

Constructing real algebraic functions explicitly and their Reeb graphs

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 北澤 直樹
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University Naoki Kitazawa
n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp / naokitazawa.formath@gmail.com
<https://naokitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html>

本内容は、京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業の一環として実施された研究集会「可微分写像の特異点論とその応用」(<https://www.fit.ac.jp/fukunaga/conf/sing202412.html>)の著者自身による「同題名」の講演に関連した報告である。内容は一部(Remark 1 等)を除きほとんど独立であるが、執筆の形式が一部昨年度同事業の一環として実施された研究集会「特異点論の展開」(<https://www2.akita-nct.ac.jp/kasedou/workshop/rims2023/index.html>)の著者の講演に関連した報告([6])と全く同じになっている。

1 導入。

以下、講演内容を特に「自身作成の自身の用いたスライド」(非公開: 以下Ybf「用いたスライド」)をもとに時に「自身作成」の「用いたスライド」内の図や文言等も拝借しながら報告させて頂く。なお、いくつかの定理については証明や証明の一部を紹介する。議論を省略している部分がある他、著者の力量不足で説明不足と考えられてしまう部分もあろう。詳細は引用している論文やプレプリントを参考にして頂くか、状況次第では大変恐縮であるが読者に練習問題的に行間を埋めて頂ければ幸いである。また(著者の至らなから犯してしまった)間違い等は教えて下されれば幸いである。

可微分(滑らかな)関数の Reeb グラフとは、関数の各点の逆像の連結成分のなす集合で自然な定義域多様体の商空間として定義される。[18] 時点で既に、所謂 Morse 関数の理論の中で登場している、多様体をコンパクトに捉える道具である。なお、後で触れる話、“グラフ”といいながらグラフの構造を有するかどうかは簡単な問題ではない([19, 20])。尤も、所謂 Morse 関数や少し一般化して Morse-Bott 関数等、ある程度扱いやすい関数であればグラフになる。Figure 1 で早速例を挙げる。

今回の講演の中核をなす問いは、

Problem 1. 逆にグラフに対してそれを Reeb グラフとするような性質の良い実代数的な関数は得られるか?



Figure 1: 次元 $k \geq 2$ の自然に $k+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{k+1}$ に埋め込まれた球面の高さから定まる関数の Reeb グラフ(所謂 k 次元単位球面 S^k の射影 $\pi_{k+1,1}|_{S^k}$: 後ほど記号等説明)。トーラス(円周の直積である曲面)の 3 次元ユークリッド空間での自然な高さから定まる関数の Reeb グラフ。

というものであった。可微分関数で考えるのですら古くて新しい問題で、[21] による閉曲面の上の局所的に初等的な多項式関数で表せるような関数の構成が最初であった。本稿では、まず”可微分”の文脈での関連研究含著者の研究について紹介し、著者が初めて考えた本問いについて、研究成果とともに紹介する。

2 多様体・滑らかな写像・特異点に関する基本的用語や記法。

- $\mathbb{R}^k$: k 次元 Euclid 空間 ($\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$)。
最も単純な k 次元の滑らかな多様体で所謂標準的 Euclid 計量のはいった Riemann 多様体でもある。 非特異な実代数的多様体でもある (k 次元 実アフィン空間)。
- $\|p\|$: $p \in \mathbb{R}^k$ と原点 $0 \in \mathbb{R}^k$ の間の距離。
- $S^k (D^{k+1}) := \{p \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \|x\| = (\text{resp. } \leq) 1\}$: k 次元単位球面 (resp. $k+1$ 次元単位球体)。
- X^l : l 次元の可微分多様体(滑らかな多様体) X (“ X^l ” の l は次元)。
- 特に指示のない限り、実代数的多様体は、実多項式写像の零点集合の有限個の連結成分の非交和とした 非特異とする。 非特異な多様体は”陰関数定理”で定義する(“零点集合を定める実多項式写像”に対し定理を適用)。 S^k が最も簡単なコンパクト非特異実代数的多様体の例。
- $\pi_{k,k'} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ ($k > k' \geq 1$) を $\pi_{k,k'}(x_1, x_2) := x_1$ ($(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k-k'}$) で定義: 所謂自然な射影(S^{k-1} への制限が単位球面の射影)。
- $f : M^m \rightarrow N^n$ を滑らかな多様体の間の滑らかな写像として、 $p \in M^m$ で(微分 df_p の階数) $< \min\{m, n\}$ が成り立つとき p は f の特異点であるという($n=1$ のとき臨界点ともいう)。 $f(p)$ を f の特異値という($n=1$ のときは臨界値ともいう)。 $S(f)$ で f の特異点全体の集合を表す。今後この多様体の間の滑らかな写像に関する記法は多く用い、特に指示等な

い限り $m \geq n \geq 1$ で M^m は連結で境界のない多様体(Theorem 4 ではコンパクトでなくてもよい等一部を除き基本閉多様体)とする。

- 関数 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ が滑らかであるとする。 f の各臨界点 p で、 $x = 0 \in \mathbb{R}^m$ と同一視して適切な局所座標と適切な整数 $0 \leq i(p) \leq m$ で $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^{m-i(p)} x_j^2 - \sum_{j=1}^{i(p)} x_{m-i(p)+j}^2 + f(p)$ と表せるとき(つまり臨界点が非退化であるとき)、 f は Morse 関数であるという。 Morse 関数において、 $i(p)$ は値域の値の大小を考慮すると一意である。 後で少しだけ出る special generic 写像は、各臨界点 p について、 $i(p) = 0, m$ の場合を自然に高次元化したものとなる。 より一般に $i(p)$ の値を制限しないと折り目写像になる(今回は扱わない)。
- 二つの滑らかな多様体が微分同相であるとは、二つの多様体の間の微分同相写像、つまり特異点をもたないような同相写像が存在することを意味する。滑らかな多様体の集まりにおける同値類が自然に定義される: 滑らかな多様体の 微分同相型である。
- 多様体の連結和や境界連結和は滑らかなカテゴリで考える。
- 実代数的写像は、実代数的多様体 M の外部の空間 $\mathbb{R}^k \supset M$ への自然な埋め込みと自然な射影 $\pi_{k,k'} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ の合成で表せる写像とする。

本稿に関連した、Morse 関数と多様体の微分位相幾何に関する基本的な議論について、[17] を参照するとよい。Morse 関数の高次元版に関連した特異点論に関する教科書として、[3] を挙げる。実代数幾何については [13, 14] を挙げる。

3 滑らかな関数の Reeb グラフ。

滑らかな関数 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ で、 M の上の同値関係 $x_1 \sim_f x_2$ を x_1 と x_2 がある 1 点の逆像 $f^{-1}(y)$ の同じ連結成分にあることとして定められる。商空間 $W_f := M/\sim_f$ を考え、 V_f を f の臨界点を含むような連結成分を表すような点全体の集合とする。 $q_f : M \rightarrow W_f$ で商写像を表す。 $f = \bar{f} \circ q_f$ となる連続関数(区分的に滑らかな関数) $\bar{f}$ が一意に存在する。

Theorem 1 ([19]). M が閉多様体で滑らかな関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ について $f(S(f))$ が有限集合の時、の時 W_f は V_f を頂点集合としたグラフである。 W_f を f の Reeb グラフと呼ぶ(Reeb グラフ、勿論 [19] での定義が最初ではない: 簡単そうで難しい”Reeb グラフに本当にグラフの構造が入るか?”という問題に関して初めてやや一般的な状況で肯定的な解答が得られた)。

グラフを与え、滑らかな関数を、Reeb グラフが与えられたグラフと同型なものを構成する研究について、先述の [21] に続くものに以下がある。

- 任意の有限グラフについて Sharko の結果の拡張([15]: Sharko の場合グラフに制限があった)。
- Morse 関数での(適切なクラスのグラフからの)構成([16])。

- 臨界点をもたない 1 点の逆像の $(m-1)$ 次元の正則で境界のない)部分多様体まで前もって指定しての Morse 関数 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ や自然に一般化されたクラスの滑らかな関数の構成([4, 7])。

一つ、Morse 関数の復元に関する [16] の結果のひとつそして逆像を考慮し拡張した [4, 7] の結果の一部を紹介する: 定義域多様体が 3 次元で向き付け可能なケースが [4] でありまた同論文では Morse-Bott 関数を少し一般化したクラスの関数を考え構成する等もしている。

Theorem 2 ([16] (2018), [4, 7] (2019–)). G を連結な有限グラフとし、 $c_G : G \rightarrow \mathbb{R}$ を連続で各辺上で単射であるような関数で、極値をとる頂点の指数は 1 であるようなものとする。

G の各辺 e に対し球面 S^{m-1} または連結和 $\sharp_{j=1}^l (S^{k_j} \times S^{m-k_j-1})$ ($1 \leq k_j \leq m-2$) の微分同相型 $l(e)$ を、 e が指数 1 の頂点を含むとき S^{m-1} の微分同相型であるように対応させる。このとき、 m 次元連結閉多様体 M があり、そして Reeb グラフ W_f が G と同型で自然に同一視でき、 G の辺 e に対応する W_f の辺(の内部)上の点 p の逆像 $q_f^{-1}(p)$ の微分同相型が $l(e)$ であるような Morse 関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が得られる。

証明は $l(e)$ が常に球面の微分同相型の場合 [16]、一般の場合 [4, 7] 等参照のこと。頂点について、対応する Morse 関数を局所的に構成し、辺について対応する区間上の滑らかな自明束を考え、貼り合わせるという流れである。Morse 関数の臨界点と所謂”ハンドル”が対応するという。Morse 関数に関する基本的な事実がポイントである。なお、[7] によれば、 $l(e)$ が S^{m-n} もしくは $\sharp_{j=1}^l (S^{k_j} \times S^{m-k_j-1})$ ($1 \leq k_j \leq m-2$) の微分同相型という部分、より真に広く、most fundamental handlebody という m 次元の滑らかな連結コンパクト多様体の境界になる連結閉多様体のクラスにまで拡張される: $m=4$ の場合、3 次元向き付け可能連結閉多様体(の微分同相型)なら問題ない。

4 与えられたグラフを Reeb グラフとするような実代数的な関数の構成。

今回の主題に入る。グラフからの可微分な関数の再構成を考えてきた中、実代数的な関数を構成するというものは(知る限り)なかった。おそらく微分トポロジーの文脈の問題であった中、自然なことであろう。さて、初めての関連結果 [5] を得るきっかけとなった研究 [1] を紹介しながら、著者の関連結果を紹介する。

Definition 1 ([1, 22, 23] ($n=2$) [5] (一般の自然数 $n \geq 2$)). $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) を有界な連結開集合で閉包 $\overline{D}$ の境界 $\overline{D} - D$ が互いに交わらない $l > 0$ 個の、整数 $1 \leq j \leq l$ で添え字付けられた非特異な実代数的超曲面 S_j の非交和であるとする。 S_j は多項式 f_j の零点集合の連結成分いくつかの非交和で、 $\overline{D}$ のある開近傍 U_D があり $\{x \in U_D \mid f_j(x) = 0\} = S_j$ と $D = U_D \cap \bigcap_j \{f_j(x) > 0\}$ が成立するとする。このとき D を代数的領域であるという。このとき以下のグラフが定まる(グラフになることは [19, 20] や Theorem 1 や関連議論の帰結

である他考えているケースではもう少し容易に直感もきく形でチェックできる)。

1. $\pi_{n,1}|_{\overline{D}}$ について Reeb グラフの定義同様同じ点の逆像の同じ連結成分にあるときかつその時に限り同値であるという同値関係が $\overline{D}$ に定義されるが、位相空間としてはこの同値関係で得られる $\overline{D}$ の商空間。
2. $\pi_{n,1}|_{\overline{D}-D}$ の臨界点を含むような連結成分(に対応するような点)が頂点。

得られるグラフを D の Poincaré-Reeb グラフ と呼ぶ。

著者の関連した結果を述べる。

Theorem 3 ([5]). Algebraic domain $D \subset \mathbb{R}^n$ の Poincaré-Reeb graph となるものと同型なグラフは適切な実代数的な関数の Reeb グラフと同型になる。

Proof. $m \geq n$ となる任意の整数について

$$M := \{(x, y) = (x, y_1, \dots, y_{m-n+1}) \in \overline{D} \times \mathbb{R}^{m-n+1} \mid \prod_j (f_j(x)) - \sum_{j'=1}^{m-n+1} y_{j'}^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

とする。陰関数定理等を用い M がコンパクトで連結な実代数的多様体であることを示す。

まず、 $U_D - \overline{D}$ の $\pi_{m+1,n}$ による逆像は、一連の仮定から、 M と交わらない。結果 M は $\prod_j (f_j(x)) - \sum_{j'=1}^{m-n+1} y_{j'}^2$ の零点集合の連結成分となるといえる。なお、原論文 [5] 出版内定時点では簡単のため、相当強く S_j はある多項式の零点集合でしかも連結と仮定していた: 例えば決まった半径の円周であることを想定している(上、具体性の高いものを扱う場合現実それでもある程度足りると考える)。Remark 1 で関連した肯定的な説明がある。

後は、陰関数定理を M の各点に着目して用いる。

Case 1 $p = (p_1, p_2) \in D \times \mathbb{R}^{m-n+1} \cap M$ であるような点。

このような点においては、式表示から非特異であるとわかる。

Case 2 $p = (p_1, p_2) \in (\overline{D} - D) \times \mathbb{R}^{m-n+1} \cap M$ であるような点。

このような点において、関数 $\prod_j (f_j(x)) - \sum_{j'=1}^{m-n+1} y_{j'}^2$ をある変数 $x_{j''}$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) で微分する。このとき、ある一意に定まる多項式 f_{j_0} を $x_{j''}$ で微分した関数の p での値と残りの多項式 f_j の p での値の積が 0 にならず残る。 f_{j_0} を $x_{j''}$ で微分した関数の p での値は、 S_j が非特異であることから $x_{j''}$ を上手く選んでいれば 0 にならず、後者は f_j に関する仮定からわかる。

Cases 1・2 より各点における非特異性が示せた。得たい関数は $\pi_{m+1,1}|_M$ で定義して得られる。 $\pi_{m+1,n}|_M$ は $\overline{D}$ への全射な実代数的写像である。例えば $\overline{D} = D^n$ のときは単位球面の射影 $\pi_{m+1,n}$ を復元できるような構成をしている。勿論 $\overline{D}$ がコンパクトであるという仮定や式の形よりできる M はコンパクトでもある。定理は証明された。□

Theorem 3 に関連していくつか例を紹介する。

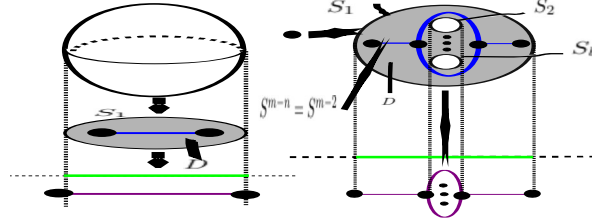


Figure 2: $\pi_{m+1,n}|_{S^m}$ (像は $D^n \subset \mathbb{R}^n$) とある平面の領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ の閉包への自然な実代数的写像の復元。後者の写像にて、いくつかの点の逆像の情報も矢印を使い記した。

Example 1. Figure 2 に例がある。紫のグラフと同型な(青の)グラフを Poincaré-Reeb グラフとする実代数的領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ を探し、 D の閉包 $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$ を像とする実代数的写像を復元している。緑の線分は Theorem 3 でできる関数の像を表現したつもりである。

Example 2 ([1]). G を連結な有限グラフとし、 $c_G : G \rightarrow \mathbb{R}$ を区分的に滑らかで各辺上で単射であるような関数で、以下を満たすとする。

1. c_G が極値をとるような頂点の指数は 1 である。
2. c_G が極値をとらないような頂点の指数は 3 である。
3. 各頂点で c_G の値は異なる。
4. ある区分的に滑らかな埋め込み $\tilde{c}_G : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ があり $c_G = \pi_{2,1} \circ \tilde{c}_G$ で表せる。

このとき $\tilde{c}_G(G)$ を自然に Poincaré-Reeb graph とするような代数的領域 $D_G \subset \mathbb{R}^2$ が得られる([1])。証明のポイントは、いわゆる実代数のカテゴリーでの”近似定理”である([13, 14] 等も参照のこと)。そして、Theorem 3 が適用できる。

Remark 1. 実は Example 2 に関し、[9] で閉包 $\overline{D_G}$ の境界 $\overline{D_G} - D_G$ が”結局零点集合にできること”を指摘している(結果として Theorem 3 を適用した際の定義域多様体は得られた多項式関数の零点集合となる)。同プレプリントは、オリジナルな内容として、[6] 等にも関連すること、Theorem 3、可微分なカテゴリーではいわゆる単位球面の射影の自然な一般化である special generic 写像の領域の閉包 $\overline{D}$ への全射としての構成、Theorem 3 の写像の構成についての局所的な型の一般化を見出している関連議論等も含む。

次に、Theorem 3 における領域の閉包 $\overline{D}$ への全射な実代数的写像の構成の部分について、[8] で拡張に成功した。

Theorem 4 ([8]). $D \subset \mathbb{R}^2$ を連結開集合で閉包 $\overline{D}$ (はコンパクトでなくてもよくかつそれ)の境界 $\overline{D} - D$ は $l > 0$ 以下の自然数 $1 \leq j \leq l$ で添字付けられた l 個の互いに異なる非特異な実代数的超曲面 S_j の和集合であるとする。さらに以下を仮定する。

1. S_j は多項式 f_j の零点集合の連結成分いくつかの非交和で、 $\overline{D}$ のある開近傍 U_D が $\{x \in U_D \mid f_j(x) = 0\} = S_j \cap U_D$ と $D = U_D \cap (\bigcap_j \{x \mid f_j(x) > 0\})$ が成立。
2. 異なる S_{j_1} と S_{j_2} は交わるかもしれないが、交点 $p_{1,2}$ が $\overline{D}$ の点ならば S_{j_1} と S_{j_2} の $p_{1,2}$ における接ベクトルをとって得られる二つのベクトル(のなす集合)で生成されるベクトル空間は、その点での $\mathbb{R}^2$ における接ベクトル空間(所謂横断的に交わるという条件)。
3. $l_2 > 0$ を $l_2 \leq l_1$ である整数とし l_1 以下の自然数全体の集合から l_2 以下の自然数全体の集合への全射 m_{l_1, l_2} で、 $S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \overline{D}$ が空でないとき j_1 と j_2 での値が異なるようなものが与えられている。
4. l_2 以下の自然数全体の集合上の非負の整数を値とする関数 m_{l_2} が与えられている。

この時 $m := n + \sum_{j=1}^{l_2} m_{l_2}(j)$

$$M := \{(x, y) = (x, (y_j)_{j=1}^{l_2}) \in \overline{D} \times \mathbb{R}^{m-n+l_2}$$

$$\mid \prod_{j' \in m_{l_1, l_2}^{-1}(j)} (f_{j'}(x)) - \sum_{j''=1}^{m_{l_2}(j)+1} y_{j, j''}^2 = 0 \quad (1 \leq j \leq l_2)\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

として $f := \pi_{m+l_2, 2}|_M$ は $\overline{D}$ を像とする実代数的写像である($y_j := (y_{j,1}, \dots, y_{j, m_{l_2}(j)+1})$ という表記を活用)。そして $f(S(f)) = \overline{D} - D$ で各点の逆像は空でなければ高々次元 $m-2$ である。

Proof. 陰関数定理を M の各点に着目して用いる前までは、やや複雑になるが、Theorem 3 同様である。詳細は長さ等の都合で省略するが、条件”1.”-”3.”を上手く使って議論できる。

後は、陰関数定理を M の各点に着目して用いる。

Case 1 $p = (p_1, p_2) \in (D \times \mathbb{R}^{m-n+l_2}) \cap M$ であるような点。

このような点においては、式表示から非特異であるとわかる。

Case 2 $p = (p_1, p_2) \in ((\overline{D} - D) \times \mathbb{R}^{m-n+l_2}) \cap M$ で p_1 がちょうど一つの曲線 S_i にあるような点。

このような点において、関数 $\prod_{j' \in m_{l_1, l_2}^{-1}(m_{l_1, l_2}(i))} (f_{j'}(x)) - \sum_{j''=1}^{m_{l_2} \circ m_{l_1, l_2}(i)} y_{m_{l_1, l_2}(i), j''}^2$ を、 $y_{j''', j''}$ という形の変数で微分すると常に 0 になる。一方変数を $x_{j''}$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) の形のものに変える。適当な $x_{j''}$ を選んで微分すると、 $\prod_{j' \in m_{l_1, l_2}^{-1}(m_{l_1, l_2}(i))} (f_{j'}(x))$ の各多項式 $f_{j'}(x)$ の中で一意に定まる多項式 $f_{m_{l_1, l_2}(i), j_0''}$ を $x_{j''}$ で微分した関数の p での値と、同じ”多項式 $f_{j'}(x)$ の集まり”の中の子の残りの多項式 $f_{m_{l_1, l_2}(i), j''}$ の p での値の積が、0 にならず残る。 $f_{m_{l_1, l_2}(i), j_0''}$ を適切に選んだ $x_{j''}$ で微分した関数の p での値は、 S_i が非特異であることから 0 にならず、後者は多項式 f_j に関する仮定からわかる。また、 $i' \neq m_{l_1, l_2}(i)$ であるような整数 $1 \leq i' \leq l_2$ について、

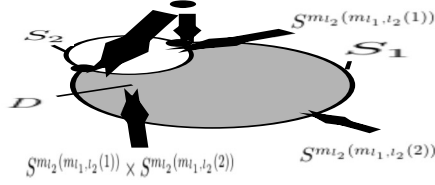


Figure 3: Theorem 4 において $l_1 = l_2 = 2$ (矢印は指している点での逆像の型を示すためのもの)。

$\prod_{j' \in m_{l_1, l_2}^{-1}(i')} (f_{j'}(x)) - \sum_{j''=1}^{m_{l_2}(i')} y_{i', j''}^2$ をいずれかの $y_{i', j''}$ で微分すると、得られる関数は p で 0 でないと同時に、 $y_{i'', j''}$ ($i'' \neq i'$) という形の変数で微分すると得られる関数は p では常に 0 になる。

考えている多項式写像の微分(と変数から自然に定まる行列所謂 Jacobi 行列)の階数を考慮するに、 p においては、非特異であるとわかる。

Case 3 $p = (p_1, p_2) \in ((\bar{D} - D) \times \mathbb{R}^{m-n+l_2}) \cap M$ で p_1 がちょうど二つの曲線 S_{i_1} と S_{i_2} ($i_1 \neq i_2$) にあるような点。

このような点において、関数 $\prod_{j' \in m_{l_1, l_2}^{-1}(m_{l_1, l_2}(i_k))} (f_{j'}(x)) - \sum_{j''=1}^{m_{l_2}(i_k)} y_{m_{l_1, l_2}(i_k), j''}^2$ を、 $y_{j'', j''}$ という形の変数で微分すると常に 0 になる($i_k = i_1, i_2$)。一方変数を $x_{j''}$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) の形のものに変える。適当な $x_{j''}$ を選んで微分すると、 $\prod_{j' \in m_{l_1, l_2}^{-1}(m_{l_1, l_2}(i))} (f_{j'}(x))$ の各多項式 $f_{j'}(x)$ の中で一意に定まる多項式 $f_{m_{l_1, l_2}(i_k), j_k, 0''}$ を $x_{j''}$ で微分した関数の p での値と、同じ”多項式 $f_{j'}(x)$ の集まり”の中の残りの多項式 $f_{m_{l_1, l_2}(i), j''}$ の p での値の積が、0 にならず残る。 $f_{m_{l_1, l_2}(i_k), j_k, 0''}$ を適切に選んだ $x_{j''}$ で微分した関数の p での値は、 S_{i_k} が非特異であることから 0 にならず、後者は多項式 f_j に関する仮定からわかる。また $i' \notin \{m_{l_1, l_2}(i_1), m_{l_1, l_2}(i_2)\}$ であるような整数 $1 \leq i' \leq l_2$ について、 $\prod_{j' \in m_{l_1, l_2}^{-1}(i')} (f_{j'}(x)) - \sum_{j''=1}^{m_{l_2}(i')} y_{i', j''}^2$ をいずれかの $y_{i', j''}$ で微分すると、得られる関数は p で 0 でないと同時に、 $y_{i'', j''}$ ($i'' \neq i'$) という形の変数で微分すると得られる関数は p では常に 0 になる。

S_{i_1} と S_{i_2} は p で横断的に交わることを思い出す。

考えている多項式写像の微分(と変数から自然に定まる Jacobi 行列)の階数を考慮するに、 p においては、非特異であるとわかる。

Cases 1・2・3 より各点における非特異性が示せた。定理は Theorem 3 と同様に証明された。□

Figure 3 に Theorem 4 の一例を示す。なお、講演や原プレプリントは n が一般の自然数の場合で定理を考えて記し示している。が、今回は簡単のため $n = 2$ の場合のみの紹介にとどめる。

Remark 2. Theorem 4 の仮定 ”1” において、”用いたスライド”を見直すに、 $\{x \in U_D \mid f_j(x) = 0\} = S_j \cap U_D$ の部分 $\{x \in U_D \mid f_j(x) = 0\} = S_j$ となつ

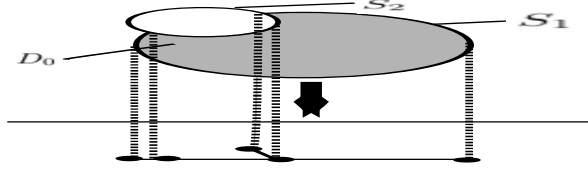


Figure 4: Theorem 5 で $l_{0,1} = l_{0,2} = 2$ の場合: 写像 f_0 の像と Reeb グラフ $W_{f_0,0}$

ており、“誤り”と突き止めた中、この場を借りて謝らせて頂くとともに修正させて頂く。

原プレプリントでは、具体的な状況として、各曲線 S_j が平面内の円周のケースでの実代数的関数の構成について考え、講演でも紹介した。

Theorem 5 ([8]). まず Theorem 4 の仮定で $l_1 := l_{0,1}$ 、 $l_2 := l_{0,2}$ そして各々 S_j ($1 \leq j \leq l_{0,1}$) は適切な半径の円周、 $D := D_0$ で閉包 $\overline{D_0}$ は連結で有界で各 S_j ($1 \leq j \leq l_{0,1}$) と交わるとする。さらに Theorem 4 の状況で $m_{l_2} := m_{l_{0,2}}$ を正値の整数値関数とし($m := m_0 = n + \sum_{j=1}^{l_{0,2}} m_{l_{0,2}}(j)$)と定め、Theorem 4 を適用できそして得られるコンパクト実代数的多様体(この場合実はある多項式写像の零点集合)を、 $M := M_0 \subset \mathbb{R}^{m_0+l_{0,2}}$ として、 $f_0 := \pi_{m_0+l_{0,2},2}|_{M_0}$ 、 $f_{0,0} := \pi_{2,1} \circ f_0$ とする。

このとき、 $f_{0,0}$ の Reeb グラフ $W_{f_{0,0}}$ の任意の辺 e に関して、 $l_1 := l_{0,1}+1$ 、 $l_2 := l_{0,2}+1$ と定め、 $m_{l_{0,1}+1, l_{0,2}+1}$ と $m_{l_{0,2}+1}$ を、制限が前の $m_{l_{0,1}, l_{0,2}}$ と $m_{l_{0,2}}$ に一致するようかつ $m_{l_{0,2}+1}$ は正値の整数値関数であるように定める。このとき適当に $S_{l_{0,1}+1}$ を新たに適切な半径の円周としてとり、 D を D_0 と、 $S_{l_{0,1}+1} \subset \mathbb{R}^2$ の補空間の連結成分で有界でない方のものの共通部分とする。このとき、Theorem 4 を適用できて、 $m := m_0 + m_{l_{0,2}+1}(l_{0,2}+1)$ 次元コンパクト実代数的多様体 $M \subset \mathbb{R}^{m_0+m_{l_{0,2}+1}(l_{0,2}+1)+l_{0,2}+1}$ (ある実多項式写像の零点集合)で以下を満たすようなものが得られる。

1. 閉包 $\overline{D}$ は各 S_j ($1 \leq j \leq l_{0,1}+1$) と交わる。
2. $f_1 := \pi_{m+l_{0,2}+1,2}|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ とし $f_{1,0} := \pi_{2,1} \circ f_1$ とし Reeb-graph $W_{f_{1,0}}$ を考えると、 $W_{f_{1,0}}$ は $W_{f_{0,0}}$ の辺 e の内部に頂点 2 個 v_1 、 v_2 を加えさらにもう 1 個頂点 v_3 を加え v_1 か v_2 いずれかの頂点と v_3 を結ぶような辺を加えてできるグラフと同型である。

証明の主要部分について、実代数的多様体が多項式写像の零点集合というのは、 S_j が円周であることが効いている。辺 e の、商写像 $q_{f_{0,0}} : M_0 \rightarrow W_{f_0}$ に関する逆像の点について $f_0 = \pi_{m_0+l_{0,2},2}|_{M_0}$ の値が $\overline{D} - D$ にあるようなものを選ぶ(値を $p_e \in \overline{D} - D$ とする)。点 p_e を中心として半径の十分小さな円(板)を加えて補集合を新たな有界連結開集合と考え構成を行う。□

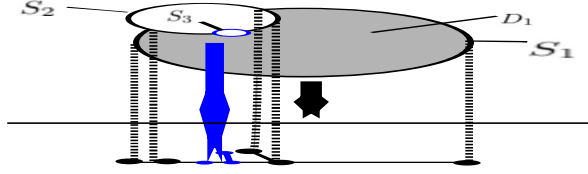


Figure 5: Figure 4 の続きで Theorem 5 で $l_1 = l_2 = l_{0,1} + 1 = l_{0,2} + 1 = 3$ として写像 $f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ の像と Reeb グラフ $W_{f_1,0}$; Reeb グラフ $W_{f_0,0}$ に縮約。

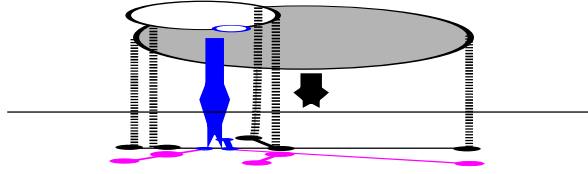


Figure 6: Theorem 5、Figure 4 と Figure 5 の状況で、 $m_{l_2}(3) = 0$ ただし $j = 1, 2$ で $m_{l_2}(j) \neq 0$ の場合: Reeb グラフの変化で $8 > 3$ 個新たな頂点が増えている(元の Reeb グラフに縮約するようなものが得られる)。

一連の結果について、至らず、勉強不足等による誤解もありそうながら述べる。ある特別なクラスに属する実代数関数・写像を、簡単なものから帰納的に、重要な式や大域的性質特に Reeb グラフで簡略化した構造等分かるような形で、具体的・帰納的に得ていけることを意味する(と考える)。例えば計算機とも相性がよい(と著者は考えるような)形で、多く得ていけることを意味すると考える。Problem 1 の解答のごく一部かもしれないが確かに得られた。

Remark 3. Theorem 5 で得られた関数は、一般には所謂 Morse-Bott 関数である: Morse-Bott 関数とは、臨界点の周りで局所的に、臨界点を持たないような滑らかな写像と Morse 関数の合成で表せる関数であり、自然に Morse 関数の拡張となる。関連したことは、基本的な特異点論と初等的な実代数幾何の練習問題として、[8, 9] 等で議論されている。

Remark 4. Theorem 5 で $m_{l_{0,2}+1}$ が正値であることは重要である。仮定を外すと、Theorem 4 を利用して作られる平面への写像の逆像が連結にならない状況が出て来る等する関係で、状況が複雑になる(面白くなる部分でもある: 関連した考察や研究、本格的には未着手である)。Figure 6 で例を挙げる。

5 最近の進展。

5.1 平面への円周の配置と円周で囲まれた有界領域。

今回の研究から自然と同時に意外な流れ、扱った平面の領域と囲む円周の集まりを、平面への円周の配置と円周で囲まれた有界領域の具体的なものと考

えるに至っている。いわゆる”配置”の研究はあらゆる数学にまたがりまたいろいろあり、当然全部を説明することはできず、ごく一部といわれても難しい。(知る限り)自然と同時に全く新しい研究として、良い円周の配置と平面内の円周で囲まれた領域で、今回考えたようなものと関係しそうなクラスを探り幾何的性質や組み合わせ的性質を探る等ということを [10] で始めた。より詳しくは、以下のように帰納的に定まる、円周の集まり S とその円周で囲まれた連結な有界開集合 D_S を考えている。

- 最初に有限個の円周を平面に互いに交わらないように、非交和が連結な有界開集合の閉包の境界になるように、配置する。 S_0 を互いに交わらないような円周の集まりとし連結な有界開集合を D_{S_0} とする。 $S := S_0$ 、 $D_S := D_{S_0}$ とおく。
- (閉包を考えた時)境界 S_j が円周であるような円盤 D_j を新たに配置し、円盤 $D_j \subset \mathbb{R}^2$ の閉包の補空間と連結有界開集合 D_S の交わりを考え、新たに円周の集まりと円周で囲まれた連結有界開集合を作るという操作を繰り返す。 S を新たに S_j を加えた集合とし、 D_S を新たに円盤の補空間ともとの有界な連結開集合の共通部分として定める。ただし連結有界開集合 D_S の方、閉包 $\overline{D_S}$ が新たな S の円周のいずれとも交わっているようにする。また、新たに定めた閉包 $\overline{D_S}$ 上の境界の各点において、新たに定めた S の円は高々 2 個交わっていてまた横断的に交わるようにする。

円周を追加するルールや、ルールのもと領域の形が局所的にどう変化するか調べている。初等的で古くて自然で同時に新しいタイプの研究である(と知る限り認識している)。

[10] が最初のもので、正確には円周を既に与えられた円周どれかの上の点を中心とし半径が十分小さいものを考え追加することを考える。Theorem 5 を元にした操作であり実際 Theorem 5 にないような場合も含めすべてのあり得る点に関する状況を考え、先程の変化を確かめている: 例えば二つの円周の交点、丁度一つの円周に含まれているような点であり円周における小さな近傍への射影 $\pi_{2,1}$ の制限として得られる関数の臨界点になるような点等、本稿で考えないようなケースも考えている)。より詳細には、曲線で囲まれた(連結な)領域の Poincaré-Reeb グラフを調べている: Definition 1 は自然に拡張できるもので、認識する限り、初めて著者がこちらのプレプリントにて登場させた。正確には、ちょうど二つの円周に含まれるような点を含むような 1 点の逆像の連結成分、そして、 $\overline{D} - D$ からそのような点全体の集合を除いてできる集合(、これは滑らかな曲線であるがこの部分)に $\pi_{2,1}$ を制限してできる関数の臨界点を含むような 1 点の逆像の連結成分を頂点とする(グラフになることも説明してきたような理論等からわかる)。[11] は似て異なる内容、本稿では省略する Theorem 5 の同プレプリントで得た似て異なる結果を意識したルールを定め、同様に詳細に調べた。実際似て異なる状況であるということを、具体例も含めて論じた。

5.2 Theorem 3・5 の自然な拡張。

著者のプレプリント [12] の結果を原プレプリントより弱い形だが紹介する。

Theorem 6 ([12]). G を連結な有限グラフで次数 2 の頂点を持たないものとし、 $c_G : G \rightarrow \mathbb{R}$ を区分的に滑らかな各辺上で単射であるような関数で、以下を満たすとする。

1. c_G が極値をとるような頂点の指数は 1 である。
2. ある区分的に滑らかな埋め込み $\tilde{c}_G : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ があり、 $c_G = \pi_{2,1} \circ \tilde{c}_G$ が成り立つ。

このとき十分大きな整数 $m > 2$ について、 G 、 $\tilde{c}_G(G)$ と同相な Reeb グラフ $W_{f_{c_G,0}}$ を有するようなある m 次元コンパクト連結実多様体 M_{c_G} 上の Morse-Bott 関数 $f_{c_G,0} : M_{c_G} \rightarrow \mathbb{R}$ が得られる。

図を含めた詳細は [12] 等を参照のこと。説明が異なる部分、細かい部分の説明の省略等はあるが、本質的な証明の流れは変わらない。

証明の概略. グラフ $\tilde{c}_G(G)$ を少し変形する。

c_G の極値を与えないような頂点 v 、そしてグラフ $\tilde{c}_G(G)$ の頂点 $\tilde{c}_G(v) = (v_1, v_2)$ の十分小さな開近傍 $U_v \subset \mathbb{R}^2$ を考える。丁度 $n_{v,-} > 0$ ($n_{v,+} > 0$) 個の閉包が端点として $\tilde{c}_G(v)$ を含むような辺で、 $\pi_{2,1}$ を制限した関数の値の上限 (resp. 下限) が $c_G(v)$ であるようなものがある。 $n_{v,-}$ か $n_{v,+}$ は 2 以上である。 (v_1, v_2) に十分近い別の点 (v_1, v_3) を考え 2 点を線分で結び、前述の $n_{v,+} > 0$ 個の辺についてのみ、閉包の端点を (v_1, v_3) に繋ぎ変える (辺に制限したとき $\pi_{2,1}$ が連続で単射であるという条件は崩さないようにまた U_v の十分近くでのみ移動する)。 c_G の極値を与えないようなすべての頂点 v で同様の操作を行う。新たにできた平面グラフ $G' \subset \mathbb{R}^2$ は元のグラフ $\tilde{c}_G(G)$ に縮約する。グラフ G' について、(滑らかなカテゴリーで) 正則近傍 D_G をとる。さらに [1] そして [13, 14] 等を参考にした導関数も考慮した近似で境界 $C_G = \partial D_G$ が非特異な実代数的曲線で以下が満たされるようにできる。

- $D_G \subset \mathbb{R}^2$ は (Theorem 3 の D のような) 実代数的領域となる (Remark 1 に注意すると実は C_G は適切な実多項式関数の零点集合にもできる)。
- $\pi_{2,1}$ の境界 C_G への制限は Morse 関数である。この Morse 関数の臨界点は有限個であるが、関数の各臨界点は c_G の極値を与えるような頂点 v_0 ($\tilde{c}_G(v_0)$) の十分近くもしくは $U_v \cap (\mathbb{R}^2 - G')$ の各成分にある。逆に c_G の極値を与えるような頂点 $\tilde{c}_G(v_0)$ (v_0) の近くに丁度 1 個臨界点があり、 $U_v \cap (\mathbb{R}^2 - G')$ の各成分に丁度 1 個臨界点があるという形で、自然な一対一対応がある。また $U_v \cap (\mathbb{R}^2 - G')$ の各成分にある関数の臨界点において、第 2 成分の値は互いに異なるようにできる。

c_G の極値を与えるような各頂点 v_0 ($\tilde{c}_G(v_0)$) に対応している臨界点を含む十分小さな適切な半径の円板をうまくとり、また各 $U_v \cap (\mathbb{R}^2 - G')$ の各成分にある臨界点を中心とする十分小さな楕円を楕円の境界が (v_1, v_2) と (v_1, v_3) を通る直線に接するようにとることができる。一連の円板・楕円は互いに交わらないようにできる。

そして D_G のうち楕円や円板と交わっている部分を除くと、新たに連結な有界開集合 $D := D_{c_G}$ ができる。Theorem 4 が適用でき平面への写像 $f := f_{c_G} : M_{c_G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ が得られる (m_{l_2} は正值の関数にする等注意が必要: また

少し前の部分で注意すべき話、Reeb グラフが与えられたグラフと同相になるような関数を作る上で、 v_0 、 $c_G(v_0)$ に対応している臨界点を含むような十分小さな円板をとるとき D_G と円板の境界の交わり C_{v_0} を $\pi_{2,1}|_{C_{v_0}}$ が単射連続になるようにとれる、とらなくてはならないということ等、注意が必要)。そして射影 $\pi_{2,1}$ を合成すると得たい関数 $f_{c_G,0} : M_{c_G} \rightarrow \mathbb{R}$ ができる。Remark 3 に関連して、得られたのが Morse-Bott 関数であることも示せる。補足であるが、円板の境界である円周は勿論、楕円の境界は単位円周 S^1 を所謂アフィン変換で変換したものといえ、" C_G が実多項式関数の零点集合として実現できるという事実"も考慮すると、 M_{c_G} はある実多項式写像の零点集合として実現できることとなる。□

6 今後の問題。

Problem 2. 適切なクラスの有限グラフについて、それと同型な Reeb グラフを有するような(適切な条件を満たす)実代数的多様体上の実代数的関数は得られるか。

問題の設定がいろいろあり得、実際 (References 含め省略するが)いくつか著者は他にも結果を得ている。

また、例えば、Example 2 において、グラフが仮定したような頂点での値や頂点の指数に対する条件を満たすならば、(平面への埋め込みに持ち上がるとは限らなくとも)、所謂特異点論、多項式、実代数幾何における近似定理によって肯定的な結果を得ることはできる。しかし存在に関する議論ばかりを使ってのものとなる。具体的に多様体がどの次元の空間に埋め込まれ埋め込みと射影の合成になるかや、式の情報に関して、一般にはほぼわからない。

また、具体的な所、Example 2 からグラフについていくらか条件を緩めた Theorem 6 で、例えば、グラフに"同相"が"同型"にできるかどうかは現時点で不明である。なお、関連して、可微分なカテゴリーでの Reeb グラフに関する問題と解答で、方法や研究キーワードも全く異なれど、奇しくも [2] が、任意の連結な有限グラフが、適切な、連結な閉曲面上の Morse-Bott 関数の Reeb グラフに同相であるということを示している。

Problem 3. 例えば、今回の Theorem 4・5 のように、円周で囲まれた領域(の閉包)への写像と射影の合成で得られるものに関して Problem 2 を更に考えるとどうなるか。

関数 m_{l_2} が正值であるという仮定があれば、円周で囲まれた(連結な)領域に対しての Poincaré-Reeb グラフに関するものと考えられる。

(平面)グラフの理論に関する、基本的で自然だが未だに系統的考察はないという類の問題である(と著者は認識する)。以下も同様である。

Problem 4. 与えられたグラフまたは向きの入ったグラフや頂点に Example 2 や Theorem 6 で登場するような連続関数 c_G から実数値が定まり実数の順序から定まる向きの入っているグラフに対し、同型な Poincaré-Reeb グラフ(あるいは向きや頂点での値が f の Reeb グラフ W_f の定義における $f = \bar{f} \circ q_f$ を満たす一意に定まる関数 $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}$ と同様の関数から自然に入ったも

の)を有するような円周もしくは適切なクラスの非特異な代数的曲線の集まりで囲まれた領域があるかわかるか。確認するアルゴリズムはあるか。

7 謝辞他。

今回の内容は例えば以下より補助等を受けております。

- 本内容は、京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業の一環として実施された研究集会「可微分写像の特異点論とその応用」(<https://www.fit.ac.jp/fukunaga/conf/sing202412.html>)の著者の講演をもとにしたものです。まず、本研究集会参加にあたり、京都大学数理解析研究所からの金銭的補助に大いに感謝申し上げます。
- JSPS KAKENHI Grant Number JP17H06128 (代表者: 佐伯 修)。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。
- JSPS KAKENHI Grant Number JP22K18267 (代表者: 佐伯 修)。講演者はこのプロジェクトのメンバーとして働いていました。
- 講演者は九州大学マス・フォア・インダストリ研究所学術研究員で、詳細にはマス・フォア・イノベーション連係学府の”ヤングメンター”(<https://www.jgmi.kyushu-u.ac.jp/en/>)として働いております。今回の内容は業務とも関連しております。なお今回の内容は業務とは”公式には独立”したものでもあります。
- 講演者は大阪公立大学数学研究所特別研究員(MEXT Promotion of Distinctive Joint Research Center Program JPMXP0723833165)でもあり、金銭的な補助等はないですが、我々の研究を支えて頂いております。

講演を聴講して下さった皆様に大いに感謝申し上げます。特に質問・議論して下さい以下の二者に大いに感謝申し上げます。

- 「山本 卓宏 氏(東京学芸大学)」には、質疑応答の時間に、できる多様体を表現する多項式の次数や表示等、主に特異点論の観点からのご質問を下さりました。講演終了後にお互いにグラフから”膨らませて”できる領域と実代数的多様体の復元について”気持ち”等から確認し合いました。離散数学、計算機も関係しそうな部分、巨大グラフも具体的に扱えるようになるかもしれない等ということも確認し合え、実代数的多様体を得るアルゴリズムについても議論させて頂きました。
- 「足利 正 氏(東北学院大学)」には、終了後、平面内のグラフを囲む領域の適合について”特異点の解消”をどうするかというご疑問を頂き、そして領域の大まかな形について議論させて頂きました。また、代数幾何について素人であると同時に勉強中の身である著者に、代数多様体をグラフで表現するといった話について多く教えて頂きました。

講演の機会を下さった、本研究集会の世話人、「土田 旭 先生(滋賀大学)」「福永 知則 先生(福岡工業大学)」にも大いに感謝申し上げます。

References

- [1] A. Bodin, P. Popescu-Pampu and M. S. Sorea, *Poincaré-Reeb graphs of real algebraic domains*, Revista Matemática Complutense, <https://link.springer.com/article/10.1007/s13163-023-00469-y>, 2023, arXiv:2207.06871v2.
- [2] I. Gelbukh, *A finite graph is homeomorphic to the Reeb graph of a Morse-Bott function*, Mathematica Slovaca, 71 (3), 757–772, 2021; doi: 10.1515/ms-2021-0018.
- [3] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).
- [4] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values*, Topol. Methods in Nonlinear Anal. Vol. 59 No. 2B, 897–912, arXiv:1902.08841.
- [5] N. Kitazawa, *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs*, Methods of Functional Analysis and Topology Vol. 28 No. 4 (2022), 302–308, arXiv:2302.02339, 2023.
- [6] N. Kitazawa, *Special generic maps on closed and simplyconnected manifolds of dimension 6* (in Japanese). RIMS Kôkyûroku No.2281, Extension of the Singularity theory, 2024.
- [7] N. Kitazawa, *Realization problems of graphs as Reeb graphs of Morse functions with prescribed preimages*, the 2nd revised version is submitted to a refereed journal based on positive comments by editors and referees, arXiv:2108.06913.
- [8] N. Kitazawa, *Reconstructing real algebraic maps locally like moment-maps with prescribed images and compositions with the canonical projections to the 1-dimensional real affine space*, the title has changed from previous versions, submitted to a refereed journal, arXiv:2303.10723, 2024.
- [9] N. Kitazawa, *Some remark on real algebraic maps which are topologically special generic maps and generalize the canonical projections of the unit spheres*, submitted to a refereed journal, arXiv:2312.10646.
- [10] N. Kitazawa, *Arrangements of small circles for Morse-Bott functions and regions surrounded by them*, arXiv:2412.20626v3, 2025.
- [11] N. Kitazawa, *Arrangements of circles supported by small chords and compatible with natural real algebraic functions*, arXiv:2501.11819.
- [12] N. Kitazawa, *Realizations of planar graphs of refined algebraic domains*, arXiv:2501.17425v3, 2025.

- [13] J. Kollár, *Nash's work in algebraic geometry*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society (2) 54, 2017, 307–324.
- [14] Camillo De Lellis, *The Masterpieces of John Forbes Nash Jr., The Abel Prize 2013–2017* (Helge Holden and Ragni Piene, eds.), Springer International Publishing, Cham, 2019, 391–499, https://www.math.ias.edu/delellis/sites/math.ias.edu.delellis/files/Nash_Abel_75.pdf, arXiv:1606.02551.
- [15] Y. Masumoto and O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, Kyushu J. Math. 65 (2011), 75–84.
- [16] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*. Topol. Methods in Nonlinear Anal. 52 (2) (2018), 749–762, arXiv:1805.06727.
- [17] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.
- [18] G. Reeb, *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique*, -C. R. A. S. Paris 222 (1946), 847–849.
- [19] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathematics Research Notices, maa301, Volume 2022, Issue 11, June 2022, 3740–3768, <https://doi.org/10.1093/imrn/maa301>.
- [20] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds II*, Res. Math. Sci. 11, article number 24 (2024), <https://link.springer.com/article/10.1007/s40687-024-00436-z>.
- [21] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods of Functional Analysis and Topology 12 (2006), 389–396.
- [22] M. S. Sorea, *The shapes of level curves of real polynomials near strict local maxima*, Ph. D. Thesis, Université de Lille, Laboratoire Paul Painlevé, 2018.
- [23] M. S. Sorea, *Measuring the local non-convexity of real algebraic curves*, Journal of Symbolic Computation 109 (2022), 482–509.