

Morse bipersistence modules and rectangle barcodes

新潟大学 自然科学研究科 矢代 海音*

Kanon Yashiro

Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

1 はじめに

本稿では著者と折田龍馬氏、小枝幹汰氏によるプレプリント [KOY23] の一部を概説する。[KOY23] では滑らかな多様体上の Morse 関数から 2 パラメータのパーシステンス加群を構成した。さらに、そのような構成によってバーコードと呼ばれる不変量が得られることを示した。本稿ではパーシステンス加群と、Morse 関数に対するパーシステンス加群の具体的な構成について概説する。

2 準備

位相的データ解析において、パーシステントホモロジーはデータの“形”を解明するための強力な道具として知られている。位相的データ解析における手法の概略は一般にデータ X が与えられたとき、

- (1) 位相空間からなる図式 $F(X)$ を構成する。ここで位相構造は与えられたデータ X に関する情報を持つものとする。
- (2) トポロジーや抽象代数の道具を用いて $F(X)$ の構造を解析する。

という 2 つのステップからなっている。

例として、コンパクト空間 X 上の関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に対してその劣位集合を $X^n = \{x \in X \mid f(x) \leq n\}$ と定めることで、次のような (1 パラメータの) フィルトレーションが得られる

$$\emptyset = X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^{N-1} \subset X^N = X.$$

このフィルトレーションから、体 \mathbb{F} を係数とするホモロジー群の系列

$$0 = X_*(X^0) \xrightarrow{i_{0,1}} X_*(X^1) \xrightarrow{i_{1,2}} \dots \xrightarrow{i_{N-1,N-2}} X_*(X^{N-1}) \xrightarrow{i_{N-1,N}} X_*(X^N) = X_*(X)$$

*e-mail address: yashiro@m.sc.niigata-u.ac.jp

が誘導され、この系列を調べることでホモロジー群の生成元がどの瞬間に発生し、どの瞬間に消滅したのかを知ることができる。

このように、 $(\mathbb{R}$ や \mathbb{N} などの) 全順序集合によって添え字づけられた、体係数のホモロジー群について考察することが、(1パラメータの) パーシステンス加群の典型的な例である。しかし、位相的データ解析において全順序ではない順序集合によって添え字づけられた空間のなす図式 $F(X)$ を構成したい、という状況が多く存在する。特に n 個の全順序集合の直積によって添え字づけられたものを考えることは自然であり、そのようなものは n パラメータのフィルトレーションと呼ばれ、 n パラメータのフィルトレーション $F(X)$ をホモロジー群を用いて解析することは、(n パラメータの) パーシステンス加群の典型的な例として挙げる事ができる。1パラメータのパーシステントホモロジーは外れ値などに対して非常に不安定である一方、2パラメータのパーシステントホモロジーはそのような問題に対処することができるアプローチとして興味深い研究対象になっている。

2.1 パーシステンス加群

\mathbb{F} を体とする。一般に、半順序集合 (P, \preceq) は P の元を対象とし、射を

$$\text{hom}_P(x, y) = \begin{cases} \{*\} & \text{if } x \preceq y, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定めることによって圏と見なすことができる。 (P, \preceq) を圏とみなし、 $\text{Vect}_{\mathbb{F}}$ を \mathbb{F} 上のベクトル空間と \mathbb{F} 線形写像からなる圏としたとき、関手 $\mathfrak{M}: P \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$ を (P によって添え字づけられた) **パーシステンス加群** と呼ぶ。上で挙げた例は P が全順序集合となる場合になっており、そのようなときは特に **1パラメータのパーシステンス加群** と呼ぶ。これを一般化して多変数パーシステンス加群を定義することができる。全順序集合 $(T_1, \preceq_1), (T_2, \preceq_2)$ に対して、 $P = T_1 \times T_2$ 上の半順序 \preceq を

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \iff x_1 \preceq_1 y_1 \text{ かつ } x_2 \preceq_2 y_2$$

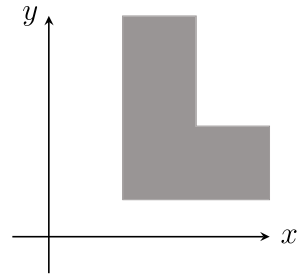
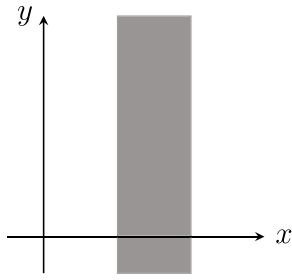
と定め、関手 $\mathfrak{M}: P \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$ を **2パラメータのパーシステンス加群** と呼ぶ。同様にして、 n パラメータのパーシステンス加群が定義される。特に、各点 $x \in P$ に対して、 \mathbb{F} ベクトル空間 \mathfrak{M}_x が有限次元となるとき、パーシステンス加群 \mathfrak{M} は **各点有限次元** であるという。

定義 1. 半順序集合 (P, \preceq) に対し、空でない部分集合 I が P の **区間** であるとは、次の条件を満たすことをいう。

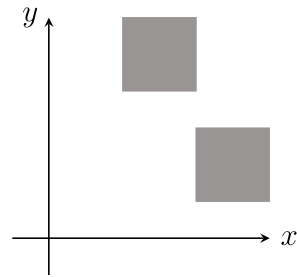
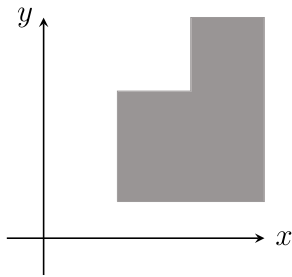
- (1) $x, y \in I, z \in P$ に対し、 $x \preceq z \preceq y$ ならば $z \in I$.
- (2) $x, y \in I$ に対して、すべての i に対して z_i と z_{i+1} が比較可能であるような $z_1, \dots, z_k \in I$ が存在する。ここで、 $z_0 = x, z_{k+1} = y$ とする。

$P = \mathbb{R}$ の場合、区間は次のいずれかの形で表される。

$$\begin{aligned} (x, y) &= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z < y\}, & (x, y] &= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z \leq y\}, \\ [x, y) &= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z < y\}, & [x, y] &= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\}. \end{aligned}$$



\mathbb{R}^2 の区間の例



\mathbb{R}^2 の区間でないものの例

特に, $(-\infty, y)$ や $(\infty, y]$ の形をしたものを **downset**, (x, ∞) や $[x, \infty)$ の形をしたものを **upset** という. 一方で, $P = \mathbb{R}^2$ の場合, 区間としては様々なものが考えられることに注意されたい.

$P = T_1 \times T_2$ 内の**長方形**とは, T_1 内の区間 I_1 , T_2 内の区間 I_2 を用いて $I_1 \times I_2$ と表せるもののことである. また, $P = T_1 \times T_2$ 内の**ブロック**とは次のいずれかの形で表される区間のことである.

- (1) $D_1 \times D_2$ (D_1, D_2 は downset),
- (2) $U_1 \times U_2$ (U_1, U_2 は upset),
- (3) $I_1 \times T_2$ (I_1 は T_1 の区間),
- (4) $T_1 \times I_2$ (I_2 は T_2 の区間).

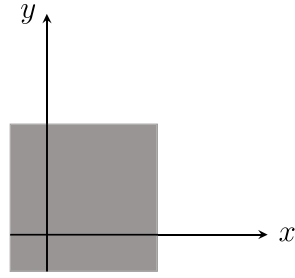
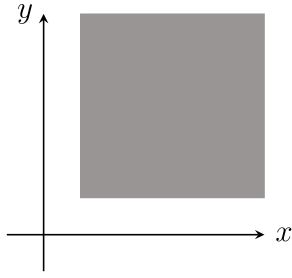
定義から, ブロックは長方形となることがわかる.

定義 2. 半順序集合 P の区間 I に対し, パーシステンス加群 $\mathbb{F}_I: P \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ を

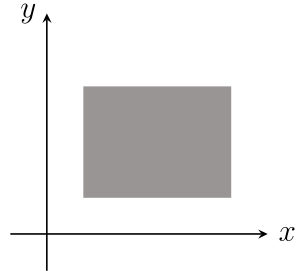
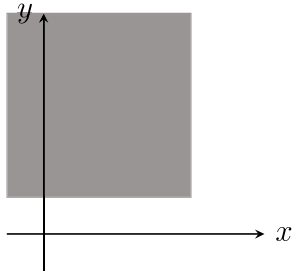
$$(\mathbb{F}_I)_x = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{if } x \in I, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (\mathbb{F}_I)_{x,y} = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{F}} & \text{if } x, y \in I \text{ with } x \preceq y, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

により定義する. このパーシステンス加群を**区間加群**という.

パーシステンス加群の直和は各点ごとの直和で定義される. 各点有限次元な 1 パラメータのパーシステンス加群については, 次の強力な定理が成り立つことが知られている.



\mathbb{R}^2 のブロックの例



\mathbb{R}^2 のブロックでない長方形の例

定理 3 (Normal Form Theorem [BCB20, Theorem 1.2]). P を全順序集合, $\mathfrak{M}: P \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ を各点有限次元なパーシステンス加群とする. このとき,

$$\mathfrak{M} \cong \bigoplus_{I \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})} \mathbb{F}_I$$

を満たす, P の区間からなる多重集合 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ が一意的に存在する.

各点有限次元な 1 パラメータのパーシステンス加群に対して定理 3 によって定まる多重集合 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ を \mathfrak{M} のバーコードと呼ぶ. バーコードはパーシステンス加群の情報を保持しており, バーコードを調べることによって, パーシステンス加群を調べることができる.

次に 2 パラメータのパーシステンス加群について紹介する. 2 パラメータのパーシステンス加群に対しては, Normal Form Theorem (定理 3) は成り立たないが, 次が成り立つことが知られている.

定理 4 ([BCB20, Theorem 1.1]). P を半順序集合, $\mathfrak{M}: P \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ を各点有限次元なパーシステンス加群とする. このとき,

$$\mathfrak{M} \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{M}^{\alpha}$$

を満たす, 直既約なパーシステンス加群の族 $\{\mathfrak{M}^{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ が同型の違いを除いて一意的に存在する.

定義 5. パーシステンス加群 $\mathfrak{M}: P \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ が区間分解可能であるとは,

$$\mathfrak{M} \cong \bigoplus_{I \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})} \mathbb{F}_I$$

を満たす, P の区間からなる多重集合 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ が存在することをいう. このとき, $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ を \mathfrak{M} のバーコードという.

区間分解可能なパーシステンス加群に対してのバーコードが長方形のみからなるとき, 特に**長方形分解可能**という. バーコードがブロックのみからなるときは**ブロック分解可能**という.

2.2 Morse bipersistence module

本稿では Morse ホモロジーを用いてパーシステンス加群を構成するため, まずは Morse 関数に対して Morse ホモロジーを用いて 1 パラメータのパーシステンス加群を構成する方法について紹介する. M を連結な有向閉 Riemann 多様体とし, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を Morse–Smale 関数とする. Morse index が k であるような f の臨界点たちで生成される $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上のベクトル空間を $\text{CM}_k(f)$ によって表し, その間の境界作用素 $\partial^f: \text{CM}_k(f) \rightarrow \text{CM}_{k-1}(f)$ を Morse index の差が 1 となるような臨界点の間の negative gradient flow line を数え上げることにより定めることによって **Morse–Smale–Witten チェイン複体** $(\text{CM}_*(f), \partial^f)$ が得られる. Morse–Smale–Witten チェイン複体のホモロジーを **Morse ホモロジー** という. このとき, 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $f(p) \leq t$ を満たすような f の臨界点 p たちによって生成される部分複体 $(\text{CM}_*^{(-\infty, t]}(f), \partial^f)$ を考えることができる. $t < t'$ に対し, $\text{CM}_*^{(-\infty, t]}(f) \subset \text{CM}_*^{(-\infty, t']}(f)$ となることから特に, 包含が誘導する Morse ホモロジーの間の準同型写像 $\text{HM}_*^{(-\infty, t]}(f) \rightarrow \text{HM}_*^{(-\infty, t']}(f)$ が得られる. したがって, 各 $t \in \mathbb{R}$ に $\text{HM}_*^{(-\infty, t]}(f)$ を対応させることによって 1 パラメータのパーシステンス加群

$$\text{HM}_*^{(-\infty, \bullet]}(f) = \left\{ \text{HM}_*^{(-\infty, t]}(f) \right\}_{t \in \mathbb{R}}$$

が得られる. 例として次のようなハート型の円周の高さ関数を考えると, これは Morse 関数であり, パーシステンス加群としての同型

$$\text{HM}_0^{(-\infty, \bullet]}(f) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{[0, \infty)} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{[2, 3)},$$

$$\text{HM}_1^{(-\infty, \bullet]}(f) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{[4, \infty)}$$

が得られることがわかる. このとき, $\{[0, \infty), [2, 3)\}, \{[4, \infty)\}$ がそれぞれのバーコードである.

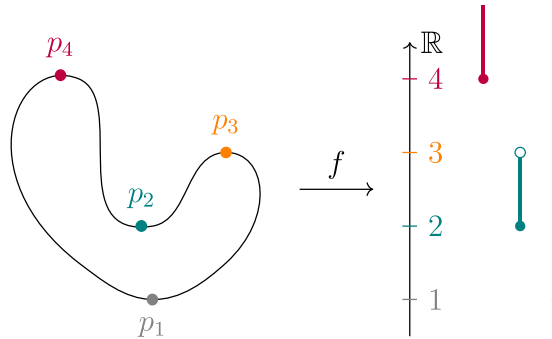


Figure 1: ハート型の円周の高さ関数と対応するバーコード

このようにして, Morse 関数から 1 パラメータのパーシステンス加群を構成し, バーコードを得ることができる. 1 パラメータのパーシステンス加群に対するバーコードの中で, 有界で最も長い区間のことを **boundary depth** という. boundary depth を調べることで, バーコードの間の距離を評価することができ, パーシステンス加群の情報を得ることができる.

次に, Morse 関数から 2 パラメータのパーシステンス加群を構成する方法について紹介する. $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ を満たすものとしたとき, 商複体

$$\mathrm{CM}_*^{(a,b]}(f) = \mathrm{CM}_*^{(-\infty,b]}(f) / \mathrm{CM}_*^{(-\infty,a]}(f)$$

が定義できるため, この商複体から得られるホモロジー群の族

$$\mathrm{HM}_*^{(\bullet,\bullet]}(f) = \left\{ \mathrm{HM}_*^{(a,b]}(f) \right\}_{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$$

が得られる. このとき, $\mathrm{HM}_*^{(\bullet,\bullet]}(f)$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ によって添え字づけられた 2 パラメータパーシステンス加群となっている. 実際, $b \leq b'$ のとき, $\mathrm{CM}_*^{(a,b]}(f) \subset \mathrm{CM}_*^{(a,b']}(f)$ であることから, 包含が誘導する Morse ホモロジーの間の準同型写像 $\mathrm{HM}_*^{(a,b]}(f) \rightarrow \mathrm{HM}_*^{(a,b']}(f)$ が得られる. 一方で, $a \leq a'$ のときは $\mathrm{CM}_*^{(-\infty,a]}(f) \subset \mathrm{CM}_*^{(-\infty,a']}(f)$ であることから射影が誘導する Morse ホモロジーの間の準同型写像 $\mathrm{HM}_*^{(a,b]}(f) \rightarrow \mathrm{HM}_*^{(a',b]}(f)$ が得られる. このとき, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HM}_*^{(a,b']}(f) & \longrightarrow & \mathrm{HM}_*^{(a',b']}(f) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{HM}_*^{(a,b]}(f) & \longrightarrow & \mathrm{HM}_*^{(a',b]}(f) \end{array}$$

したがって, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の各点 (a, b) に対して $a < b$ のとき $\mathrm{HM}_*^{(a,b]}(f)$ を対応させ, そうでないときは自明なベクトル空間を対応させることにより, $\mathrm{HM}_*^{(\bullet,\bullet]}(f)$ は 2 パラメータのパーシステンス加群となる.

3 主定理

$c \in \mathbb{R}$, $l_1, l_2 > 0$ に対して \mathbb{R}^2 内の長方形を

$$R(c; l_1, l_2) = [c - l_1, c] \times [c, c + l_2]$$

によって表す. また, $R(c; \infty, l_2) = [\infty, c] \times [c, c + l_2)$, $R(c; l_1, \infty) = [c - l_1, c] \times [c, \infty)$, $R(c; \infty, \infty) = [-\infty, c] \times [c, \infty)$ と定める. 以下が我々が得た結果である.

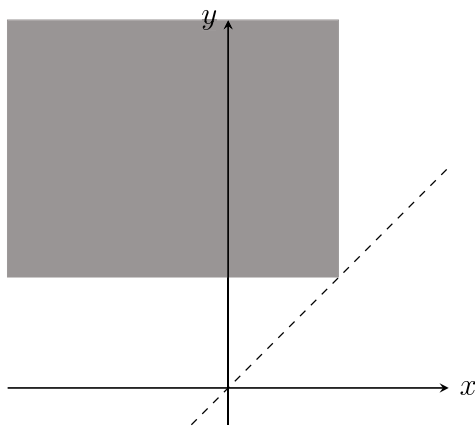
定理 6. 2 パラメータパーシステンス加群 $\mathrm{HM}_k^{(\bullet,\bullet]}(f)$ は任意の次数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して長方形分解可能である. つまり,

$$\mathrm{HM}_k^{(\bullet,\bullet]}(f) \cong \bigoplus_{R \in \mathfrak{B}_k^{(\bullet,\bullet]}(f)} \mathbb{F}_R$$

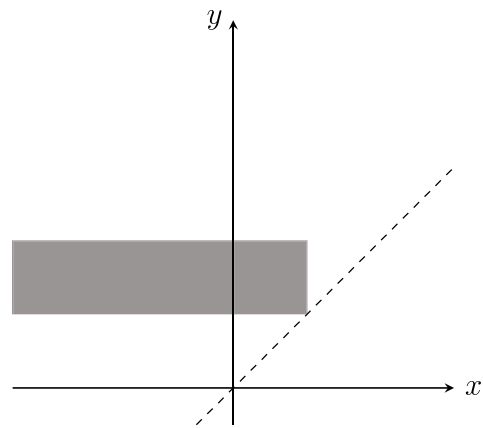
となるような, 長方形からなる多重集合 $\mathfrak{B}_k^{(\bullet,\bullet]}(f)$ が存在する. さらに, $\mathfrak{B}_k^{(\bullet,\bullet]}(f)$ に含まれる長方形は次のうちのいずれかの形をもつ:

- (S) 縦, 横の長さが無限のもの ($R(c; \infty, \infty)$ の形をしているもの),
 (B) 縦の長さが有限であり, 横の長さが無限のもの ($R(c; \infty, l_2)$ の形をしているもの),
 (N) 縦の長さが無限であり, 横の長さが有限のもの ($R(c; l_1, \infty)$ の形をしているもの).
 特に, これらの長方形はブロックではないことに注意されたい. また,
 (R) 縦, 横の長さが有限のもの ($R(c; l_1, l_2)$ の形をしているもの).

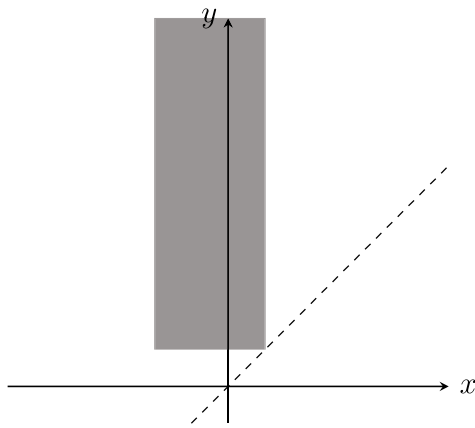
はバーコードに現れないことも判明している.



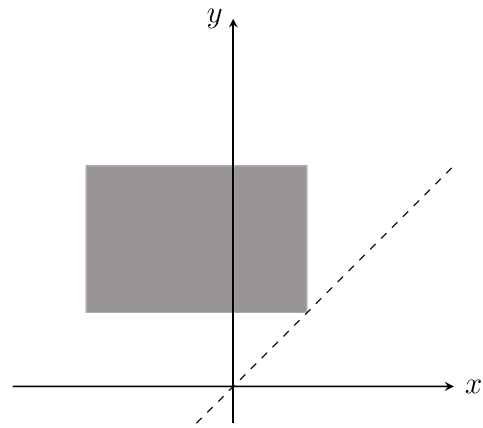
(S)



(B)



(N)



(R)

それぞれの長方形の概形

以下の図がハート型の円周の高さ関数に対する2パラメータのパーシステンス加群のバーコードである. 一つ目の変数に関して極限を取ることによって1変数のパーシステンス加群のバーコードが復元されることもわかる.

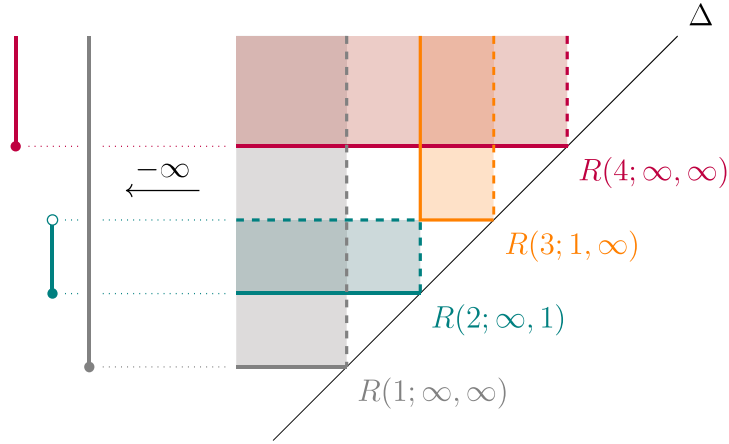


Figure 2: ハート型の円周の高さ関数に対する rectangle barcode

References

- [BL23] M.B. Botnan and M. Lesnick, *An introduction to multiparameter persistence*, In Representations of algebras and related structures, EMS Ser. Congr. Rep., pages 77-150. EMS Press, Berlin, [2023] ©2023.
- [BCB20] M. B. Botnan and W. Crawley-Boevey, Decomposition of persistence modules, Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), no. 11, 4581–4596; MR4143378
- [KOY23] K, Koeda, R, Orita and K, Yashiro, Floer-type bipersistence modules and rectangle barcodes, arXiv: 2312.07847.
- [PRSZ20] L. Polterovich, D. Rosen, K. Samvelyan, and J. Zhang, *Topological persistence in geometry and analysis*, University Lecture Series, vol. 74, American Mathematical Society, Providence, RI, [2020] ©2020. MR 4249570.
- [UZ16] M. Usher and J. Zhang, *Persistent homology and Floer-Novikov theory*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6 3333-3430. MR 3590354.