

特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率

横浜国立大学大学院理工学府

山内優太 (Yuta YAMAUCHI)

Graduate School of Engineering Science,

Yokohama National University *

概要

本稿では $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ 内のフロンタルと呼ばれる、特異点をもつ n 次元部分多様体に対する Chern-Lashof の定理の拡張について紹介する。まず、 $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の許容的かつコンパクトな n 次元フロンタルに対し、その絶対全曲率がベッチ数の総和以上となることを証明する。さらに、絶対全曲率が 2 に等しく、かつ全ての特異点が第一種である場合、そのフロンタルの像は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体と一致する。本稿の内容は [26] に基づく。

1 導入

n, r を正の整数とする。向き付けられたコンパクトな n 次元多様体 M^n から $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ へのはめ込み $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を考える。 B を f の単位法ベクトル束、 G を Lipschitz-Killing 曲率とする。この時、

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G| d\mu_B$$

を f の絶対全曲率と呼ぶ。ただし $\text{vol}(S^{n+r-1})$ は $(n+r-1)$ 次元単位球面 S^{n+r-1} の体積を表す。絶対全曲率について、次が知られている。

事実 1.1 (Chern-Lashof の定理 [3, 4]). M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体、 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ へのはめ込みとする。

- (1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする ($0 \leq i \leq n$)。この時、絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ。

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^n b_i(M^n).$$

- (2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば、 M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる。
- (3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば、像 $f(M^n)$ は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に埋め込まれた凸超曲面となる。逆もまた成り立つ。

*E-mail: yamauchi-yuta-hj@ynu.jp

この Chern-Lashof の定理は, Fenchel の定理 ([5, 6]) のコンパクトな部分多様体への一般化となっている. これまでに Chern-Lashof の定理の様々な一般化が得られてきた: 非正曲率リーマン多様体 [24, 1]; 定曲率空間 [2, 20, 21, 22]; 非閉部分多様体 [25]; knotted surface [17]; equiaffine immersions [14]; 対称空間 [15, 16]; ミンコフスキー空間 [12]; 複素射影空間 [7].

一方, 特異点を持つ部分多様体には絶対全曲率を定義されるクラスが存在する. したがって, そのような部分多様体の絶対全曲率に対しても Chern-Lashof 型定理が成り立つのではないかと考えた. 本稿ではそのような部分多様体としてフロンタルを取り上げ, それらの絶対全曲率に対する Chern-Lashof 型定理を紹介する.

2 準備

2.1 フロンタルと特異点

この節ではフロンタルの定義を紹介する. 部分多様体の一般化としてのフロンタルの概念は [11] にて紹介されている. また, 曲面, 超曲面の場合は詳細に調べられている. 詳しくは [18, 23] を見よ.

n, r を正の整数とする. n 次元多様体 M^n からユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ への滑らかな写像 $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ に対して, 点 $p \in M^n$ で f がはめ込みであるとき p を**正則点**と呼び, そうでない時は**特異点**と呼ぶ. Σ_f を f の特異点集合とし, 正則点集合 M_{reg}^n を $M_{\text{reg}}^n := M^n \setminus \Sigma_f$ とおく. 正則点集合が稠密な写像 f が**フロンタル**であるとは, M^n 上の任意の点 p とその開近傍 U に対し, 滑らかな写像 $\Pi : U \rightarrow \widetilde{Gr}(n, n+r)$ が存在して,

$$df_q(X) \in \Pi(q) \quad (q \in U, X \in T_q M^n)$$

を満たす時をいう. ここで $\widetilde{Gr}(n, n+r)$ は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の向き付き n 次元部分空間のグラスマン多様体を指す. また, このような Π を f の **generalized Gauss map** と呼ぶ.

定義 2.1. フロンタル $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の generalized Gauss map Π が M^n 上で大域的に定められる時, フロンタル f は**余向き付け可能**であるという.

例として, はめ込み f は余向き付け可能である. これは, $\Pi(q) := df_q(T_q M^n)$ ($q \in M^n$) とおくことで確かめられる. M^n の二重被覆を取ることで, 必要ならば一般性を失うことなく f を余向き付け可能とすることができる. よって, 本稿ではフロンタルは余向き付け可能だと仮定する.

フロンタル f とその generalized Gauss map Π に対し, $\Pi^\perp(p)$ を $\Pi(p)$ の直交補空間とする. 任意の M^n の座標近傍 $(U; u_1, u_2, \dots, u_n)$ に対し, U 上の関数 λ を

$$\lambda(p) = \det(f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p), E_1(p), \dots, E_r(p))$$

で定める. ただし, $f_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ とし, $\{E_1, \dots, E_r\}$ は $\Pi^\perp$ の滑らかな正規直交枠である. この λ を f の**符号付き体積密度関数**と呼ぶ. p がフロンタル f の特異点であることと, $\lambda(p) = 0$ であることは同値である.

定義 2.2. 特異点 $p \in M^n$ が**非退化特異点**であるとは, $(d\lambda)_p$ が 0 とならないことを指す.

非退化性は, 局所座標の取り方及び正規直交枠の取り方に依らない.

補題 2.3 (cf. [26]). 特異点 p が非退化特異点であるとき, $\text{rank}(df)_p = n - 1$ が成り立つ.

p をフロントル $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の非退化特異点とする. 補題 2.3 より, $\dim(\ker(df)_p) = 1$ が成り立つ. この $\ker(df)_p$ を p における**退化空間**と呼ぶ. フロントル $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の特異点が全て非退化特異点であるならば, 陰関数定理より特異点集合 Σ_f は M^n の $n-1$ 次元部分多様体となる.

定義 2.4. フロントル $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の特異点は全て非退化特異点であるとする. p を特異点とした時, $\ker(df)_p \not\subset T_p \Sigma_f$ が成り立つならば, $p \in M^n$ を**第 1 種特異点**と呼び, そうでない時は $p \in M^n$ を**第 2 種特異点**と呼ぶ.

C_f を M^n 上の f の第 2 種特異点の集合とする.

定義 2.5 ([26]). フロントル $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ が以下を満たす時, f を**許容的なフロントル**と呼ぶ

- 非退化特異点のみを持つ.
- ある Σ_f の超曲面 $\mathcal{H}$ が存在し, $C_f \subseteq \mathcal{H}$ が成り立つ.

例として, 特異点が全て第 1 種特異点であるフロントルは許容的である. また, 次の例 2.6 のように, 全ての特異点が A_{k+1} 特異点であるフロントルは許容的である.

例 2.6. フロントル $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ の特異点が全て A_{k+1} 特異点 ($1 \leq k \leq n$) と右左同値であるとする. ただし, A_{k+1} 特異点とは $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^{n+1}$ への写像

$$(t, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left((k+1)t^{k+2} + \sum_{j=2}^k (j-1)t^j x_j, -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k j t^{j-1} x_j, x_2, \dots, x_n \right)$$

の原点における写像芽を指す. $\tilde{\eta}$ を U 上の $\mathbf{0}$ にならない, 各特異点 $q \in \Sigma_f$ で $\tilde{\eta}(q) \in \ker df_q$ を満たすベクトル場とし,

$$\lambda^{(0)} = \lambda, \lambda^{(1)} = \lambda', \lambda^{(i)} = d\lambda^{(i-1)}(\tilde{\eta}) \quad (2 \leq i \leq k)$$

とする. ただし, λ は f の符号付き体積密度関数である. この時, f の A_{k+1} 特異点 p に対して, p を含む近傍 U 上で

$$\lambda(p) = \lambda'(p) = \dots = \lambda^{(k-1)}(p) = 0, \lambda^{(k)} \neq 0$$

が成り立ち, かつ C^∞ 級写像 $(\lambda, \lambda', \dots, \lambda^{(k-1)}): U \rightarrow \mathbf{R}^k$ のヤコビ行列の階数が p で k となる ([19, Corollary 2.5]). また, $C_f \cap U = \{p \in U \mid (\lambda, \lambda')(p) = (0, 0)\}$ と表すことが出来る. よって, $\varphi = (\lambda, \lambda'): U \rightarrow \mathbf{R}^2$ とすると, $C_f \cap U = \varphi^{-1}((0, 0))$ となる. いま, 任意の $p \in \varphi^{-1}((0, 0))$ に対して, p は A_{k+1} 特異点と右左同値であるので, φ のヤコビ行列の階数は 2 となる. すなわち, $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$ は φ の正則値となる. したがって, C_f は Σ_f 内の超曲面となる. よって, $\mathcal{H} = C_f$ とすると, f は許容的なフロントルとなる.

例として, $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への A_3 特異点の写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$,

$$f(t, x, y) = (4t^5 + t^2x + 2t^3y^2, 5t^4 + 2tx + 3t^2y, x, y)$$

の場合, $\Sigma_f = \{(t, -3ty - 10t^3, y) \in \mathbf{R}^3 \mid (t, y) \in \mathbf{R}^2\}$ 及び

$$\begin{aligned} C_f &= \{(t, -3ty - 10t^3, y) \in \Sigma_f \mid y = -10t^2\} \\ &= \{(t, 20t^3, -10t^2) \in \Sigma_f \mid t \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

となり, f は許容的なフロントルとなる (図 1 参照).

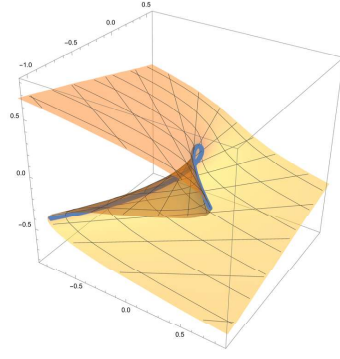


図 1: A_3 特異点の写像の特異点集合 Σ_f (黄色の曲面) と第 2 種特異点の集合 C_f (青い曲線) の図. C_f が Σ_f 内の正則曲線であるため, f は許容的なフロンタルである (定義 2.5, 例 2.6).

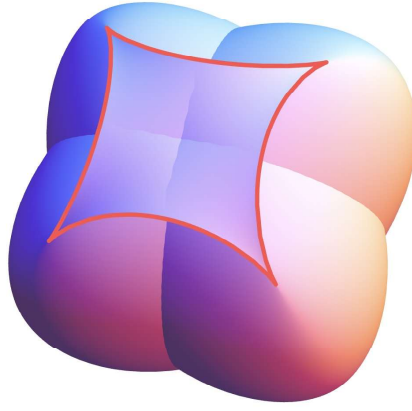


図 2: $\mathbf{R}^3$ 内の許容的なフロンタルの像, 赤色の曲線は特異点集合の像を表す (定義 2.5).

2.2 絶対全曲率

ここでは Lipschitz-Killing 曲率の定義を紹介し, 許容的なフロンタルに対して絶対全曲率を定める (定義 2.9).

ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n+r}$ に対し, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ で標準的な内積を表す. また, $\mathbf{u}$ のノルムを $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ で表す. 各 $p \in M^n$ に対し $B_p = \{\mathbf{v} \in \Pi^\perp(p) \mid \|\mathbf{v}\| = 1\}$ と表し, f の単位法ベクトル束 B を

$$B = \bigcup_{p \in M^n} B_p$$

で定める. B の滑らかな切断を f の単位法ベクトル場と呼ぶ. N を f の単位法ベクトル場とする. この時, 正則点集合 M_{reg}^n 上で次のワインガルテンの公式が成り立つ.

$$D_X N = -df(A_N X) + D_X^\perp N.$$

ただし, X を M^n 上の任意のベクトル場, D を $\mathbf{R}^{n+r}$ の標準的な接続, $D^\perp$ を法接続, A_N を N に関する型作用素とする. B_{reg} を $B_{\text{reg}} := \bigcup_{p \in M_{\text{reg}}^n} B_p$ によって定める. $(p, \xi) \in B_{\text{reg}}$ に対し, Lipschitz-Killing 曲率 $G(p, \xi)$ を

$$G(p, \xi) = \det A_\xi$$

で定める.

M^n の局所座標系 $(U; u_1, \dots, u_n)$ に対し,

$$d\hat{V} = \lambda du_1 \wedge \dots \wedge du_n, \quad dV = |\lambda| du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

をそれぞれ f の符号付き体積要素, (符号無し) 体積要素と呼ぶ. この時, $d\hat{V}$ は局所座標 $(u_1, \dots, u_n)$ と $\Pi^\perp$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \dots, E_r\}$ の取り方に依らない. また, dV は M^n の向きに同調した局所座標 $(u_1, \dots, u_n)$ の取り方, 及び $\Pi^\perp$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \dots, E_r\}$ の取り方に依らない. また, $d\sigma$ を B の各ファイバー上の体積要素とし, B の符号付き体積要素 $d\hat{\mu}_B$, (符号無し) 体積要素 $d\mu_B$ をそれぞれ

$$d\hat{\mu}_B = d\hat{V} \wedge d\sigma, \quad d\mu_B = dV \wedge d\sigma$$

によって定める.

滑らかな写像

$$\nu: B \rightarrow S^{n+r-1}; (p, \xi) \mapsto \xi$$

を f の標準的ガウス写像と呼ぶ.

命題 2.7 ([26, Proposition 2.5]). $d\mu_{S^{n+r-1}}$ を S^{n+r-1} の体積要素とする. この時, 標準的ガウス写像 ν による $d\mu_{S^{n+r-1}}$ の引き戻しを $\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}}$ と表す. B_{reg} 上で以下が成り立つ.

$$\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}} = (-1)^n G(p, \xi) d\hat{\mu}_B$$

したがって, G を B_{reg} 上で定義される Lipschitz-Killing 曲率とすると, 命題 2.7 より $G(p, \xi) d\hat{\mu}_B$ は特異点集合を越えて B 全体で定義されるなめらかな $(n+r-1)$ 次微分形式を定める. したがって, 次の系が得られる.

系 2.8 ([26, Corollary 2.6]). $|G(p, \xi)| d\mu_B$ は B 上の連続な $(n+r-1)$ 次微分形式である.

今後, M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体, $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は許容的なフロンタルであるとし, Π を f の generalized Gauss map とする. この時, f の特異点はすべて非退化であるため, 特異点集合 Σ_f は M^n 内の超曲面となる. $\bar{f}$ を f の Σ_f への制限とする. $\bar{\Pi}: \Sigma_f \rightarrow \widetilde{Gr}(n-1, n+r)$ を

$$\bar{\Pi}(p) := (df)_p(T_p M^n) \quad (p \in \Sigma_f)$$

と定める. この時, p は非退化特異点であるため, 補題 2.3 より $df_p(T_p M^n)$ は $(n-1)$ 次元部分空間になることに注意する. $\bar{\Pi}$ は $\bar{f}$ の generalized Gauss map となるので, $\bar{f}: \Sigma_f \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は余向き付け可能なフロンタルとなる. $\bar{f}$ の単位法束, 標準的ガウス写像, Lipschitz-Killing 曲率をそれぞれ $\bar{B}, \bar{\nu}, \bar{G}$ とおく.

定義 2.9 ([26]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし, $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は余向き付け可能かつ許容的なフロンタルであるとする. この時, 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ を次のように定める.

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G(p, \xi)| d\mu_B + \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \int_{\bar{B}} |\bar{G}(q, \eta)| d\mu_{\bar{B}}.$$

命題 2.7 より, 絶対全曲率 $\tau(M, f)$ は

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} (\text{vol}(\nu(B)) + \text{vol}(\bar{\nu}(\bar{B})))$$

と表される．ただし， $\text{vol}(\nu(B))$ 及び $\text{vol}(\bar{\nu}(\bar{B}))$ はそれぞれ像 $\nu(B)$ 及び $\bar{\nu}(\bar{B})$ の S^{n+r-1} での体積を表す．

もし正則点集合上の絶対全曲率のみを考えた場合，それは次の例 2.10 のように非自明な下限を持たない．

例 2.10. 正の実数 k に対し，写像 $f_k : S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$f_k(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, kx_{n+1}^3) \quad ((x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}).$$

によって定める．この時， f_k は許容的なフロンタルである．また，

$$\frac{1}{\text{vol}(S^n)} \int_B |G| d\mu_B = \frac{6 \text{vol}(S^{n-1})}{\text{vol}(S^n)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k |\cos(t)|}{(1 + (k \sin t)^2/4)^{\frac{n+1}{2}}} dt < \frac{12k \text{vol}(S^{n-1})}{\text{vol}(S^n)}.$$

という不等式が成り立つ．よって， $\varepsilon > 0$ に対し，正の実数 k を $k < \varepsilon \text{vol}(S^n)/(12 \text{vol}(S^{n-1}))$ を満たすようにとれば，正則点集合上の絶対全曲率 $\frac{1}{\text{vol}(S^n)} \int_B |G(p, \xi)| d\mu_B$ は ε 未満となる．

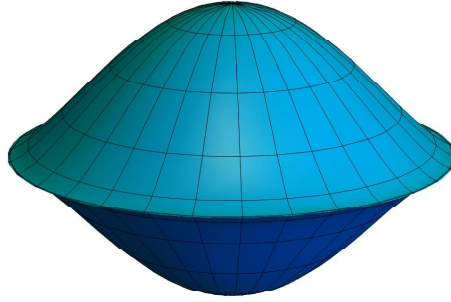


図 3: $n = 2$, $K = 2/3$ の場合の f_k の図 (例 2.10).

3 主結果

フロンタルに対する Chern-Lashof 型定理として，次の定理 I を得た．

定理 I ([26]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし， $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は余向き付け可能かつ許容的なフロンタルであるとする．この時，以下が成り立つ．

- (1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする ($0 \leq i \leq n$)．この時，絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ．

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^n b_i(M^n).$$

- (2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば， M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる．
- (3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば，像 $f(M^n)$ は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる．

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) と比べて，定理 I はフロンタルの像が $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれることまでしか主張できていない．しかし，特異点について条件を加えることで次の定理 II を得られる．

定理 II ([26]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし, $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を余向き付け可能なフロンタルであるとする. 特異点集合 Σ_f が空でなく, かつ特異点が全て第 1 種特異点であるとする. この時, $\tau(M^n, f) = 2$ であることと, 次の三つの条件が同時に成り立つことは同値となる.

- (a) f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体となる,
- (b) M^n は S^n と同相であり, Σ_f は S^{n-1} と同相である,
- (c) 特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ は $f(M^n)$ の境界と一致する.

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) の場合, 最小全曲率をもつはめ込み f の像 $f(M^n)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれたが, 定理 II の場合, 最小全曲率をもつフロンタル f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれることに注意する.

次の例 3.1 は絶対全曲率が 2 かつ定理 II の仮定を満たすフロンタルである.

例 3.1. 写像 $f: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, 0) \quad ((x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1})$$

によって定める. この時, f の特異点は全て第一種特異点となる. 特異点集合は $(n-1)$ 次元単位球面 $\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ となる. また, 像 $f(S^n)$ は n 次元単位閉球となるので, 正則点集合上の絶対全曲率は 0 となる. 一方, 特異点集合上の絶対全曲率は 2 となるので, f の絶対全曲率は 2 となる. さらに, 像 $f(S^n)$ は閉凸体となり, 特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ はその境界と一致する.

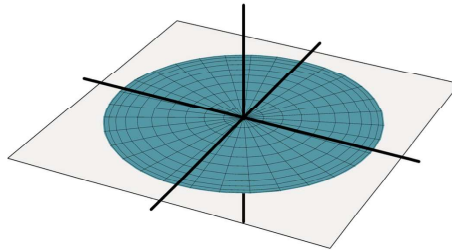


図 4: $\mathbf{R}^3$ 内の $f(S^2)$ の図 (例 3.1).

4 $n = 1, 2$ の場合

4.1 $n = 1$ の場合

$n = 1$ の場合, すなわち 1 次元フロンタル γ について考える. γ のパラメータ t に対し, $'$ は t による微分 $\frac{d}{dt}$ を表すこととする.

フロンタル $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{r+1}$ に対してある正の実数 ℓ が存在し, $\gamma(t + \ell) = \gamma(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) が成り立つならば γ を閉フロンタルと呼ぶ. また, ℓ で最小のものを周期と呼ぶ. パラメータを定数倍することで周期を 2π とすることができるので, 今後は閉フロンタル γ の周期を 2π とする. この時,

閉フロンタル γ の定義域を $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ とみなすことができる．フロンタル γ の正則点集合上で、曲率関数 κ を

$$\kappa(t) := \frac{\sqrt{\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^2 - (\gamma''(t) \cdot \gamma'(t))^2}}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

によって定める． $n = 1$ の場合、フロンタル γ は第 2 種特異点を持たない．したがって、フロンタル γ が許容的であることと、 γ が非退化特異点のみをもつことは同値となる．よって、許容的なフロンタルの特異点集合は離散集合となる．

閉フロンタル $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^{r+1}$ の特異点が全て非退化であるならば、絶対全曲率を定めることができる．絶対全曲率は、曲率関数 κ を用いて表すことができる．

命題 4.1 ([26]). 特異点が全て非退化である閉フロンタル $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^{r+1}$ に対し、次の式が成り立つ．

$$\tau(S^1, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{S^1} \kappa ds + \#\Sigma_\gamma.$$

閉フロンタルの絶対全曲率に対し、次の系 4.2 が成り立つ．

系 4.2 ([26]). 特異点が全て非退化である閉フロンタル $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^{r+1}$ に対し、次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{\pi} \int_{S^1} \kappa ds + \#\Sigma_\gamma \geq 2.$$

さらに、もし特異点集合 Σ_f が空でないならば、絶対全曲率が 2 であることと、 $\#\Sigma_f = 2$ かつ像 $\gamma(S^1)$ が線分となることは同値となる．

もし特異点集合 Σ_f が空ならば、つまり γ が正則曲線ならば、系 4.2 は Fenchel の定理と同値になる．また、特異点が全て非退化であるならば、 γ が余向き付け可能であることと $\#\Sigma_\gamma$ が偶数であることは同値となる．したがって、特異点集合 Σ_γ が空でないとすると、 $\#\Sigma_\gamma \geq 2$ となる．余向き付け不可能な場合の 1 次元フロンタルの絶対全曲率については、[10] にて調べられている．

4.2 $n = 2$ の場合

この節では Kossowski-Scherfner [13] の結果と比較するため、 $\mathbf{R}^3$ 内の 2 次元フロンタルについて考える．

正則点集合が稠密な滑らかな写像 $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が (余向き付け可能な) フロンタルであることの必要十分条件は、ある滑らかな写像 $N : M^2 \rightarrow S^2$ が存在し、

$$df_p(X) \cdot N(p) = 0 \quad (p \in M^2, X \in T_p M^2)$$

を満たす事である．さらに、 $f : M^2 \rightarrow S^2$ が波面であるとは、 $\mathcal{L} := (f, N) : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめ込みとなることを指す． $n = 2$ の場合、フロンタル $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の特異点が全て非退化であるならば、特異点集合 Σ_f は M^2 内の正則曲線となる．よって、特異点が全て非退化なフロンタル f が許容的であることと、第 2 種特異点の集合 C_f が離散集合であることは同値である．

Kossowski と Scherfner は波面に対して次の Chern-Lashof 型定理を得た．

事実 4.3 ([13]). M^2 を向き付け可能かつコンパクトな 2 次元多様体、 $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を特異点が全て非退化かつ第 2 種特異点の集合が離散集合であるような余向き付け可能な波面であるとする．この時、

$$\int_{M^2} |K| dV + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa ds \geq 2\pi(2 + 2g(M^2))$$

が成り立つ。ただし、 K は f のガウス曲率、 κ は $f(\Sigma_f)$ の曲率関数、 ds は弧長測度、 $g(M^2)$ を M^2 の種数とする。

$\mathbf{R}^3$ 内の 2 次元フロンタルの絶対全曲率に対し、次の系 4.4 が成り立つ。

系 4.4 ([26]). M^2 を向き付け可能かつコンパクトな 2 次元多様体、 $f : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を特異点が全て非退化かつ第 2 種特異点の集合が離散集合であるような余向き付け可能なフロンタルであるとする。この時、

$$\int_{M^2} |K| dV + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa ds \geq 2\pi(2 + 2g(M^2))$$

が成り立つ。ただし、 K は f のガウス曲率、 κ は $f(\Sigma_f)$ の曲率関数、 ds は弧長測度、 $g(M^2)$ を M^2 の種数とする。特に、

$$\int_{M^2} |K| dV + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa ds \geq 4\pi \quad (4.1)$$

が成り立つ。さらに、特異点集合 Σ_f が空でなく、すべて第 1 種であるとする。この時、(4.1) の等号が成り立つならば、 M^2 は 2 次元球面と位相同型となり、像 $f(M^2)$ は $\mathbf{R}^3$ 内の平面に含まれる閉凸体となる。

系 4.4 は事実 4.3 のフロンタルへの拡張である。最小の絶対全曲率をもつフロンタルは波面ではないため、フロンタルへの拡張が絶対全曲率の最小性と凸性との関連を明らかにするのに不可欠である。

参考文献

- [1] B. -Y. Chen, *On the total absolute curvature of manifolds immersed in Riemannian manifold*, Kōdai Math. Semin. Rep. **19** (1967), 299–311.
- [2] B. -Y. Chen, *On the total absolute curvature of manifolds immersed in Riemannian manifold II*, Kōdai Math. Semin. Rep. **22** (1970), 89–97.
- [3] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds*, Am. J. Math. **79** (1957), 306–318.
- [4] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds. II*, Mich. Math. J. **5** (1958), 5–12.
- [5] W. Fenchel, *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*, Math. Ann. **101** (1929), 238–252.
- [6] W. Fenchel, *On the differential geometry of closed space curves*, Bull. Am. Math. Soc. **57** (1951), 44–54.
- [7] J. A. Hoisington, *On the total curvature and Betti numbers of complex projective manifolds*, Geom. Topol. **26** (2022), 1–45.
- [8] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.

- [9] A. Honda and K. Saji, *Geometric invariants of 5/2-cuspidal edges*, Kodai Math. J. **42** (2019), 496–525.
- [10] A. Honda, C. Tanaka, and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, Adv. Geom. **25** (2025), 93–104.
- [11] G. Ishikawa, *Singularities of frontals*, in: Singularities in Generic Geometry, in: Advanced Studies in Pure Mathematics (ASPM), vol. 78, Math. Soc. Japan, 2018, pp. 55–106.
- [12] S. Izumiya, *Total lightcone curvatures of spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski space*, Differ. Geom. Appl. **34** (2014), 103–127.
- [13] M. Kossowski and M. Scherfner, *Total curvature for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), 179–199.
- [14] N. Koike, *The Lipschitz-Killing curvature for an equiaffine immersion and theorems of Gauss-Bonnet type and Chern-Lashof type*, Result. Math. **39** (2001), 230–244.
- [15] N. Koike, *Theorems of Gauss-Bonnet and Chern-Lashof types in a simply connected symmetric space of non-positive curvature*, Tokyo J. Math. **26** (2003), 527–539.
- [16] N. Koike, *The Gauss-Bonnet and Chern-Lashof theorems in a simply connected symmetric space of compact type*, Tokyo J. Math. **28** (2005), 483–497.
- [17] N. H. Kuiper and W. Meeks. III, *Total curvature for knotted surfaces*, Invent. Math. **77** (1984), 25–69.
- [18] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. **169-2** (2009), 491–529.
- [19] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [20] E. Teufel, *Eine Differentialtopologische Berechnung der totalen Krümmung und totalen Absolutkrümmung in der sphärischen Differentialgeometrie*, Manuscr. Math. **31** (1980), 119–147.
- [21] E. Teufel, *Differential topology and the computation of total absolute curvature*, Math. Ann. **258** (1982), 471–480.
- [22] E. Teufel and G. Solanes, *Horo-tightness and total (absolute) curvatures in hyperbolic spaces*, Isr. J. Math. **194** (2013), 427–459.
- [23] M. Umehara, K. Saji, and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*, Series in Algebraic and Differential Geometry 1. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Hackensack, NJ, xvi, 370 p. (2022).
- [24] T. J. Willmore and B. A. Saleemi, *The total absolute curvature of immersed manifolds*, J. Lond. Math. Soc. **41** (1966), 153–160.

- [25] P. Wintgen, *On total absolute curvature of nonclosed submanifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **2** (1984), 55–87.
- [26] Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of submanifolds with singularities*, preprint (arXiv:2412.19147).