，Aitchison 幾何に基づく直交分解を $\hat{\mathbf{P}}$ に適用することにより，対称成分および歪対称成分を求める．対称

表 3　表 2 に最も Aitchison 距離の意味で近い対称確率表

Right eye \ Left eye	Highest grade	Second grade	Third grade	Lowest grade	Geometric margin
Highest grade	0.2036	0.0334	0.0161	0.0065	0.2596
Second grade	0.0334	0.2025	0.0530	0.0107	0.2996
Third grade	0.0161	0.0530	0.2373	0.0257	0.3320
Lowest grade	0.0065	0.0107	0.0257	0.0659	0.1088
Geometric margin	0.2596	0.2996	0.3320	0.1088	1.000

表 4　表 3 に直交する歪対称確率表

Right eye \ Left eye	Highest grade	Second grade	Third grade	Lowest grade	Geometric margin
Highest grade	0.0621	0.0662	0.0639	0.0840	0.2762
Second grade	0.0582	0.0621	0.0678	0.0605	0.2486
Third grade	0.0603	0.0568	0.0621	0.0664	0.2456
Lowest grade	0.0458	0.0636	0.0580	0.0621	0.2296
Geometric margin	0.2264	0.2487	0.2518	0.2731	1.000

性からの逸脱を表す尺度として，simplicial skewness $E^2(\hat{\mathbf{P}})$ を用いて全体的な歪対称性の程度を評価する．この解析は，左右の視力分布に潜む歪対称性を明らかにし，左右裸眼視力のパターンに関する理解を深める一助となる可能性がある．

観測された視力データに対して求めた Aitchison ノルム $\|\hat{\mathbf{P}}\|_A$ は 20.560 であり，これに対する直交分解により得られた対称成分 $\hat{\mathbf{P}}_{\text{sym}}$ のノルム $\|\hat{\mathbf{P}}_{\text{sym}}\|_A$ は 20.341 であった．この対称成分は，Aitchison 距離の意味で最も近い対称な確率表として 表 3 に示され，対応する歪対称成分は 表 4 に示されている．

さらに，simplicial skewness の値は $E^2(\hat{\mathbf{P}}) = 0.219$ であり，これは元の視力表が持つ歪対称性の大きさを表している．また，relative simplicial skewness $R^2_E(\hat{\mathbf{P}})$ は 0.0107 であり，これは視力データにおける歪対称成分が全体の約 1% の寄与であることを示している．この値が正の値を持つことは，視力データにおいて完全な対称性が成立しておらず，右目と左目の役割を入れ替えた場合に分布が一致しないことを示唆する．

さらに，各セルの貢献を示す skewness array を表 5 に示す．最も大きな貢献は (Highest, Lowest) セルおよび (Lowest, Highest) セルに見られ，それぞれ 41.80% および −41.80% となっている．この結果は，視力等級の最上位と最下位の間で強い歪対称性が

表 5　表 1 に対する skewness array

Right eye \ Left eye	Highest grade	Second grade	Third grade	Lowest grade
Highest grade	0.00	1.87	0.38	**41.80**
Second grade	−1.87	0.00	3.56	−0.28
Third grade	−0.38	−3.56	0.00	2.10
Lowest grade	**−41.80**	0.28	−2.10	0.00

存在することを示しており，左右裸眼視力における極端な等級の組み合わせが特に不均衡であることを意味している．

6　結論

本稿では，Nakamura et al. (2024) で提案された Aitchison 幾何の枠組みに基づく解析方法を概説した．この枠組みでは，確率単体上の確率表に clr 変換を施すことで，対称成分と歪対称成分への直交分解を行い，これに基づき対称性からの逸脱の程度を測る simplicial skewness および relative simplicial skewness が定式化されている．

Simplicial skewness は歪対称成分の Aitchison ノルムの二乗によって逸脱の大きさを測り，relative simplicial skewness はその相対的な寄与を示す尺度である．加えて，cell skewness および skewness array を用いることで，各セルごとの貢献を明示し，歪対称性がどのセルに集中しているかを視覚的に把握できる．これらの指標を通じて，Aitchison 幾何に基づく直交分解は，対称性の全体的な逸脱と局所的な偏りの両面を捉える有効な手段となる．理論の詳細については，Nakamura et al. (2024) を参照されたい．

謝辞

本研究は，京都大学に設置された国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援，および JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2151 ならびに JSPS 科研費 JP20K03756 の助成を受けたものです．

参考文献

Agresti, A. (1983). A simple diagonals-parameter symmetry and quasi-symmetry model. *Statistics & Probability Letters*, 1(6):313–316.

Agresti, A. (2013). *Categorical Data Analysis, 3rd Edition*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.

Aitchison, J. (1982). The Statistical Analysis of Compositional Data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 44(2):139–160.

Aitchison, J. (1986). *The Statistical Analysis of Compositional Data*. Monographs on Statistics and Applied Probability (Series). Chapman and Hall, London.

Aitchison, J., Barceló-Vidal, C., Martín-Fernández, J. A., and Pawlowsky-Glahn, V. (2001). Reply to Letter to the Editor by S. Rehder and U. Zier. *Mathematical Geology*, 33(7):849–860.

Amari, S.-i. (2016). *Information Geometry and Its Applications*, volume 194 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Japan, Tokyo.

Beh, E. J. and Lombardo, R. (2022). Visualising Departures from Symmetry and Bowker's X2 Statistic. *Symmetry*, 14(6).

Billheimer, D., Guttorp, P., and Fagan, W. F. (2001). Statistical Interpretation of Species Composition. *Journal of the American Statistical Association*, 96(456):1205–1214.

Bowker, A. H. (1948). A Test for Symmetry in Contingency Tables. *Journal of the American Statistical Association*, 43(244):572–574.

Fienberg, S. E. (1968). The Geometry of an r × c Contingency Table. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(4):1186–1190.

Goodman, Leo. A. (1979). Multiplicative models for square contingency tables with ordered categories. *Biometrika*, 66(3):413–418.

Ireland, C. T., Ku, H. H., and Kullback, S. (1969). Symmetry and Marginal Homogeneity of an r × r Contingency Table. *Journal of the American Statistical Association*, 64(328):1323–1341.

Kateri, M. (2014). *Contingency Table Analysis: Methods and Implementation Using R*. Springer, New York, NY.

Kateri, M. and Agresti, A. (2007). A class of ordinal quasi-symmetry models for square contingency tables. *Statistics & Probability Letters*, 77(6):598–603.

Kateri, M. and Papaioannou, T. (1997). Asymmetry Models for Contingency Tables. *Journal of the American Statistical Association*, 92(439):1124–1131.

McCullagh, P. (1978). A class of parametric models for the analysis of square contingency tables with ordered categories. *Biometrika*, 65(2):413–418.

Nakamura, K., Nakagawa, T., and Tahata, K. (2024). Symmetry of Square Contingency Tables Using Simplicial Geometry. *Austrian Journal of Statistics*, 53(4):85–98.

Pawlowsky-Glahn, V. and Egozcue, J. J. (2001). Geometric approach to statistical analysis on the simplex. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 15(5):384–398.

Pistone, G. and Shoaib, M. (2024). A Unified Approach to Aitchison's, Dually Affine, and Transport Geometries of the Probability Simplex. *Axioms*, 13(12).

Stuart, A. (1953). The Estimation and Comparison of Strengths of Association in Contingency Tables. *Biometrika*, 40(1/2):105–110.

Tahata, K. (2020). Separation of symmetry for square tables with ordinal categorical data. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, 3(2):469–484.

Upton, G. J. (1985). *Spatial Data Analysis by Example: Categorical and Directional Data*, volume 2. Wiley.