

# (3, 4)-カスプ辺の内在的な不変量

横浜国立大学・大学院理工学府 服部 祐樹

Yuki Hattori

Graduate School of Engineering Science,  
Yokohama National University

## 概要

本稿の内容は、本田淳史氏（横浜国立大学）との共同研究に基づく。カスプ辺は波面に頻繁に現れる特異点である。カスプ辺に対して定義される特異曲率はカスプ辺の凸性を測る内在的不変量であり、ガウス・ボンネ型公式にも用いられる。しかし、(3, 4)-カスプ辺と呼ばれる特異点に対しては特異曲率は定義されない。本稿では (3, 4)-カスプ辺に対して (3, 4)-積曲率という内在的不変量を導入し、(3, 4)-カスプ辺の凸性との関係や (3, 4)-カスプ辺の等長変形定理を紹介する。

## 1 導入

$\Sigma$  を 2 次元多様体とし、 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を写像としたとき、 $p \in \Sigma$  が  $f$  の特異点であるとは、 $f$  が  $p$  ではめ込みでないときをいう。このような特異点をもつ曲面のクラスとして、曲面上の任意の点で単位法ベクトル場がとれるようなフロンタルと呼ばれるものがあり、さらにフロンタルの一種として、波面（フロント）と呼ばれるクラスが存在する。この“波面”に頻繁に現れる特異点として、カスプ辺とツバメの尾が存在する。ここではカスプ辺を紹介する。

定義 1 (カスプ辺).  $C^\infty$  級写像  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して、 $p \in \Sigma$  がカスプ辺であるとは、写像芽  $f: (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  が原点での写像芽

$$\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u^2, u^3, v) \in \mathbf{R}^3$$

と  $\mathcal{A}$ -同値となるときをいう。

ここで、2つの  $C^\infty$  級写像芽  $f: (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  と  $\bar{f}: (\bar{\Sigma}, \bar{p}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$  が  $\mathcal{A}$ -同値であるとは、2つの微分同相写像芽  $\varphi: (\Sigma, p) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \bar{p})$  と  $\Phi: (\mathbf{R}^3, f(p)) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$  が存在して、

$$\Phi \circ f \circ \varphi^{-1} = \bar{f}$$

が成り立つときをいう。

以上のカスプ辺に対しては、以下の Gauss-Bonnet 型公式が成り立つことが知られている。

定義 2 (Gauss-Bonnet 型公式 [4, 8]).  $\Sigma$  をコンパクトで向きづけ可能な 2 次元多様体、 $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を波面とし、特異点はカスプ辺とツバメの尾のみを許容するとする。このとき、ガウス曲率  $K$ 、符号なし面積要素  $dA$ 、 $f$  の特異点集合  $S(f)$ 、特異曲率  $\kappa_s$ 、 $S(f)$  の線素  $ds$ 、 $\Sigma$  のオイラー数  $\chi(\Sigma)$  を用

いて,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K dA + \frac{1}{\pi} \int_{S(f)} \kappa_s ds = \chi(\Sigma)$$

が成り立つ.

左辺に現れる  $\kappa_s$  はカस्प辺において定義される**特異曲率**と呼ばれる内在的な不変量であり (Saji-Umehara-Yamada [8]), カस्प辺の形状に影響を与える:

**事実 3** ([8]).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  でカस्प辺をもつとする. このとき  $p$  において特異曲率が正ならば,  $f$  の像はその点の近傍で凸状である. 逆に, 特異曲率が負ならば,  $f$  の像はその点の近傍で鞍状である.



図1 左:  $\kappa_s > 0$  のカस्प辺, 右:  $\kappa_s < 0$  のカस्प辺.

ここで (3,4)-カस्प辺の定義を紹介する.

**定義 4** ((3,4)-カस्प辺).  $C^\infty$  級写像  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して,  $p \in \Sigma$  が (3,4)-カस्प辺であるとは, 写像芽  $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  が原点での写像芽

$$\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u^3, u^4, v) \in \mathbf{R}^3$$

と  $\mathcal{A}$ -同値となるときをいう.

(3,4)-カस्प辺は平行曲面に現れることが知られている. 実際, 図2の右図の外側と内側が (3,4)-カस्प辺となっている.

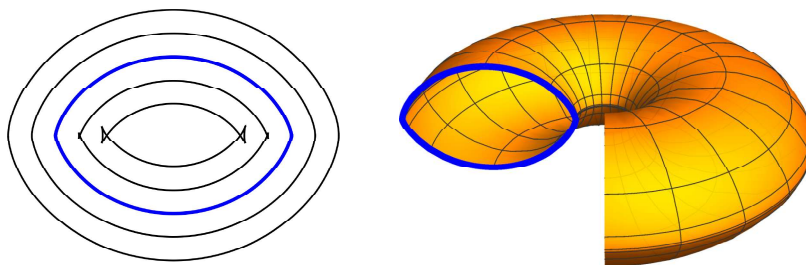


図2 左: 楕円の平行曲線 右: 左図の曲線の回転面

この (3,4)-カस्प辺に対しては特異曲率を符号を込めて定義することができない. そのため, 特異曲率の正負を用いて (3,4)-カस्प辺の形状は特徴づけられない. しかし (3,4)-カस्प辺にも, カस्प

辺と同様に凸や鞍状のものが存在する．本稿では (3, 4)-カスプ辺に対して (3, 4)-積曲率という内在的不変量を導入し，(3, 4)-カスプ辺の凸性との関係や (3, 4)-カスプ辺の等長変形定理を紹介する．

## 2 定義

まずはじめにフロンタルと波面 (フロント) について定義を紹介する．

定義 5 (フロンタル, 波面 (フロント)).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を写像とする．

- $f$  がフロンタルであるとは，2次元球面  $\mathbf{S}^2$  への  $C^\infty$  級写像  $\nu: \Sigma \rightarrow \mathbf{S}^2$  で， $\Sigma$  上の任意の点  $q \in \Sigma$  と，その点での接空間上の任意のベクトル  $\mathbf{v} \in T_q \Sigma$  に対して

$$\langle df_q(\mathbf{v}), \nu(q) \rangle = 0$$

を満たすものが存在するときをいう．このような  $\nu$  を  $f$  に沿った単位法ベクトル場という．

- $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をフロンタル， $\nu: \Sigma \rightarrow \mathbf{S}^2$  を  $f$  の単位法ベクトル場とする．ここで， $f$  が波面 (フロント) であるとは， $L := (f, \nu): \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2$  がはめ込みであるときをいう．

以下では  $S(f)$  でフロンタル  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  の特異点集合を表し， $S(f)$  が正則曲線であることを仮定する．さらに， $S(f)$  上の点  $p$  は階数が 1 の特異点であると仮定する．つまり  $\text{rank}(df)_p = 1$  が成り立つ．このとき， $S(f)$  を特異曲線と呼び，その接ベクトルを特異ベクトル，特異ベクトルの定める 1次元ベクトル空間を特異方向という．さらに， $df(\mathbf{v}) = 0$  を満たす零でない接ベクトル  $\mathbf{v} \in T_p \Sigma$  を退化ベクトル，退化ベクトルの定める方向を退化方向という．さらに，階数が 1 の特異点に対してはその近傍において定義される退化ベクトル場  $\eta$  が存在する．

本稿では，Martins-Saji-Santos-Teramoto [5] で導入された，カスプ辺や (3, 4)-カスプ辺をより一般化したクラスである  $m$ -type edge を基にして議論を行う．

定義 6 ( $m$ -type edge [5]).  $m$  を正の整数とする． $C^\infty$  級写像  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して， $p \in \Sigma$  が  $m$ -type edge であるとは，写像芽  $f: (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  が原点での写像芽

$$\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u^m, u^{m+1}a(u, v), v) \in \mathbf{R}^3$$

と  $\mathcal{A}$ -同値となるような  $C^\infty$  級関数  $a(u, v)$  が存在するときをいう．

注意 7.  $m = 2$  のとき，つまり 2-type edge は一般化されたカスプ辺と呼ばれ，Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada [2] により導入されている．特に，カスプ辺は 2-type edge であり，(3, 4)-カスプ辺は 3-type edge となる．

さらに， $m$ -type edge に対して，以下の退化ベクトル場に関する事実が示されている．

事実 8 ([5]).  $S(f)$  をフロンタル  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  の特異点集合で正則曲線であるとし， $\xi$  を  $S(f)$  の方向で  $\xi \notin \ker(df_p)$  とする．このとき， $f$  が  $p \in S(f)$  上で  $m$ -type edge を持つことと，

$$\eta^i f(q) = 0 \quad (q \in S(f), i = 2, \dots, m-1) \tag{2.1}$$

$$\xi f(p) \text{ と } \eta^m f(p) \text{ が線形独立} \tag{2.2}$$

を満たす退化ベクトル場  $\eta$  が存在することは同値である。ここで、 $\xi f$  は  $f$  の  $\xi$  方向での微分を表し、 $\eta^m f$  は  $f$  の  $\eta$  方向での  $m$  階微分を表す。

次に、不変量とその不変量の内在性を定義する。

定義 9 (不変量).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をフロントルとし、 $p \in \Sigma$  とする。このとき、 $f$  と  $p$  により定まる値  $J(f, p)$  が**不変量**であるとは、 $\mathbf{R}^3$  の等長写像  $T$  と  $\Sigma$  の微分同相写像  $\phi$  に対して、

$$|J(f, p)| = |J(T \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(p))|$$

を満たすときをいう。

定義 10 (等長的, 内在的).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\bar{f}: \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbf{R}^3$  をそれぞれフロントルとし、 $p \in \Sigma$  とする。

- $f$  が  $\bar{f}$  と**等長的**であるとは、ある微分同相写像  $\phi: \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$  が存在して、

$$\phi^* ds_{\bar{f}}^2 = ds_f^2$$

を満たすときである。ここで、 $\phi^*$  は  $\phi$  による引き戻しを表す。

- 不変量  $J(f, p)$  が**内在的**であるとは、 $f$  と等長的な任意のフロントル  $\bar{f}$  に対して、

$$|J(f, p)| = |J(\bar{f}, \phi(p))|$$

が成り立つときをいう。

ここで、Martins-Saji-Santos-Teramoto [5] により導入された  $m$ -type edge に対する不変量である  $(m, m+i)$ -カスプ的曲率を紹介する。

定義 11 ([5]). フロントル  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge をもつとする。このとき、 $i = 1, 2, \dots, m-1$  に対して  $(m, m+i)$ -カスプ的曲率  $\omega_{m, m+i}$  を

$$\omega_{m, m+i}(p) := \frac{\|\xi f\|^{(m+i)/m} \det(\xi f, \eta^m f, \eta^{m+i} f)}{\|\xi f \times \eta^m f\|^{(2m+i)/m}}(p) \quad (2.3)$$

で定める。このとき、 $\omega_{m, m+i}$  は (2.1), (2.2) を満たす正に向きづけられたベクトル場の組の取り方に依らない。

注意 12.  $m = 2$  のとき、つまり  $(2, 3)$ -カスプ的曲率  $\omega_{2, 3}$  はカスプ的曲率  $\kappa_c$  として Martins-Saji-Umehara-Yamada [6] により導入されている。

さらに、 $m$ -type edge に対する (2.1), (2.2) を満たすベクトル場の組  $(\xi, \eta)$  を用いて、新たに符号付き極限法曲率を定義する。

定義 13 (符号付き極限法曲率).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge,  $S(f)$  を  $f$  の特異点集合で  $\Sigma$  内の正則曲線、 $\xi$  を  $S(f)$  に接するベクトル場とし、 $\eta$  を (2.1), (2.2) を満たす退化ベクトル場で、ベクトル場の組  $(\xi, \eta)$  が正に向きづけられるとする。このとき、 $S(f)$  上の点  $p$  に対して、

$$\tilde{\kappa}_\nu(p) := \frac{\det(\xi f, \eta^m f, \xi^2 f)}{\|\xi f \times \eta^m f\| \|\xi f\|^2}(p) \quad (2.4)$$

で定める。この  $\tilde{\kappa}_\nu$  を**符号付き極限法曲率**と呼ぶ。

このとき、以下の命題が成り立つ。

**命題 14.** 符号付き極限法曲率  $\tilde{\kappa}_\nu$  は正に向きづけられたベクトル場の組  $(\xi, \eta)$  の取り方によらない。

以上のことから、符号付き極限法曲率  $\tilde{\kappa}_\nu$  も不変量である。

### 3 主定理

#### 3.1 $(m, m+i)$ -積曲率

まず初めに、 $m$ -type edge に対して取ることのできる便利な座標系として、**adapted coordinate system** を定義する。

**命題 15** (Adapted coordinate system).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge あるフロントルとする。このとき、以下を満たす局所座標系  $(u, v)$  で  $p = (0, 0)$  となるものが存在する。

- (1) 特異点集合を  $S(f)$  とすると、 $S(f) = \{(u, 0)\}$ .
- (2) 退化ベクトル場を  $\eta$  とすると、 $\eta = \partial/\partial v$  で、 $u$  軸上で  $f_v(u, 0) = f_{v^2}(u, 0) = \cdots = f_{v^{m-1}}(u, 0) = \mathbf{0}$ .
- (3)  $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場とすると、 $\{f_u(u, 0), f_{v^m}(u, 0), \nu(u, 0)\}$  が正規直交基底となる。

カस्प辺の場合、adapted coordinate system の存在は [8] で示された。定義 11 で定められた  $(m, m+i)$ -カスプ的曲率  $\omega_{m, m+i}$  と定義 13 で定められた符号付き極限法曲率  $\tilde{\kappa}_\nu$  を用いて、 $(m, m+i)$ -積曲率を以下で定義する。

**定義 16** ( $(m, m+i)$ -積曲率).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge をもつとし、 $i = 1, 2, \dots, m-1$  に対して  $\omega_{m, m+i}$  を  $(m, m+i)$ -カスプ的曲率、 $\tilde{\kappa}_\nu$  を符号付き極限法曲率とする。このとき、

$$\Pi_{m, m+i}(p) := \tilde{\kappa}_\nu(p) \omega_{m, m+i}(p)$$

と定める。この  $\Pi_{m, m+i}$  を  $(m, m+i)$ -積曲率と呼ぶ。

定め方から、積曲率  $\Pi_{m, m+i}$  も不変量であることがわかる。さらに、積曲率  $\Pi_{m, m+i}$  の内在性について以下の定理が得られる。

**定理 17.**  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge をもつとし、 $\tilde{\kappa}_\nu$  を符号付き極限法曲率、 $\omega_{m, m+i}$  を  $(m, m+i)$ -カスプ的曲率、 $\Pi_{m, m+i} := \tilde{\kappa}_\nu \omega_{m, m+i}$  を  $(m, m+i)$ -積曲率とする。このとき、

- (1)  $\Pi_{m, m+1}(p)$  は内在的な不変量である。
- (2)  $j = 2, \dots, m-1$  に対して、 $\Pi_{m, m+1}(p) = \cdots = \Pi_{m, m+j-1}(p) = 0$  であるならば、 $\Pi_{m, m+j}(p)$  は内在的な不変量となる。

### 3.2 $m$ -type edge におけるガウス曲率と平均曲率の有界性

$(m, m+i)$ -積曲率  $\Pi_{m,m+i}$  を用いることでガウス曲率  $K$  の有界性,  $(m, m+i)$ -カスプ的曲率  $\omega_{m,m+i}$  を用いることで平均曲率  $H$  の有界性のそれぞれの条件が得られる.

$f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge をもつとし,  $(u, v)$  として adapted coordinate system をとると,  $f$  の第一基本量  $E, F, G$  と第二基本量  $L, M, N$  の計算から  $\tilde{K} := v^{m-1}K, \tilde{H} = v^{m-1}H$  とすると,

$$\tilde{K}(u, 0) = \frac{(m-1)!}{m} \Pi_{m,m+1}(u), \quad \tilde{H}(u, 0) = \frac{(m-1)!}{2m} \omega_{m,m+1}(u)$$

が成り立つ. ここで,  $\tilde{K}, \tilde{H}$  を特異点集合の周りで Taylor 展開することによりそれぞれ,  $j = 1, \dots, m-2$  に対して  $C^\infty$  級関数  $\Phi_j(u), \varphi_j(u), \Psi(u, v), \psi(u, v)$  を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{K}(u, v) &= \frac{(m-1)!}{m} \Pi_{m,m+1}(u) + v\Phi_1(u) + v^2\Phi_2(u) + \dots + v^{m-2}\Phi_{m-2}(u) + v^{m-1}\Psi(u, v) \\ \tilde{H}(u, v) &= \frac{(m-1)!}{2m} \omega_{m,m+1}(u) + v\varphi_1(u) + v^2\varphi_2(u) + \dots + v^{m-2}\varphi_{m-2}(u) + v^{m-1}\psi(u, v) \\ &\iff \\ K(u, v) &= \frac{(m-1)!}{m} \frac{\Pi_{m,m+1}(u)}{v^{m-1}} + \frac{\Phi_1(u)}{v^{m-2}} + \frac{\Phi_2(u)}{v^{m-3}} + \dots + \frac{\Phi_{m-2}(u)}{v} + \Psi(u, v) \\ H(u, v) &= \frac{(m-1)!}{2m} \frac{\omega_{m,m+1}(u)}{v^{m-1}} + \frac{\varphi_1(u)}{v^{m-2}} + \frac{\varphi_2(u)}{v^{m-3}} + \dots + \frac{\varphi_{m-2}(u)}{v} + \psi(u, v) \end{aligned}$$

と表せる. 以上より,  $K$  の有界性は,  $\Pi_{m,m+1}(u) = \Phi_1(u) = \dots = \Phi_{m-2}(u) = 0$  と同値であり,  $H$  の有界性は,  $\omega_{m,m+1}(u) = \varphi_1(u) = \dots = \varphi_{m-2}(u) = 0$  と同値であることがわかる. ここで計算から特異点集合  $u$  軸上で,  $\Phi_j$  については  $\Pi_{m,m+1}(u) = \dots = \Pi_{m,m+j}(u) = 0$  であるならば

$$\Phi_j(u) = \frac{n!}{n+1+j} C_{j+1} j! \Pi_{m,m+j+1}(u)$$

が成り立ち,  $\varphi_j$  については  $\omega_{m,m+1}(u) = \dots = \omega_{m,m+j}(u) = 0$  であるならば

$$\varphi_j(u) = \frac{n!}{2n+1+j} C_{j+1} j! \omega_{m,m+j+1}(u)$$

であることから, 以下の定理が導かれる.

**定理 18.**  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge をもつとし,  $\tilde{\kappa}_\nu$  を符号付き極限法曲率,  $i = 1, \dots, m-1$  に対して  $\omega_{m,m+i}$  を  $(m, m+i)$ -カスプ的曲率,  $\Pi_{m,m+i} := \tilde{\kappa}_\nu \omega_{m,m+i}$  を  $(m, m+i)$ -積曲率とする. さらに,  $f$  のガウス曲率を  $K$ , 平均曲率を  $H$  とする. このとき,

- (1)  $K$  が特異点集合の近傍で有界であることと, 特異点集合上で  $\Pi_{m,m+1} = \dots = \Pi_{m,2m-1} = 0$  であることは同値である.
- (2)  $H$  が特異点集合の近傍で有界であることと, 特異点集合上で  $\omega_{m,m+1} = \dots = \omega_{m,2m-1} = 0$  であることは同値である.

## 4 主定理の応用

$(m, m + i)$ -積曲率を用いることで、 $m$  が奇数の場合における  $m$ -type edge の凸性、さらには  $m$ -type edge の等長変形定理を考えることができる。特に、 $(3, 4)$ -カस्प辺においては内在的な判定条件を用いることで等長変形によって  $(3, 4)$ -カस्प辺を保つことがわかる。

### 4.1 $m$ -type edge の凸性

導入ではカस्प辺の形状について、特異曲率の正負によって凸性が定まることを述べた。より一般に、 $m$  が偶数の場合には特異曲率を符号を込めて定義することができ、カस्प辺の場合と同様に特異曲率の正負によって  $m$ -type edge の形状を特徴づけることができる。以下では  $m$  が奇数の場合の  $m$ -type edge の凸性について得られた結果を述べる。

今、 $(m, m + 1)$ -積曲率  $\Pi_{m, m+1}$  とガウス曲率  $K$  の関係式として adapted coordinate system  $(u, v)$  を用いて

$$v^{m-1}K(u, v) = \frac{(m-1)!}{m}\Pi_{m, m+1}(u) + v\Phi(u, v)$$

が成り立つ。ここで  $\Phi$  は  $C^\infty$  級関数とする。よって、 $v \neq 0$  では

$$K(u, v) = \frac{(m-1)!}{m} \frac{\Pi_{m, m+1}(u)}{v^{m-1}} + \frac{1}{v^{m-2}}\Phi(u, v)$$

が成り立つ。ここで、 $m$  が奇数であることから  $(m-1)$  は偶数となる。よって、特異点集合の近傍においてガウス曲率  $K$  の正負は  $\Pi_{m, m+1}$  の正負によってのみ定まる。このことから、 $m$  が奇数の場合の  $m$ -type edge の凸性について以下の定理が得られる。

**定理 19.**  $m$  を奇数とし、 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge をもつとする、また、 $\Pi_{m, m+1}$  を  $(m, m + 1)$ -積曲率とする。このとき、 $\Pi_{m, m+1}(p) > 0$  ならば、ガウス曲率  $K$  は  $p$  で  $+\infty$  に発散する。とくに、 $f$  の像はその点の近傍で凸状である。また、 $\Pi_{m, m+1}(p) < 0$  ならば、ガウス曲率  $K$  は  $p$  で  $-\infty$  に発散する。とくに、 $f$  の像はその点の近傍で鞍状である。

特に、 $(3, 4)$ -カस्प辺は 3-type edge であることから、 $\Pi_{3, 4}$  の正負によって形状が特徴づけられることがわかる。

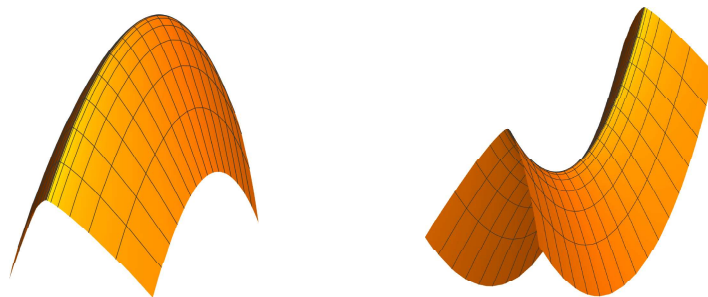


図3 左： $\Pi_{3, 4} > 0$  のカस्प辺， 右： $\Pi_{3, 4} < 0$  のカस्प辺。

## 4.2 (3, 4)-カスプ辺の内在的な判定条件

(3, 4)-カスプ辺は 3-type edge であり、波面でもあることから以下の判定条件が成り立つ。

**定理 20.** フロント  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が  $p \in \Sigma$  で (3, 4)-カスプ辺であることと、 $f$  が波面であり、 $p$  が 3-type edge であることが同値である。

さらに内在的な判定条件を求めるために、第一種特異点と、 $m$ -type edge の代わりとなる退化次数  $n$  特異点の定義を紹介する。

**定義 21 (第一種特異点).** 特異点  $p \in S(f)$  が**第一種特異点**であるとは、 $p$  において特異方向と退化方向が異なるとき、つまり退化方向  $\langle \eta_p \rangle_{\mathbf{R}} = \ker(df)_p$  が特異方向  $T_p S(f)$  と異なるときをいう。

**定義 22 (退化次数  $n$  特異点).**  $n$  を正の整数、 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をフロント、 $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場とする。ここで、 $f$  の特異点  $p$  に対して  $p$  の座標近傍  $(U; u, v)$  上で定義された符号付き面積密度関数を  $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$  とする。ここで、 $p \in \Sigma$  が**退化次数  $n$  特異点**であるとは、 $\text{rank}(df)_p = 1$  であり、 $p$  の近傍における  $C^\infty$  級関数  $\hat{\lambda}, \alpha$  で、

- $\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n$
- $(\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)(p) \neq (0, 0)$
- $\alpha(p) \neq 0$

を満たすものが存在するときをいう。

**注意 23.**  $n = 1$  のとき、つまり退化次数 1 特異点は一般に**非退化特異点**と呼ばれる特異点である。ここで  $p \in \Sigma$  が非退化特異点であるとは、 $(\lambda_u, \lambda_v)(p) \neq (0, 0)$  が成り立つときをいう。

ここで、第一種退化次数  $n$  特異点と  $m (= n + 1)$ -type edge の関係性として、以下が成り立つ。

**系 24.**  $n$  を正の整数、 $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をフロント、 $p \in \Sigma$  を  $f$  の特異点とする。このとき、 $p$  が第一種退化次数  $n$  特異点であることと、 $p$  が  $(n + 1)$ -type edge であることは同値となる。

このことから、3-type edge であるという条件は第一種退化次数 2 特異点という内在的な条件に置き換えられる。さらに、Martins-Saji-Santos-Teramoto [5] によって、以下の事実が示された。

**事実 25.**  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge をもつとする。このとき、 $f$  が  $p$  で波面であることと、 $f$  の  $(m, m + 1)$ -カスプ的曲率  $\omega_{m, m+1}$  が零でない、つまり  $\omega_{m, m+1}(p) \neq 0$  であることが同値である

さらに、フロントがジェネリックであることの定義を述べる。

**定義 26.** フロント  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が**ジェネリック**であるとは、 $f$  の符号付き極限法曲率  $\tilde{\kappa}_\nu$  が特異点集合上で零でないときをいう。

このことを用いることで、以下の (3, 4)-カスプ辺の内在的な判定条件が得られる。

**系 27 ((3, 4)-カスプ辺の内在的な判定条件).** ジェネリックなフロント  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が  $p \in \Sigma$  で



(3,4)-カスプ辺であることと, (3,4)-積曲率  $\Pi_{3,4}$  が  $p$  で零でない, つまり  $\Pi_{3,4}(p) \neq 0$  であり,  $p$  が第一種退化次数 2 特異点であることが同値である.

さらに, 内在的な判定条件の存在から以下が成り立つ.

**系 28.**  $f, g: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をジェネリックなフロンタルとするこのとき,  $f$  と  $g$  が等長的であるならば,

$$f \text{ が } (3,4)\text{-カスプ辺} \iff g \text{ が } (3,4)\text{-カスプ辺}$$

が成り立つ.

### 4.3 $m$ -type edge の等長変形定理

Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada [2] で, 一般化されたカスプ辺 (2-type edge) の場合に等長変形定理が与えられている. ここではその等長変形定理を, 2 以上の整数  $m$  に対して  $m$ -type edge に拡張して与える.

**定理 29** ( $m$ -type edge の等長変形定理).  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge を持つ実解析的かつジェネリックなフロンタル,  $\gamma(t)$  を  $p = \gamma(0)$  を通る特異曲線,  $|\kappa_s(p)|$  を特異曲率の絶対値,  $\Gamma(t)$  を実解析的な正則曲線で曲率関数  $\kappa_\Gamma$  が  $\kappa_\Gamma(0) > |\kappa_s(p)|$  を満たすとする. このとき,  $p$  の近傍  $U$  と  $p$  で  $m$ -type edge を持つ  $U$  上の実解析的なフロンタル  $g_\Gamma$  で以下の条件を満たすものが存在する.

- (1)  $g_\Gamma$  は  $f$  と等長的であり,
- (2)  $g_\Gamma \circ \gamma$  の像は  $\Gamma$  の像と一致し,
- (3)  $g_\Gamma$  の極限法曲率は零でない.

さらに,

- (i) そのような  $g_\Gamma$  は 4 つ存在し,
- (ii)  $f$  が (3,4)-カスプ辺であるならば  $g_\Gamma$  が (3,4)-カスプ辺となる.

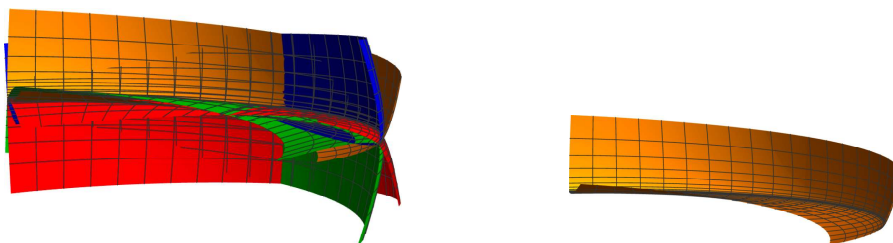


図 4 第一基本形式と特異曲線を共有する 4 つの (3,4)-カスプ辺  $g_\Gamma$

注意 30. この等長変形定理は, Naokawa-Umehara-Yamada [7] によるカスプ辺の場合, Honda-Naokawa-Umehara-Yamada [3], Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada [2] による一般化されたカスプ辺 (2-type edge) の場合に示された定理の一般化となっている. 特に, 定理 29 の (ii) に関し

て, [7, 3] では  $f$  が  $(2, 3)$ -カスプ辺であるならば  $g_\Gamma$  が  $(2, 3)$ -カスプ辺であることが示されている.

さらに, 以上の定理 29 に対して以下が得られる.

**系 31.**  $m$  が偶数のとき, 4つの  $g_\Gamma$  の像のうち 2つは異なる.  $m$  が奇数のとき,  $|\kappa_s| \neq 0$  ならば 4つの  $g_\Gamma$  の像のうち 2つは異なる. 一方で全ての像が一致するならば  $|\kappa_s| = 0$  が成り立つ.

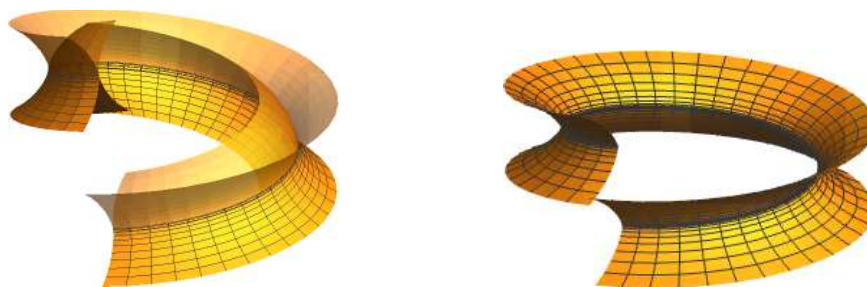


図5  $g_\Gamma$  の像 (左:  $m$  が偶数, 右:  $m$  が奇数かつ  $\kappa_s = 0$ ) (cf. [1])

## 参考文献

- [1] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint (arXiv : 2310.16418), to appear in *Differential Geometry and its Applications*.
- [2] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, *J. Singul.* **22** (2020), 59–91.
- [3] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, *Hiroshima Math. J.* **50** (2020), 269–312.
- [4] M. Kosssowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for  $C^\infty$ -singular surfaces with limiting tangent bundle*. *Ann. Global Anal. Geom.* **21** (2002), No. 1, 19–29.
- [5] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, *Revista de Lla UMA* **67**, (2024), No. 2, 475–502.
- [6] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, *Geometry and Topology of Manifold*, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.
- [7] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, *Tohoku Math. J. (2)* **68** (2016), 73–90.
- [8] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, *Ann. Math. (2)* **169** (2009), No. 2, 491–529.