

Morsification for degeneration of Riemann surfaces of genus six

工学院大学 奥田喬之

Takayuki Okuda

Kogakuin University

本稿の目的は、リーマン面の退化に対するモース化予想をより高い種数で示す試みについて、先行研究の概説と [8] の予報を与えるものである。

モース理論を学ぶ際、「実閉多様体上の滑らかな関数は少し摂動することでモース関数にする（モース化する）ことができる」という事実を必ず通ることになろう。これを複素多様体と正則写像のカテゴリーで考えたい。まずはということで複素 2 次元多様体を扱うことにすると、実閉曲面上の滑らかな関数には複素閉曲面の正則ファイブレーション（複素曲線上の複素曲線束）が対応し、モース関数には正則なレフシェッツファイブレーションが対応する。ところがこの条件下でモース化を実現するのは具体例を作ることさえ実は困難である。局所的には構成できても大域的なものに延ばすことができないのである。そこで、ファイバー方向には大域的だが底空間方向には局所的な複素曲線束、いわゆるリーマン面の退化に対するモース化をまずは考えたいわけである。

1 リーマン面の退化と分裂変形

種数 $g \geq 1$ のリーマン面の退化とは、非特異複素曲面 M から単位開円板 $B (\subset \mathbb{C})$ への固有全射正則写像 $\pi: M \rightarrow B$ であって、原点 0 を除く B の点 b 上のファイバー $\pi^{-1}(b)$ が種数 g の閉リーマン面であり、かつ原点 0 上のファイバー $\pi^{-1}(0)$ が特異ファイバーであるときをいう。なお、特異ファイバーの 1 点でブローアップすればいくらかでも相異なる退化を構成できてしまうため、相対極小であるなどの極小性を課すことも多い。

リーマン面の退化の研究は、種数 1 の場合、つまり楕円曲線の退化に現れる特異ファイバーを分類した小平邦彦の結果 [4] に端を発する。それを追うようにして様々な研究がなされたが、リーマン面の退化の位相型については種数 2 の場合は浪川・上野 [7] が、種数 3 の場合は足利・石坂 [2] がその完全な分類を与えている。特に足利・

石坂の結果は、種数 2 以上のリーマン面の退化の位相型が位相モノドロミーを通して曲面写像類群の「負型擬周期写像類」というクラスと一対一対応することを示した松本・Montesinos の結果 [5] に基づいている。

次に、与えられたリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ に対する「変形」を定義する。 $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow B \times T$ を複素 3 次元多様体 $\mathcal{M}$ から単位開円板 B と十分小さい開円板 T との直積 $B \times T$ への固有全射平坦正則写像とし、各 $t \in T$ への制限を $B_t := B \times \{t\}$, $M_t := \Psi^{-1}(B \times \{t\})$, $\pi_t := \Psi|_{B \times \{t\}}: M_t \rightarrow B_t$ とおく。退化 $\pi: M \rightarrow B$ が $0 \in T$ 上への制限 $\pi_0: M_0 \rightarrow B_0$ と一致するとき、 Ψ は π の変形族であるという。つまり、 $\pi: M \rightarrow B$ の写像だけでなく全空間も変形させ時刻 $t \in T \setminus \{0\}$ での変形 $\pi_t: M_t \rightarrow B_t$ を得る、と考えている。

こうした変形の下では（基点付き）位相モノドロミーの合成が保たれることから、特異ファイバーの数が 1 つであるままに複素曲線束の位相型が変わることはなく、また特異ファイバーが消滅することもない。よって考えるべきは $\pi_t: M_t \rightarrow B_t$ ($t \neq 0$) が特異ファイバーを複数持つ複素曲線束となる場合であり、このとき Ψ は π の分裂変形族であるといい、特異ファイバー $\pi^{-1}(0)$ が分裂するという。

さらに、複素曲線束のファイバー F に対しオイラー寄与なる不変量が

$$\chi(F) := e(F) - (2 - 2g) \quad (e(F) \text{ は } F \text{ の位相的オイラー標数})$$

で定義される。これは F が非特異ファイバーならば明らかに 0 である一方、特異ファイバーならば（種数 1 の特殊な場合を除き）正整数であり、変形の下で総和が保たれることが知られている。特にレフシェッツファイバーはオイラー寄与が 1 であり、したがってそれ以上分裂することのない特異ファイバーであることがわかる。すなわちリーマン面の退化のモース化を目標とする我々は、特異ファイバーに対してうまく分裂変形族を構成しそのオイラー寄与と同数のレフシェッツファイバー達に分裂させようとするのである。

さて、目標はリーマン面の退化をモース化することであるが、モース化において一度の変形ではなく有限回の変形を許すことにすれば、つまりはレフシェッツファイバーを持つ場合を除き任意のリーマン面の退化が分裂変形可能であることを証明できればよい。しかし実はレフシェッツファイバー以外にも分裂変形を許容しない特異ファイバーが存在することが既に判明している。

定理 1 ([10]). リーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ の特異ファイバーが多重非特異曲線（下部被約曲線が非特異である特異ファイバー）であるならば、それに対する分裂変形族は存在しない。

これを踏まえ、我々の目標「モース化予想」は以下のものとなる。なおこれは Xiao[12] によって掲げられたモース化予想 ([9] も参照) よりある意味で粗いものになっている。

予想 ([10]). リーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ の特異ファイバーがレフシェッツファイバーでも多重非特異曲線でもないならば、それに対する分裂変形族が存在する。

与えられたリーマン面の退化に対して分裂変形族を構成する方法はよく知られたものが大きく分けて 2 つある。1 つは超楕円の退化に対するもので、それらが持つ二重被覆構造を利用する。種数 1 の場合に Moishezon [6] が考案したものが元となっており、種数 2 の場合に堀川 [3] が、さらに一般の超楕円の退化に対して荒川・足利 [1] がそれを拡張した。もう 1 つは「剥離変形」という分裂変形族の構成法によるもので、これを考案した高村 [11] は種数 5 までの場合に対して以下の結果を得ている。

定理 2 ([11]). 種数 $g \leq 5$ のリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ の特異ファイバーがレフシェッツファイバーでも多重非特異曲線でもないならば、同じ位相型であるリーマン面の退化 $\pi': M' \rightarrow B$ とそれに対する分裂変形族が存在する。

さて、本稿で報告する主結果は「剥離変形」を用いて種数 6 でもこれを示すことができたというものである。

定理 3 ([8]). 種数 $g = 6$ のリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ の特異ファイバーがレフシェッツファイバーでも多重非特異曲線でもないならば、同じ位相型であるリーマン面の退化 $\pi': M' \rightarrow B$ とそれに対する分裂変形族が存在する。

2 特異ファイバーの形状

次にリーマン面の退化に現れる特異ファイバーの形状について少し紹介する。^{*1}

先述の通りリーマン面の退化を扱う際は通常ある種の極小性が課される。例えば特異ファイバー（あるいはそのリーマン面の退化）が相対極小であるとは、既約成分として第 1 種例外曲線を含まないことをいう。一方、正規極小であるとは、特異ファイバーの下部被約曲線が特異点として高々正規交差しか持たず、そうした範囲のうちで極小である（正確には第 1 種例外曲線である既約成分があったとしてもそれは他の既約成分と 3 点以上で交わる）ことをいう。かつては相対極小性を課することがほとんどであったようだが、[5] など退化の位相型についての研究が進んだ現在は、必要に応じてブローアップを施すことで正規極小であることが課されることも多い。また、正規極小な特異ファイバーであればその「形状」を、頂点を既約成分、その重みを対応する既約成分の種数、頂点間の辺を対応する既約成分間の交点とする重み付きグラフとして定義することができる。

正規極小な特異ファイバーに対し、既約成分がコア成分であるとはその種数が 1 以上であるか、あるいは他の既約成分と 3 点以上で交わることをいう。種数 1 の特殊な場合を除き特異ファイバーは少なくとも 1 つコア成分を持つ。特異ファイバーからコア成分を除くと、残りは種数 0 の既約成分の鎖達の非交和となる。それらのうち 1 つのコア成分と隣接するものを枝、2 つのコア成分を結ぶものを弧と呼ぶ。

特異ファイバーがちょうど 1 つのコア成分を持ちかつ形状を表すグラフが閉路を持たないとき stellar である、そうでないとき constellar であるという。これは例えば [5] のように位相モノドロミーを扱う際に重要で、stellar である特異ファイバーの位相モノドロミーは周期的写像類、constellar である場合は周期的でない擬周期的写像類となる。

特異ファイバーが stellar である場合は比較的扱いやすく、リーマン面の退化の位相型およびその位相モノドロミーは特異ファイバーの形状と既約成分の重複度という情

^{*1} 本稿の元となる、2024 年 12 月開催 RIMS 共同研究（公開型）「可微分写像の特異点論とその応用」での著者の講演では、種数 6 のリーマン面の退化で分裂変形可能か否か吟味しきれていないものがまだ残っており、定理 3 の主張から除外するため特異ファイバーのある種の「型」の説明の必要があった。本稿執筆時点ではそれも吟味し終えたため実は不要なのだが、せっかくなので紹介する。

報のみから決定される。分裂変形可能性についても、次の定理の通り、stellar な特異ファイバーに絞ればより高い種数のリーマン面の退化に対し分裂変形を構成できることが示されている。(ただし分裂して現れる特異ファイバーが constellar であることもあるため、stellar な特異ファイバーに対しモース化可能であることが示されたわけではないことに注意。)

定理 4 ([8]). 種数 $g \leq 8$ のリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ の特異ファイバーが stellar でありレフシェッツファイバーでも多重非特異曲線でもないならば、同じ位相型であるリーマン面の退化 $\pi': M' \rightarrow B$ とそれに対する分裂変形族が存在する。

一方特異ファイバーが constellar である場合ははるかに複雑である。例えば [7] で指摘されているように、形状と既約成分の重複度が同じ特異ファイバーであって位相同型でないリーマン面の退化のペアが存在する。なお、constellar である特異ファイバーを持つ退化は、より低種数の stellar な特異ファイバーを 1 つないし複数を枝で“接合”して得ることができる。^{*2}

3 分裂変形の構成

正規極小なリーマン面の退化の局所モデルとして例えば

$$\pi(x, y) = x^m y^m$$

で正則写像 $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を定義する (m は 2 以上の整数) と、 $0 \in \mathbb{C}$ 上にのみ特異ファイバーとして重複度 m の多重ノード (座標軸である複素数平面 $\mathbb{C}_x, \mathbb{C}_y$ の 1 点和) が現れる。これに対しパラメータ $t \in \mathbb{C}$ による変形 $\pi_t: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\pi_t(x, y) = (xy + t)^m$$

で定義すると $\pi_0 = \pi$ であり、 $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ のとき

- $\pi_t^{-1}(0): (xy + t)^m = 0$

^{*2} 講演では、頂点をコア成分、頂点間の辺を対応するコア成分間の接合とするグラフとして「constellar type」を定義した。種数 6 の場合、「2 つのコア成分を 1 つの接合で結んだもの」という constellar type の退化は数が膨大で、講演時点では分裂可能性の吟味が終わっていなかった。

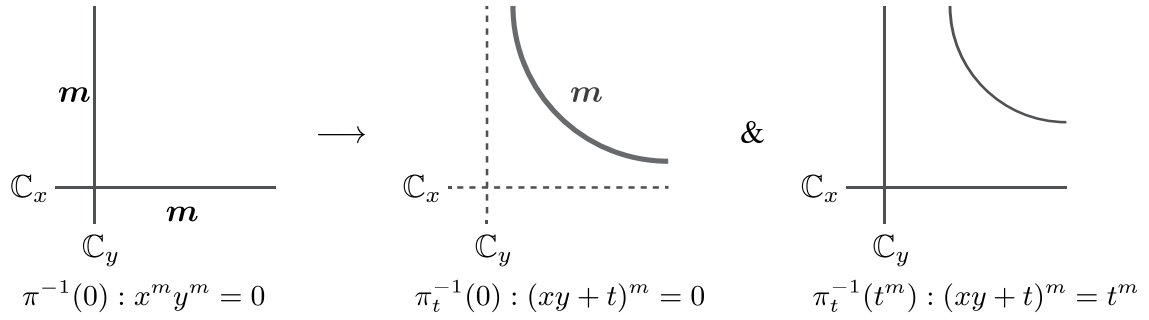


図 1 $\pi_t(x, y) = (xy + t)^m$ が定める、重複度 m の多重ノードが重複度 m の多重アニュラスとレフシェッツ特異点とに分裂する変形。

- $\pi_t^{-1}(t^m) : (xy + t)^m = t^m \Leftrightarrow xy(x^{m-1}y^{m-1} + \dots + mt^{m-1}) = 0$

と 2 つの特異ファイバーを持ち、それぞれ重複度 m の多重アニュラスとレフシェッツ特異点を含む複素曲線とであることがわかる（図 1）。固有写像となるよう局所モデルを正則に貼り合わせファイバー方向へ延ばすことは一般には簡単ではないが、この例の場合はそれが可能であることが [10] で示されている。

定理 5 ([10]). リーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ が重複度 $m \geq 2$ の多重ノードを含む特異ファイバーを持つとする。このときそれに対する分裂変形族が存在し、誘導される変形後の複素曲線束 $\pi_t: M_t \rightarrow B_t$ ($t \neq 0$) が「元の特異ファイバーの重複度 m の多重ノードを重複度 m の多重アニュラスに取り替えたもの」と「レフシェッツファイバー」との 2 つの特異ファイバーを持つ。

さて、定理 2 および定理 3、定理 4 を証明するには「剥離変形」の理解が不可欠であるが、この解説を記述し切るには紙面が足りないため、正確さにはある程度目を瞑り 3 ステップで概要を紹介したい。

1. 局所変形 正規極小なリーマン面の退化 $\pi: M \rightarrow B$ を扱うことにする。このとき正規交差点の周りで局所座標をうまくとると

$$\pi(x, y) = x^{m_1} y^{m_2}$$

と表される。ここで m_1, m_2 は当該点で交わる既約成分の重複度であり、この座標近

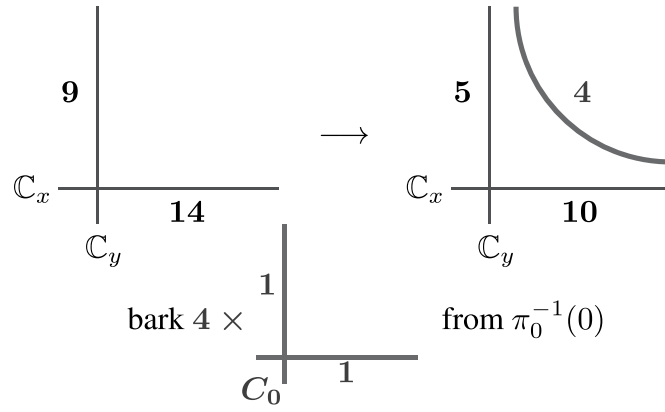


図2 $\pi_t(x, y) = x^5 y^{10} (xy + t)^4$ が定める、 $\pi_0^{-1}(0) = 14\mathbb{C}_x + 9\mathbb{C}_y$ から “重複度 4 の $C_0 = \mathbb{C}_x + \mathbb{C}_y$ ” が剥ぎ取られ $\pi_t^{-1}(0) = 10\mathbb{C}_x + 5\mathbb{C}_y + 4C_t$ が得られる変形。

傍において特異ファイバーはその因子として

$$\pi^{-1}(0) = m_2 \mathbb{C}_x + m_1 \mathbb{C}_y$$

と表せる。さて、これに対しパラメータ $t \in \mathbb{C}$ による変形を

$$\pi_t(x, y) = x^{m_1 - l n_1} y^{m_2 - l n_2} (x^{n_1} y^{n_2} + t)^l$$

で定義する (n_1, n_2, l は $0 < l n_1 \leq m_1, 0 \leq l n_2 \leq m_2$ をみたす正整数)。このとき原点の特異ファイバーには新たな既約成分 C_t が現れ

$$\pi_t^{-1}(0) = (m_2 - l n_2) \mathbb{C}_x + (m_1 - l n_1) \mathbb{C}_y + l C_t$$

と表せる。これを「 $\pi^{-1}(0)$ の一部である “重複度 l の $C_0 = n_2 \mathbb{C}_x + n_1 \mathbb{C}_y$ ” が剥ぎ取られ、新たな既約成分 C_t を持つ $\pi_t^{-1}(0)$ となった」とみなすのが「剥離変形」の基本的な考え方である (図2)。

2. 半局所的変形

必要であればさらにブローアップし $\pi: M \rightarrow B$ の特異ファイバーの各既約成分 Θ が非特異であるようにする。さらに複素構造を少し変形をすることで、その管状近傍を M における Θ 上の法束 (の全空間) N とみなし、 N において特異ファイバーをその因子として

$$\pi^{-1}(0) = m\Theta + \sum_p m_p F_p$$

と表せるようにする (p は Θ の他の既約成分との交点を走るとし、 F_p は p 上の法束のファイバー、 m および m_p は Θ および p で交わる既約成分の重複度)。前述の局所的

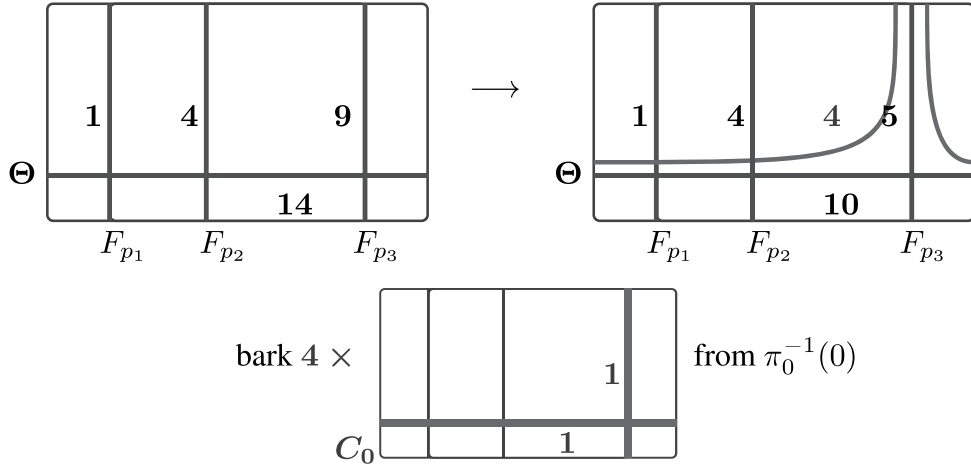


図3 $\pi_0^{-1}(0) = 14\Theta + F_{p_1} + 4F_{p_2} + 9F_{p_3}$ から“重複度4の $C_0 = \Theta + F_{p_3}$ ”が剥ぎ取られ、 $\pi_t^{-1}(0) = 10\Theta + F_{p_1} + 4F_{p_2} + 5F_{p_3} + 4C_t$ が得られる変形。

変形を N に延長したパラメータ $t \in \mathbb{C}$ による変形 $\pi_t: N \rightarrow \mathbb{C}$ を上手く構成し、特異ファイバー

$$\pi_t^{-1}(0) = (m - ln)\Theta + \sum_p (m_p - ln_p)F_p + lC_t$$

を持つようにする (n, n_p, l は $0 < ln \leq m, 0 \leq ln_p \leq m_p$ をみたす非負整数)。こうして「 $\pi^{-1}(0)$ の一部である“重複度 l の $C_0 = n\Theta + \sum_p n_p F_p$ ”が剥ぎ取られ、新たな既約成分 C_t を持つ $\pi_t^{-1}(0)$ となる」とみなす (図3)。実際、 Θ の種数が0ならば非負整数 n, n_p が条件式

$$\frac{1}{m} \sum_p m_p \leq \frac{1}{n} \sum_p n_p$$

をみたしさえすればこうした変形を必ず構成できる。

3. 大域的変形

ファイバー方向に大域的な $\pi: M \rightarrow B$ に戻り、その特異ファイバーを M の因子として

$$\pi^{-1}(0) = \sum_{\Theta} m_{\Theta} \Theta$$

と表す (Θ は $\pi^{-1}(0)$ の既約因子を走るとし、 m_{Θ} は Θ の重複度)。これに対し $0 \leq ln_{\Theta} \leq m_{\Theta}$ をみたす非負整数 n_{Θ}, l をとり、「 $\pi^{-1}(0)$ の一部である“重複度 l の $C_0 = \sum_{\Theta} n_{\Theta} \Theta$ ”が剥ぎ取られるような変形」(図4)を、前述の半局所変形を貼り合わせて構成する。ただし正確には、全ての既約成分の管状近傍で前述の半局所変

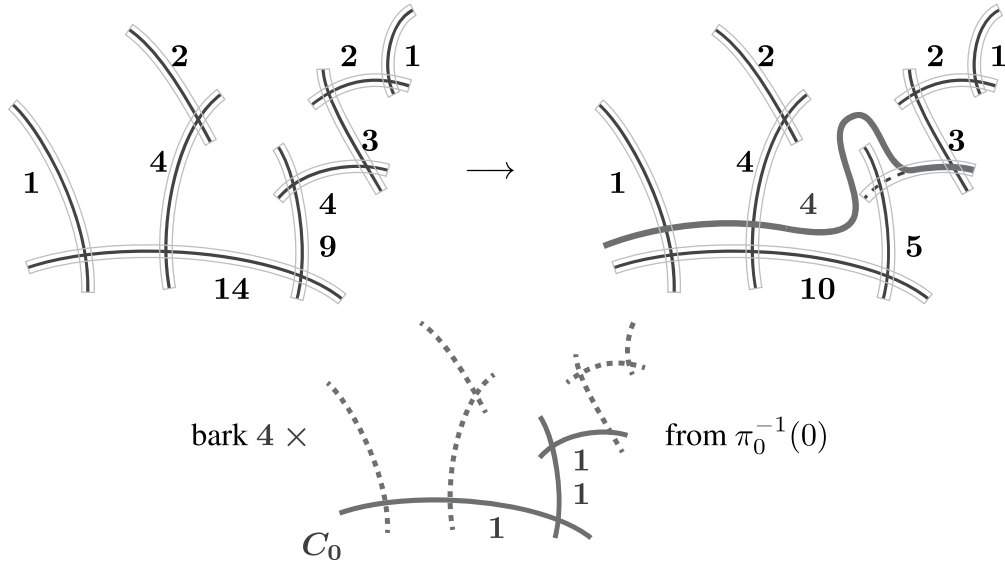


図4 種数6のリーマン面の退化の stellar 特異ファイバーである $\pi_0^{-1}(0)$ から“重複度4の C_0 ”が剥ぎ取られ、 $\pi_t^{-1}(0)$ が得られる変形。

形をしても整合性がとれず貼り合わせができないため、一部の既約成分の管状近傍では法束の構造自体を変形する必要がある。 $C_0 = \sum_{\Theta} n_{\Theta} \Theta$ とその重複度 l がこうした大域的な貼り合わせを可能とするための十分条件を整備したのが高村 [11] の大きな仕事であり、この十分条件をみたす (C_0, l) を simple crust と呼ぶ。

さて、こうして大域的な変形族が構成できれば、原点上の特異ファイバーの周りの位相モノドロミーは $t = 0$ と $t \neq 0$ とで異なるものとなる。先述の通り変形の下で位相モノドロミーの合成は保たれるはずなので、 $t \neq 0$ のとき原点上の特異ファイバー以外にも特異ファイバーが存在することがわかる。したがって剥離変形によって得られる変形族は分裂変形族である、ということになるのである。

種数5までのリーマン面の退化において、レフシェッツファイバーでも多重非特異曲線でもない特異ファイバー全てに対し simple crust をリストアップすることで定理2は示された。定理3そして定理4も同様に、simple crust（を少し拡張したもの）が存在するか否かを対象となる退化全てに対し吟味して得られたものである。

参考文献

- [1] T. Arakawa and T. Ashikaga: *Local splitting families of hyperelliptic pencils I*, Tohoku Math. J. (2) **53** (2001), 369–394.

- [2] T. Ashikaga and M. Ishizaka: *Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos' theorem*, Tohoku Math. J. (2) **54** (2002), 195–226.
- [3] E. Horikawa: *Local deformation of pencil of curves of genus two*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **64** (1988), 241–244.
- [4] K. Kodaira: *On compact analytic surfaces, II*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626.
- [5] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia: *Pseudo-periodic Maps and Degeneration of Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., Vol. 2030, Springer-Verlag, 2011.
- [6] B. Moishezon: *Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes*, Lecture Notes in Math. **603**, Springer-Verlag, 1977.
- [7] Y. Namikawa and K. Ueno: *The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two*, Manuscripta Math. **9** (1973), 143–186.
- [8] T. Okuda: *Morsification for degeneration of Riemann surfaces of genus six or more*, in preparation.
- [9] M. Reid: *Problems on pencils of small genus*, preprint, 1990.
- [10] S. Takamura: *Towards the classification of atoms of degenerations, I — Splitting criteria via configurations of singular fibers*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 115–145.
- [11] S. Takamura: *Towards the Classification of Atoms of Degenerations, III — Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*, Lecture Notes in Math., Vol. 1886, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [12] G. Xiao: *Surfaces Fibrees en Courbes de Genre Deux*, Lecture Notes in Math., Vol. 1137, Springer-Verlag, Berlin, 1985.