Holonomic D-modules と holomorphic map germsの特異点
Holonomic D-modules and singularities of holomorphic map germs

新潟大学大学院自然科学研究科　　田島慎一[*1]
TAJIMA, Shinichi
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

Abstract

Singularities of finite holomorphic map germs are considered in the context of computational algebraic analysis. Holonomic D-modules associated to image surfaces of a holomorphic maps from 2-space to 3 space are studied. An effective method is described for computing the structure of holonomic D-modules. The key of our approach is the concept of local cohomology.

1　序

本稿では, 計算代数解析の観点から, holomorphic map germs の特異点の解析を試みる. 対象とする holomorphic map germs は D. Mond が 1987 年に発表した論文 [12] に載っている $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^3$ への map germ の標準形から選んだ. 解析の対象とするのは, holomorphic map germ の像集合となる複素 2 次元の曲面に付随するホロノミー D-加群である. Local cohomology を用いることで, 曲面の特異点集合の孤立成分に台を持つホロノミー D-加群の構造を決定した. 埋没成分である $\mathbb{C}^3$ の原点に台を持つホロノミー D-加群に関しては, 発表するにはまだ解析が不十分であるので割愛したが, いくつかの例に対し原点に台を持つホロノミー D-加群が定める b-関数の根の計算結果を与えた.

ホロノミー D-加群は, vanishing cycles と深く関係するなど豊かな構造を担っており, それ自体特異点の複素解析的不変量とみなせる [6]. 従って, ホロノミー D-加群の構造を調べることは重要なテーマであると考えている. また. ホロノミー D-加群は Whitney stratification と深く係わることから [9, 11], holomorphic map germs の Whitney equisingularity に応用があるのではないかと期待している [5, 18].

2　Bernstein-Sato polynomialとホロノミーD-加群

この節では, b-関数とホロノミー D-加群に関する基本的な事柄を復習する. 前半で, 計算代数解析的な事柄を説明する. 後半ではホロノミー D-加群の解層に関する複素解析的な事柄を説明する.

*1 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp

以下, K は有理数体 $\mathbb{Q}$, $K[x]$ は K 係数の n 変数多項式環 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を表すとする. D により Weyl algebra $D = K[x, \frac{\partial}{\partial x}] = K[x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$ を表すとする. $D[s]$ により, Weyl algebra に属す線形偏微分作用素を係数とする不定元 s についての多項式のなす環を表す.

多項式 $f \in K[x] = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に対し, 一変数多項式環 $K[s]$ のイデアル B_f を

$$B_f = \{b(s) \in K[s] \mid b(s)f^s \in D[s]f^{s+1}\}$$

で定める. このイデアルの (monic な)generator を $b_f(s)$ で表し, f の Bernstein-Sato 多項式もしくは, b-関数とよぶ. b-関数は常に $s+1$ を因子として持つ. $b_f(s)$ に対し $\tilde{b}_f(s) := b_f(s)/(s+1)$ を f の reduced b-関数とよぶ.

f^s の環 $D[s]$ における annihilator

$$Ann_{D[s]}(f^s) = \{P(s) \in D[s] \mid P(s)f^s = 0\}$$

は, f の s-parametric annihilator と呼ばれる.

Remark s-parametric annihilator は, f が定める超曲面に関する非常に多くの情報を担っていることが知られている ([2]).

この s-parametric annhilator の計算法として, 大阿久俊則によるアルゴリズムと, J. Briancon と Ph. Maisonobe らによる計算アルゴリズムが知られている. ここでは, Briancon-Maisonobe の計算法を紹介する.

$D[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ により Poincaré-Birkoff-Witt algebra を表す. ただし交換関係は次で与えてある.

$$sP(x, \tfrac{\partial}{\partial x}) = P(x, \tfrac{\partial}{\partial x})s, \ \tfrac{\partial}{\partial t}P(x, \tfrac{\partial}{\partial x}) = P(x, \tfrac{\partial}{\partial x})\tfrac{\partial}{\partial t} \ \text{ for } P \in D, \ s\tfrac{\partial}{\partial t} - \tfrac{\partial}{\partial t}s = \tfrac{\partial}{\partial t}$$

作用素 $T_0, T_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$ を

$$T_0 = s + f\frac{\partial}{\partial t}, \ T_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

で定め, $D[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ における left イデアル L_{PBW} を

$$I_{PBW} = (T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n)$$

で定める. このとき, 次が成り立つ.

Theorem (J. Briancon and Ph. Maisonobe (2002) [3]) 次が成り立つ

$Ann_{D[s]}(f^s) = I_{PBW} \cap D[s]$.

イデアル L_{PBW} から $\frac{\partial}{\partial t}$ を消去した elimination イデアルを求めれば, f の s-parametric annihilator が構成できる.

例をひとつ紹介しておく.

Example $f(x) = x^3$

$T_0 = s + x^3\frac{\partial}{\partial t}$, $T_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial t}$ を用いて $I_{PBW} = (T_0, T_1) \subset D[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ と定める. $\frac{\partial}{\partial t}$ を消去することで $T_0 - \frac{1}{3}xT_1 = s - \frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}$ を得る. 従って $Ann_{D[s]}(f^s) = D[s](s - \frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x})$ を得る.

実際, $(s - \frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x})f^s = sf^s - \frac{1}{3}x(3sx^2)f^{s-1} = sf^s - sx^3f^{s-1} = 0$ が成り立つ.

論文 [19] には, PBW algebra におけるグレブナ基底計算により非孤立特異点を持つ超曲面に対する s-parametric annihilator を求める計算を説明した例がある.

Remark

現在, いくつかの数式処理システムに s-parametric annihilator を求めるアルゴリズムが実装されている. 一般に多項式 f が変形パラメータを含むとき, その s-parametric annihilators の構造もパラメータに依存することになる. 論文 [14, 15] では, PBW algebra に対し comprehensive グレブナ system の概念を導入し, これにより変形パラメータを含む多項式の s-parametric annihilator の構造が変形パラメータに依存する仕方を求めるアルゴリズムを構成した. 数式処理システム Risa/Asir に実装してあるこれらのアルゴリズムは, 特異点変形に伴うホロノミー D-加群の研究に用いることが出来る [24].

いま, $D[s]$ におけるイデアル $I(s)$ を

$$I(s) = Ann_{D[s]}(f^s) + D[s](f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \subset D[s]$$

でさだめ, さらに $\beta \in \mathbb{C}$ に対し

$$I_\beta = I(s) + D[s](s-\beta),\ M_\beta = D[s]/I_\beta$$

とする. $X = \mathbb{C}^n$ とおき, $\mathcal{D}_X$ により, X 上で正則函数を係数にもつ正則な線型偏微分作用素のなす層を表すとする. $\mathcal{M}_\beta$ は, D 加群 M_β の係数環を D から $\mathcal{D}_X$ に拡大して得られる $\mathcal{D}_X$ 加群のなす層を表すとする. 加群の層 $\mathcal{M}$ の層としての support を $\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ で表すことにする.

S は, f が定める超曲面 $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ を表すとし, $\mathrm{Sing}(S)$ は, 超曲面 S の特異点集合を表すとする.

Theorem (M. Kashiwara [8, 10]) 次が成り立つ

(1) $\tilde{b}_f(\beta) \neq 0$ に対し $\mathcal{M}_\beta = 0$ が成り立つ

(2) $\tilde{b}_f(\beta) = 0$ のとき $\mathcal{M}_\beta \neq 0$ であり, $\mathcal{M}_\beta$ は $\mathrm{supp}(\mathcal{M}_\beta) \subset \mathrm{Sing}(S)$ を満たすホロノミー D-加群である.

一般のホロノミー D-加群に関する基本的結果を 3 つほど復習しておく. ここでは, X は一般の複素多様体でるとする. $\mathcal{M}$ は, X 上の holonomic $\mathcal{D}_X$-module, $\mathcal{O}_X$ は, X 上の正則函数のなす層とする.

Theorem (M. Kashiwara[9])

X の Whitney stratification $X = \cup X_\alpha$ で次をみたすものが存在する

(0) $Ch(\mathcal{M}) \subset \cup \overline{T^*_{X_\alpha} X}$.

(1) $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_{X_\alpha}$ は, rannk が有限な locally constant sheaf である.

(2) $\mathrm{supp}(\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$ は, codimension が j もしくはそれ以上の局所的には有限個の locally closed analytic set の和集合である

この定理より, $\mathrm{codim}(\mathrm{supp}(\mathcal{M}) = d$ なら $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0$, for $i = 0, 1, \dots, d-1$ が成り立つことが分かる. 高次の消滅定理として, 次がある

Theorem (M. Kashiwara[9])

$k = \dim(Ch(\mathcal{M}) \cap T^*_x X)$ とする. このとき, $i > k$ に対し

$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_x = 0$ が成り立つ.

さて, Y は X の codimension d の complex submanifold であるとする. Y に台をもつ local cohomology のなす層 $B_{Y|X}$ を $\mathcal{B}_{Y|X} := \mathcal{H}_Y^d(\mathcal{O}_X)$ で定める. 次の結果も柏原による.

Theorem (M. Kashiwara [9])
Y は X の codimension d の complex submanifold であり, 先程の定理の条件を満たす Whitney stratification の有限個の strata の和集合であるとする. このとき, 次が成り立つ.

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}) = \mathcal{H}_Y^{i+d}(\mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$$

以上のことから, $d = \mathrm{codim}(\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ のとき, $Y \subset \mathrm{supp}(\mathcal{M})$ が $\mathcal{M}$ に付随した Whitney stratification の有限個の和集合であるような codimension d の非特異な submanifolod であり、更に $x \in Y$ において, x の近傍で特性多様体に関する条件 $Ch(\mathcal{M}) = T_Y^* X$ を満たしているとするならば,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}) = \mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y$$

さらに, $i > 0$ に対して

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X})_x = \mathcal{E}xt^{i+d}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_x = 0\ .$$

が成り立つことになる.

一般に, 線型偏微分方程式系の高次の解を求めるには, 方程式系の projective resolution を求めてから, 考えている関数空間に値を持つような cohomology を計算する必要があり, 実際の計算は極めて困難である. しかし, submanifold Y が上に示したような条件をみたすならば, Y に台をもつ local cohomology のなす層 $B_{Y|X}$ での通常の意味の解 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X})$ を求めれば, $\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ を決定したことになる. つまり, local cohomology を使えば, 解を求める際に方程式系の projective resolution の計算を回避することができることになる

Reduced b-関数に付随したホロノミー D-加群の計算代数解析に話をもどそう.

多項式 $f \in K[x] = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ が定める超曲面を $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ とおく.

多項式環でのイデアル $J = (f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \subset K[x]$ の準素イデアル分解を

$$J = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_\ell$$

とし, J の根基の素イデアル分解を

$$\sqrt{J} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$$

とする. ただし $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i, i = 1, 2, \ldots r$ であるとする.

$V(\mathfrak{p}_i),\ i = 1, 2, \ldots, r$ は孤立成分である. 他方 $V(\sqrt{\mathfrak{q}_j}),\ j = r+1, r+2, \ldots, \ell$ は埋没成分と呼ばれる.

明らかに, $V(\mathfrak{p}_1) \cup V(\mathfrak{p}_2) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_r) = \mathrm{Sing}(S)$ が成り立つ

Theorem ([24])
点 $x \in V(\mathfrak{p}_i) \subset \mathrm{Sing}(S)$ は, generic point であるとする. $Y \subset V(\mathfrak{p}_i)$ は, x の十分小さな近傍であるとする　こおのとき, 次の偏微分方程式系の 層 $B_{Y|X}$ における local cohomology 解のなるベクトル空間の次元の総和は, 点 x における transversal Milnor number と等しい

$$\mathfrak{q}_i \tau = 0,\ Ann_{D[s]}(f^s)\tau = 0,\ \tau \in B_{Y|X}.$$

3　map germ S_k

この節では. D. Mond の 1987 年の論文 [12] の分類表にある map germ S_k, $(k=1,2,3,\dots)$ に付随するホロノミー D-加群の構造を調べる. .

$\mathbb{C}^2=\{(u,v)\mid u,v\in\mathbb{C}\}$, $\mathbb{C}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{C}\}$ とする. map germ S_k は,

$$\varphi(u,v)=(u,v^2,u^{k+1}v+v^3)$$

で与えられる. 集合 $D\subset\mathbb{C}^2$ を

$$D=\overline{\{(u,v)\mid\exists(u',v')\neq(u,v)\ s.t.\ \varphi(u,v)=\varphi(u',v')\}}$$

で定める.

$X=\mathbb{C}^3$ とおく. 写像 φ の像集合を $S=\mathrm{Im}(\varphi)\subset X$ で表し, S の特異点集合を $\mathrm{Sing}(S)$ で表す.

計算すると, k が偶数の場合と奇数の場合で, 構造が異なることが分かる, ここでは, まず最初に $k=1$ の場合と $k=2$ の場合を調べ, その後に, 一般の k のときを調べることにする

例 S_1　$(x,y,z)=\varphi(u,v)=(u,v^2,u^2v+v^3)$

$D=\{(u,v)\mid u^2+v^2=0\}=D_+\cup D_-$, ただし $D_+=\{v=\sqrt{-1}u\}, D_-=\{v=-\sqrt{-1}u\}$ である.

曲面 $S=\mathrm{Im}(\varphi)$ は,

$$S=\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=x^4y+2x^2y^2+y^3-z^2=0\}$$

で与えられる. S の定義関数 f は, weight vector, $w=\frac{1}{6}(1,2,3)$ に関し weighted homogeneous である.

集合 D の φ による像は

$$\varphi(D)=\{(x,y,z)\mid x^2+y=0,z=0\}\subset S$$

で与えられる.

Remark

写像 $\varphi|_{D_+}:D_+\longrightarrow\varphi(D)$ と $\varphi|_{D_-}:D_-\longrightarrow\varphi(D)$ はともに $1:1$ 写像である.

イデアル J を $J=(f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\subset K[x,y,z]$ で定める.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4xy(x^2+y),\frac{\partial f}{\partial y}=(x^2+3y)(x^2+y),\frac{\partial f}{\partial z}=-2z$$

より, 集合 $\{x\}$ はイデアル J の極大独立集合であり, J の拡大 J^e は $J^e=(x^2+y,z)\subset K(x)[y,z]$ であることが分かる. $\mathrm{Sing}(S)=\varphi(D)\subset X$ が成り立つ

$\varphi(D)$ の generic な点での transversal Milnor number は, 明らかに 1 である.

Step 0　f の s-parametric annihilator $Ann_{D[s]}(f^s)$ を求める

$$E=6s-x\frac{\partial}{\partial x}-2y\frac{\partial}{\partial y}-3z\frac{\partial}{\partial z},B=(x^2+3y)\frac{\partial}{\partial x}-4xy\frac{\partial}{\partial y},$$

$$A_1=z\frac{\partial}{\partial x}+(2xy^2+2x^3y)\frac{\partial}{\partial z},A_2=2z\frac{\partial}{\partial y}+(3y^2+4x^2y+x^4)\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る. E は, weight vector w に関するオイラー作用素である. 偏微分方程式系の解は, weight vector w に関し, weighted homogeneous であることが分かる. 偏微分作用素 A_1,A_2 はともに $D[s](f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$ に属すことが分かるので, 偏微分作用素 A_1,A_2 は, 以下の local cohomology 解の計算には必要ない. Local cohomology 解の計算には, B を用いる.

Remark

(1) $T_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial t}$, $T_2 = \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial t}$ とおくと, $B = (x^2+3y)T_1 - 4xyT_2$ を満たす.

(2) 偏微分作用素 B は $(x^2+y)B = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ を満たすので, イデアル J より多くの情報を持っていることが分かる.

Step 1 孤立成分 $\varphi(D)$ 上の解析

$\varphi(D) = \{(x,y,z) \mid y + x^2 = z = 0\}$ に台をもつ local cohomology

$$\eta = \left[\begin{array}{c} h(x) \\ (y+x^2)(z) \end{array}\right] \in B_{\varphi(D)|X}$$

を考える. ただし, $h(x)$ は未知の正則函数とする. η は, $h(x)$ によらずに

$$(y+x^2)\left[\begin{array}{c} h(x) \\ (y+x^2)(z) \end{array}\right] = z\left[\begin{array}{c} h(x) \\ (y+x^2)(z) \end{array}\right] = 0$$

を満たす. 偏微分作用素 B は, 交換関係に注目すれば

$$B = -2x^2x\frac{\partial}{\partial x} - 4x^3(-\frac{\partial}{\partial y}) - 2x + 3\frac{\partial}{\partial x}(y+x^2) - 4x\frac{\partial}{\partial y}(y+x^2)$$

と表せることから, $D[s](y+x^2,z)$ を法とした式

$$B \cong -2(x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2x^3\frac{\partial}{\partial y} + x) \quad \bmod \quad D[s](y+x^2,z)$$

を得る.

微分方程式

$$B\eta = -2x(x\tfrac{\partial h}{\partial x}(x) + h(x))\left[\begin{array}{c} 1 \\ (y+x^2)(z) \end{array}\right] = 0$$

を解くことで, 解のなすベクトル空間の基底

$$\eta = \tfrac{1}{x}\left[\begin{array}{c} 1 \\ (y+x^2)(z) \end{array}\right]$$

を得る. この local cohomology η は, 多価ではなく一価であることに注意されたい.

オイラー作用素 E を用いると, $E\eta = (6s+6)\eta$ より,

$$s = -1$$

を得る. この結果は, local cohomology η の weighted degree と一致する.

以上の計算から, 孤立成分 $\varphi(D)$ に台を持つ非自明なホロノミー D-加群は, $s=-1$ のとき

$$M_{-1} = D/D(y+x^2, z, x(x\tfrac{\partial}{\partial x} + 2x^2\tfrac{\partial}{\partial y} + 1))$$

で与えられることが分かった.

Remark

我々が解析していたのは, 元々は, 4 つの零階の偏微分作用素と 4 つの 1 階の偏微分作用素とからなる $X = \mathbb{C}^3$ 上の連立線形偏微分方程式系であった. しかしここに与えた計算により, この偏微分方程式系が, 曲面 S の 1 次元の特異点集合 $\varphi(D)$ 上で非自明な方程式系を定めるのは, $s=-1$ のときのみであり, 具体的には, M_{-1} で与えられることが分かったことになる. このホロノミー D-加群は, 本質的に $\varphi(D)$ 上の確定特異点型の常微分方程式である.

このホロノミーD-加群は, 原点 $(0,0,0)$ を特異点集合として持つことから, reduced b-関数に付随するホロノミーD-加群で, 原点に台を持つようなものが存在する可能性があることが分かる. 原点に台を持つ local cohomology 解を求めるか, あるいはネター作用素 ([16, 17, 22]) を用いた計算を行えば, reduced b-関数の根に付随するようなホロノミーD-加群で原点に台を持つものを決定することができる, しかし説明が長くなるので, 本稿では, 埋没成分である原点に台を持つホロノミーD-加群は扱わないことにする. 論文 [23] に計算法の説明を与えてあるので参照されたい.

例 S_2 $(x,y,z)=\varphi(u,v)=(u,v^2,u^3v+v^3)$

$D=\{(u,v)\mid u^3+v^2=0\}$ である. $k=1$ の場合と異なり, 既約である.

曲面 S は $S=\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=x^6y+2x^3y^2+y^3-z^2=0\}$ で与えられる. 定義多項式 f は, weight vector $w=\frac{1}{18}(2,6,9)$ に関し, weighted homogeneous である. D の φ による像は

$$\varphi(D)=\{(x,y,z)\mid x^3+y=0, z=0\}\subset S$$

である.

Remark

写像 $\varphi|_D : D\longrightarrow\varphi(D)$ は $2:1$ である.

さて,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2y(x^3+y), \frac{\partial f}{\partial y}=(x^3+3y)(x^3+y), \frac{\partial f}{\partial z}=-2z$$

より, 集合 $\{x\}$ はイデアル $J=(f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})\subset K[x,y,z]$ の極大独立集合であり, J の拡大 J^e は

$$J^e=(x^3+y,z)\subset K(x)[y,z]$$

であることが分かる. $\mathrm{Sing}(S)=\varphi(D)\subset X$ を得る. $\varphi(D)$ の generic な点での transversal Milnor number は 1 である.

Step 0 f の s-parametric annihilator $Ann_{D[s]}(f^s)$ を求める

$$E=18s-2x\frac{\partial}{\partial x}-6y\frac{\partial}{\partial y}-9z\frac{\partial}{\partial z}, B=(x^3+3y)\frac{\partial}{\partial x}-6x^2y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$A_1=z\frac{\partial}{\partial x}+(3x^2y^2+3x^5y)\frac{\partial}{\partial z}, A_2=2z\frac{\partial}{\partial y}+(3y^2+4x^3y+x^6)\frac{\partial}{\partial z}$$

を得る. 先程と同様に, $A_1,A_2\in D[s](f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}))$ である.

Remark

偏微分作用素 B は, $B=(x^3+3y)T_1-6x^2yT_2$, $(x^3+y)B=\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}$ を満たす.

Step 1 孤立成分 $\varphi(D)$ 上の解析

$\varphi(D)=\{(x,y,z)\mid y+x^3=z=0\}$ に台をもつ local cohomology

$$\eta=\left[\begin{array}{c}h(x)\\(y+x^3)(z)\end{array}\right]\in B_{\varphi(D)|X}$$

を考える. ただし, $h(x)$ は未知の正則函数とする. η は

$$(y+x^3)\left[\begin{array}{c}h(x)\\(y+x^3)(z)\end{array}\right]=z\left[\begin{array}{c}h(x)\\(y+x^3)(z)\end{array}\right]=0$$

を満たす.

先程と同様に, 偏微分方程式 $B\eta = 0$ を解くことで

$$\eta = x^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{(y+x^3)(z)}\right]$$

を得る. この local cohomology 解は, 多価解である.

$E\eta = (18s+18)\eta$ より $s = -1$ を得る.

孤立成分 $\varphi(D)$ での local cohomology 解が, $k = 1$ の場合は一価であるが, $k = 2$ の場合は非自明な monodromy 構造を持つ多価解であることに留意されたい.

これから, 一般の k に対する解析結果を述べる

map germ S_k は,

$$\varphi(u,v) = (u, v^2, u^{k+1}v + v^3)$$

で与えられる. 集合

$$D = \overline{\{(u,v) \mid \exists(u',v') \neq (u,v) \ s.t. \ \varphi(u,v) = \varphi(u',v')\}}$$

は, $D = \{(u,v) \mid u^{k+1} + v^2 = 0\}$ である. k が奇数のとき, $D = D_+ \cup D_-$ と既約分解される.

D の像集合は $\varphi(D) = \{(x,y,z) \mid y + x^{k+1} = z = 0\}$ である.

Remark

(1) k が偶数のとき, $\varphi|D : D \longrightarrow \varphi(D)$ は $2:1$ である.

(2) k が奇数のとき, 写像 $\varphi|_{D_+} : D_+ \longrightarrow \varphi(D)$ と $\varphi|_{D_-} : D_- \longrightarrow \varphi(D)$ はともに $1:1$ である.

曲面 $S = \mathrm{Im}(\varphi)$ は

$$S = \{(x,y,z) \mid f = x^{2k+2}y + 2x^{k+1}y^2 + y^3 - z^2 = 0\}$$

で与えられる. 定義多項式 f は, weight vector $\frac{1}{6(k+1)}(2, 2(k+1), 3(k+1))$ に関し weighted homogeneous である.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(k+1)x^k y(y + x^{k+1}), \frac{\partial f}{\partial y} = (x^{k+1} + 3y)(y + x^{k+1}), \frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

より, 集合 $\{x\}$ はイデアル $J = (f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ の極大独立集合であることが分かる. 従って, $\mathrm{Sing}(S) = \varphi(D)$ を得る. $\varphi(D)$ の generic な点での transversal Milnor number は 1 である.

Step 0 f の s-parametric annihilator を求める.

$$E = 6(k+1)s - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)y\frac{\partial}{\partial y} - 3(k+1)z\frac{\partial}{\partial z}, B = (x^{k+1} + 3y)\frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)x^k y\frac{\partial}{\partial y}$$

と, A_1, A_2 を得る. ただし, 偏微分作用素 A_1, A_2 はイデアル $D[s]((f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ に属すので, local cohomology 解の計算には不必要であるので省略した.

Remark

偏微分作用素 B は, $B = (x^{k+1} + y)T_1 - 2(k+1)x^k yT_2$, $(x^{k+1} + y)B = \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}$ を満たす.

Step 1 孤立成分 $\varphi(D)$ 上での解析

イデアル $D[s](y + x^{k+1}, z)$ を法とした計算により

$$B \cong -x^k(2x\frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)x^{k+1}\frac{\partial}{\partial y} + (k+1)) \quad \mathrm{mod} \quad D[s](y + x^{k+1}, z)$$

を得る.

孤立成分 $\varphi(D)$ に台をもつ local cohomology class

$$\eta = [\frac{h(x)}{(y+x^{k+1})(z)}] \in B_{\varphi(D)|X}$$

を考える. ただし, $h(x)$ は未知の正則函数とする. η は

$$(y+x^{k+1})[\frac{h(x)}{(y+x^{k+1})(z)}] = z[\frac{h(x)}{(y+x^{k+1})(z)}] = 0$$

を満たす. 偏微分方程式 $B\eta = 0$ を解くことで

$$\eta = x^{-\frac{k+1}{2}}[\frac{1}{(y+x^{k+1})(z)}]$$

を得る. s の値は -1 である. k が偶数のとき, η は多価解である. k が奇数のときは, η は一価である.

原点に台を持つホロノミー D-加群をまだ求めていないが, $k = 1,2,3,4$ の場合にこれら原点台を持つホロノミー D-加群に付随する reduced b-関数の因子を参考のため, 以下に与える

map germ S_1

$$(s+1)(6s+8)(6s+9)(6s+10)$$

map germ S_2

$$(18s+17)(18s+19)(18s+23)(18s+25)(18s+27)(18s+29)(18s+31)$$

map germ S_3

$$(s+1)(12s+11)(12s+13)(12s+15)(12s+16)(12s+17)(12s+18)(12s+19)(12s+20)(12s+21)$$

map germ S_4

$$(30s+27)(30s+29)(30s+31)(30s+33)(30s+37)(30s+39)(30s+41)(30s+43)(30s+45)(30s+47)$$
$$(30s+49)(30s+51)(30s+53)$$

4 map germ B_k

この節では map germ $B_k, k = 2,3,4,\ldots,$ の像集合の reduced b-関数に付随するホロノミー D-加群の構造を調べる.

記号 $\varphi, D, X, S, f, J, \mathrm{Sing}(S)$ 等の意味は, 前節と同じであるとする. B_k は次で与えられる

$$B_k:\ (x,y,z) = \varphi(u,v) = (u, v^2, u^2v + v^{2k+1})\ k = 2,,3,4,\cdots$$

集合 D は,

$$D = \{(u,v) \mid u^2 + v^{2k}\} = D_+ \cup D_-$$

と既約分解される. ただし,

$$D_+ = \{(u,v) \mid u = v^k\}, D_- = \{(u,v) \mid u = -v^k\}$$

とおいた. D の φ よる像 $\varphi(D)$ は,

$$\varphi(D) = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^k = z = 0\}$$

である.

Remark

(1) $k=2m$ のとき $\varphi(D)=\varphi(D_+)\cup\varphi(D_-)$ と既約分解される.

このとき, 写像 $\varphi|_{D_+}:D_+\longrightarrow\varphi(D_+)$ と $\varphi|_{D_-}:D_-\longrightarrow\varphi(D_-)$ はともに $2:1$ である.

(2) $k=2m+1$ のとき, $\varphi(D)$ は既約である. 写像 $\varphi|D_+:D_+\longrightarrow\varphi(D)$ と $\varphi|D_-:D_-\longrightarrow\varphi(D)$ は $1:1$ である

曲面 $S=\mathrm{Im}(\varphi)\subset X$ は,

$$S=\{(x,y,z)\mid x^4y+2x^2y^{k+1}+y^{2k+1}-z^2\}$$

で与えられる. 定義多項式 f は, weight vector $\frac{1}{2(2k+1)}(k,2,2k+1)$ に関し, weighted homogeneous である.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4xy(x^2+y^k),\ \frac{\partial f}{\partial y}=(x^2+(2k+1)y^k)(x^2+y^k)$$

より, 集合 $\{y\}$ は, イデアル $J=(f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$ の極大独立集合であることが分かる

Step 0 f の s-parametric annihilator:を求める

$$E=2(2k+1)s-kx\frac{\partial}{\partial x}-2y\frac{\partial}{\partial y}-(2k+1)z\frac{\partial}{\partial z},\ B=(x^2+(2k+1)y^k)\frac{\partial}{\partial x}-4xy\frac{\partial}{\partial y}$$

と A_1,A_2 を得る. 偏微分作用素 A_1,A_2 は, イデアル $D[s](f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$ に属すので以下の計算には必要ないので省略した.

Remark 偏微分作用素 B は, 次を満たす

$$(x^2+y^k)B=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

Step 1 $\varphi(D)$ 上の解析

$D[s](x^2+y^k,z)$ を法とすると

$$B\cong 2ky^k\frac{\partial}{\partial x}-4xy\frac{\partial}{\partial y}-2x\ \ \mathrm{mod}\ D[s](x^2+y^k)$$

を得る. B が定める偏微分方程式を解くことで local cohomology 解

(i) $k=2m$ のとき, $y^{-\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{c}1\\(x^2+y^{2m})(z)\end{array}\right],(s=-1)$: monodromy

(ii) $k=2m+1$, $y^{-(m+1)}\left[\begin{array}{c}x\\(x^2+y^{2m+1})(z)\end{array}\right],(s=-1)$: trivial monodromy

を得る. ただし, $\{(x,y,z)\mid x-y^m=z=0\}\backslash\{(0,0,0)\}$ 上では

$$\left[\begin{array}{c}1\\(x^2+y^{2m})(z)\end{array}\right]=\frac{1}{x+y^m}\left[\begin{array}{c}1\\(x-y^m)(z)\end{array}\right]$$

と解釈している. $\{(x,y,z)\mid x+y^m=z=0\}\backslash\{(0,0,0)\}$ 上でも同様に解釈する.

s の値はオイラー作用素, あるいは local cohomology 解の weighted degree から求まる.

k が偶数のとき, local cohomology 解は非自明な monodromy 構造をもっており, 多価解である. k が奇数のときは, 一価である.

$k=2,3,4,5$ のときの, 原点に台を持つホロノミー D-加群の定める reduced b-関数の因子を以下に与えておく

map germ B_2

$(2s+3)(10s+9)(10s+11)(10s+13)(10s+17)$

map germ B_3

$(s+1)(2s+3)(7s+6)(7s+8)(7s+9)(7s+10)(7s+11)(7s+12)$

map germ B_4

$(2s+3)((6s+5)(6s+7)(18s+17)(18s+19)(18s+23)(18s+25)(18s+29)(18s+31)$

map germ B_5

$(s+1)(2s+3)(11s+9)(11s+10)(11s+12)(11s+13)(11s+14)(11s+15)(11s+16)$
$(11s+17)(11s+18)(11s+19)$

5 map germ C_k

この節では, map germ $C_k, k=2,3,\dots$ の像集合の reduced b-関数に付随するホロノミー D-加群の構造を調べる. Map germ C_k は, 次で与えられる

$$C_k: \ (x,y,z)=\varphi(u,v)=(u,v^2,uv^3+u^kv)$$

集合 $D=\overline{\{(u,v)\mid \exists(u',v')\neq(u,v)\ s.t.\ \varphi(u,v)=\varphi(u',v')\}}$ は, $D=D_0\cup D_1$ とあらわされる. ここで

$D_0=\{(u,v)\mid u=0\}, D_1=\{(u,v)\mid u^{k-1}+v^2=0\}$

である. ただし, D_1 は, k が奇数 $k=2m+1$ のときさらに $D_1=D_{1,+}\cup D_{1,-}$ と既約分解される.

D_0,D_1 の φ による像は, それぞれ

$\varphi(D_0)=\{(0,y,0)\mid y\in\mathbb{C}\}, \varphi(D_1)=\{(x,y,0)\mid x^{k-1}+y=0\}$

で与えられる

曲面 S は

$S=\{(x,y,z)\mid x^{2k}y+2x^{k+1}y^2+x^2y^3-z^2=0\}$

で与えられる. 定義多項式 f は weight vector $\frac{1}{6k-2}(2,2k-2,3k-1)$ に関し, weighted homogeneous である.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(y^2+kx^{k-1}y)x(y+x^{k-1}), \frac{\partial f}{\partial y}=(3xy+kx^k)x(y+x^{k-1})$$

より, 集合 $\{x\}$ はイデアル J の極大独立集合であることがわかる.

$\mathrm{Sing}(S)=\varphi(D)=\{(x,y,z)\mid x=z=0\}\cup\{(x,y,z)\mid y+x^{k-1}=z=0\}$

である.

Step 0 f の s-parametric annihilator $Ann_{D[s]}(f^s)$

$$E=(6k-2)s-2x\frac{\partial}{\partial x}-(2k-2)y\frac{\partial}{\partial y}-(3k-1)\frac{\partial}{\partial z},\ B=-(3xy+x^k)\frac{\partial}{\partial x}+2(y^2+kx^{k-1}y)\frac{\partial}{\partial y}$$

と

$$A_1=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x},\ A_2=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. A_1,A_2 は以下の計算には必要ないことが分かる.

Remark

偏微分作用素 B は, $B=-(3xy+x^k)T_1+2(y^2+kx^{k-1}y)T_2$, $(x^{k+1}+y)B=-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}$ を満たす.

Step 1 $\varphi(D_0)$ および $\varphi(D_1)$ 上の解析

(1) $\varphi(D_0)=\{(0,y,0)\mid y\in\mathbb{C}\}$ 上での解析

未知函数 $h(x)$ を用いて $\eta=\begin{bmatrix} h(y) \\ xz \end{bmatrix}$ とおく. 偏微分作用素 B は $D[s](x,z)$ を法として

$$B\cong y(2y\tfrac{\partial}{\partial y}+3) \bmod D[s](x,z),$$

と表せる.. 微分方程式 $B\eta=0$ をとくことで, 次を得る

$$\eta=y^{-\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ xz \end{bmatrix}, (s=-1):\ \ k=1,2,3,\cdots$$

(2) $\varphi(D_1)=\{(x,y,0)\mid x^{k-1}+y=0\}$ 上での解析

未知函数 $h(x)$ を用いて $\eta=\begin{bmatrix} h(x) \\ (x^{k-1}+y)z \end{bmatrix}$ とおく. 偏微分作用素 B は法 $D[s](x^{k-1},z)$ の下で

$$B\cong 2x^k\frac{\partial}{\partial x}-2(k-1)x^{2k-2}\frac{\partial}{\partial y}+(k+1)x^{k-1}\ \ \bmod D[s](x^{k-1}+y,z)$$

と表せる. 微分方程式 $B\eta=0$ を解くことで

$$\eta=x^{-\frac{k+1}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ (x^{k-1}+y)z \end{bmatrix}, (s=-1)$$

を得る. この local cohomology 解は, k が偶数のとき, 非自明な monodromy 構造を持つ多価解であるが, k が奇数のときは, 一価である.

孤立成分上の local cohomology 解が非自明な monodromy 構造をもつか否かは, map germ φ の複雑さを反映していると思われる. ここで, 2017 年の Otoniel Nogueira da Silva の博士論文 [18] にある概念を思い出そう. 以下は [18] からの抜粋である.

Seja $\varphi:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^3$: um germe de applicacão finitamente determinado e considere a curva de pontos duplos D de φ. A restricão $\varphi|_D: D\longrightarrow\mathbb{C}^3$ é uma aplicacão genericamente 2-a-1

Seja D_j uma componente irredutível de D e considere a restrição $\varphi|_{D_j}: D_j\longrightarrow\mathbb{C}^3$. Observamos que existem dois tipos distintos de componentes irredutíveis D_j de D em relação de φ ao conjunto D_j.

Caso (a): A restrição $\varphi|_{D_j}: D_j\longrightarrow\mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 1-a-1. Nesse caso, existe uma outra componente irredutível D_i com $i\neq j$ tal que $\varphi(D_i)=\varphi(D_j)$ e a restrição de φ a D_i também é genericamente 1-a-1.

Caso (b): A restrição $\varphi|_{D_j}: D_j\longrightarrow\mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 2-a-1.

Vamos dar agora a seguinte definição:

Definicão([18])

(a) Se a restricão $\varphi|_{D_j}$ é uma aplicacão genericamente 1-a-1, dizemos que D_j é uma componente de identificacão de D

(b) Se a restricão $\varphi|_{D_j}$ é uma aplicacão genericamente 2-a-1, dizemos que D_j é uma componente de dobra de D

さて, map germ C_k では, k が奇数のとき, $D_1 = D_{1,+} \cup D_{1,-}$ と既約分解され, $\varphi|_{D_{1,+}}, \varphi|_{D_{1,-}}$ は componente de identificacão de D_1 である. このとき, $\varphi(D_1)$ 上の local cohomology 解は, 一価であり, monodromy 構造は自明である. いままで計算した map germ S_k, B_k でも状況は同じである.

$k = 2,3,4,5$ の場合に, (Reduced b-関数の根に付随する) ホロノミー D-加群で原点に台をもつものに対する b-関数の因子を以下に与える.

map germ C_2

$$(10s+9)(10s+11)(10s+13)(10s+15(10s+17)$$

map germ C_3

$$(s+1)(8s+7)(8s+9)(8s+10)(8s+11)(8s+13)(8s+14)$$

map germ C_4

$$(22s+19)(22s+21)(22s+23)(22s+25)(22s+27)(22s+29)(22s+31)(22s+33)$$
$$(22s+35)(22s+37)(22s+39)$$

map germ C_5

$$(s+1)(14s+12)(14s+13)(14s+15)(14s+16)(14s+17)(14s+18)(14s+19)$$
$$(14s+20)(14s+22)(14s+23)(14s+24)(14s+25)$$

6 map germ F_4

この節では, map germ F_4 の像集合の reduced b-関数に付随するホロノミー D-加群の構造を調べる. F_4 は次で与えられる.

$$F_4\colon\ (x,y,z) = \varphi(u,v) = (u, v^2, u^3v + v^5)$$

D および $\varphi(D)$ は

$$D = \{(u,v) \mid u^3 + v^4 = 0\},\ \ \varphi(D) = \{(x,y,0) \mid x^3 + y^2 = 0\}$$

である. 曲面 $S = \mathrm{Im}(\varphi)$ の定義多項式 f は

$$f(x,y,z) = x^6y + 2x^3y^3 + y^5 - z^2$$

で与えられる.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y(x^3+y^2), \frac{\partial f}{\partial y} = (x^3+5y^2)(x^3+y^2)$$

より, $\mathrm{Sing}(S) = \varphi(D)$ を得る.

f の s-parametric annihilator$Ann_{D[s]}(f^s)$ を求めると

$$E = 30s - 4x\frac{\partial}{\partial x} - 6y\frac{\partial}{\partial y} - 15z\frac{\partial}{\partial z},\ B = (x^3+5y^2)\frac{\partial}{\partial x} - 6x^2y\frac{\partial}{\partial y}$$

と

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x},\ A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. A_1, A_2 は, local cohomology 解の計算には必要ない.

$D[s](x^3+y^2,z)$ を法とした計算で

$$B \cong -4x^3\frac{\partial}{\partial x} - 6x^2y\frac{\partial}{\partial y} - 15x^2, \text{ mod } D[s](x^3+y^2,z),$$

を得る. $\varphi(D)$ 上で微分方程式を解くことで,local cohomology 解

$$\eta = y^{-\frac{1}{2}}[\ \frac{1}{(x^3+y^2)(z)}\ ]$$

を得る, s の値は, $s=-1$ である.

原点に台をもつホロノミー D-加群に付随する reduced b-関数の因子は次で与えられる

$$(2s+3)(30s+25)(30s+29)(30s+31)(30s+35)(30s+37)(30s+41)(30s+43)$$
$$(30s+47)(30s+49)(30s+53)$$

参 考 文 献

[1] M. A. Binyamin, K. Mehmood and G. Pfister, On Monds classification of simple map germs from C^2 to C^3, C. R. Acad. Bulg. Sci. **74** (2021), 1109-1119.

[2] H. Biosca, J. Briancon, Ph. Maisonobe et H. Maynadier, Espaces conormaux relatifs II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **34** (1998), 123-134.

[3] J. Briançon et Ph. Maisonobe, Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes, prépublication, Univ. Nice-Sophia Antipolis **650** (2002).

[4] A. G. Flores and B. Teissier, Local polar varieties in the geometric study of singularities, Ann. Fa. Sci. Toulouse Math. **27** (2018), 679-775.

[5] T. Gaffney, Polar multiplicities and equisingularity of map germs, Topology **32** (1993), 185-223.

[6] T. Gaffney and D. Massey, Trends in equisingularity theory, in Singularity Theoory, London Math. Soc. Lecture Notes Series **263** (1999), 207-248.

[7] V. H. Jorge Pérez and M. J. Saia, Euler obstruction, polar multiplicities and equisingularity of map germs in $O(n,p), n<p$, International J. of Math. **17** (2006), 887-903.

[8] 柏原正樹, b-函数と超曲面の特異性, 京都大学数理解析研究所講究録, **225** (1975), 16-53.

[9] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined system of linear differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974–1975) 563–579.

[10] M. Kashiwara, b-functions and holonomic systems,: rationalityof roots of b-functions, Invent. math. **38** (1976), 33-53.

[11] M. Kashiwara, Systems of Microdifferential Equations, Birkhäuser, 1983.

[12] D. Mond, Some remarks on the geometry and classification of germs of maps from surfaces to 3-space, Topology **26** (1987), 361-383.

[13] D. Mond, The number of vanishing cycles for a quasihomogeneous mappings from C^2 to C^3, Quart. J. Math. **42** (1991), 335-345.

[14] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions, Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM (2016), 349–356.

[15] K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in PBW algebra, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules, J. Symbolic Computation **89** (2018), 146–170.

[16] K. Nabeshima and S. Tajima, Effective algorithm for computing Noetherian representations of zero-dimensional ideals, Applicable Algebra in Engineering, Computation and Computing **33** (2022), 867-899.

[17] K. Nabeshima and S. Tajima, Effective algorithm for computing Noetherian operators of positive dimensional ideals, Lecture Notes in Computer Science **14139**, Springer (2023), 272-291.

[18] O. Nogueira. da Silva, Superficies com singularidades não isoladas, Tese, USP-São Carlos 2017..

[19] 田島慎一, D. Siersma の非孤立特異点に付随する D-加群と Poincaré-Birkhoff-Witt 代数, 京都大学数理解析研究所講究録,**2054** (2018), 126–133.

[20] S. Tajima, Local cohomology solutions of holonomic D-modules associated with non-isolated hypersurface singularities, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **75** (2019), 61–72.

[21] 田島慎一, Local cohomology に対するネター作用素とホロノミー D-加群, 京都大学数理解析研究所講究録, **2280** (2024), 176-185.

[22] S. Tajima, Holonomic D-modules and Noetherian differential operators for loca cohomology classes associated to primary ideals, 第 45 回可換環論シンポジウム報告集, 2024.

[23] 田島慎一, Local cohomology に対するネター作用素とホロノミー D-加群 II, 京都大学数理解析研究所講究録, 投稿済.

[24] S. Tajima, K. Nabeshima, K. Ohara and Y. Umeta, Computing holonomic D-modules associated to a family of non-isolated hypersurface singularities via comprehensive Gröbner systems of PBW algebra, Mathematics in Computer Science **17** (2023), 315-337.

[25] S. Tajima and Y. Umeta, Computing structure of holonomic D-modules associated with a simple line singularity, RIMS Kôkyûroku Bessatsu. **57** (2016), 125–140.

[26] S. Tajima and Y. Umeta, Holonomic D-modules associated with a simple line singularity and the vertical monodromy, Funkcialaj Ekvacioj, **64** (2021), 17–48.

[27] S. Tajima and Y. Umeta, Algebraic analysis of Siersma's non-isolated hypersurface singularities, Hokkaido Math. Journal **51** (2022), 117–151.

[28] S. Tajima and Y. Umeta, Holonomic D-modules and Noetherian differential operators associated to a primary ideal, http://sites.google.com/view/pmaaa2024/home, 2024.

[29] S. Tajima, Y. Umeta and K. Nabeshima, Noetherian operators for local cohomology classes and holonomic D-modules associated with non-isolated hypersurface singularities, 投稿中.

[30] U. Walther, Survey on the D-module f^s, in Commutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry I, MSRI Pub. **67** 2015.

[31] T. Yano, On the theory of b-functions, Pub. Res. Inst. Math. Sci. **14** (1978) 111–202.