対数的ベクトル場とCamacho-Sad-Suwa指数の計算アルゴリズム

Methods for computing logarithmic vector fields and Camacho-Sad-Suwa indices

新潟大学大学院自然科学研究科　田島慎一 *1
Shinichi Tajima
Graduate School of Science and Technology, Niigata Universit

九州産業大学理工学部情報科学科　渋田敬史 *2
Takafumi Shibuta
Department of Information Science, Kyushu Sangyou University

東京理科大学理学部応用数学科　鍋島克輔 *3
Katsusuke Nabeshima
Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Scinece

Abstract

Camacho-Sad-Suwa indices of logarithmic vector fields along singular plane curves are considered in the context of computational complex analysis. An effective method is proposed for computing a basis of the module of logarithmic vector fields along a singular curve. An algorithm for computing Camacho-Sad-Suwa indices is presented. The keys of our approach are the use of local cohomology and Grothendieck local residues.

1 序

1982 年に発表された論文 [1] において, C. Camacho と P. Sad は, $\mathbb{C}^2$ 上の holomorphic なベクトル場の germ に対しベクトル場の特異点を通る非特異な積分曲線に関する指数の概念を導入し, それを駆使することにより, holomorphic なベクトル場はその特異点を通るような積分曲線 (separatrix と呼ばれる) を持つことを証明した. 彼らが導入した指数は, その後 Lins Neto[10] と諏訪立雄 [22] らにより, 積分曲線が非特異でないような場合に拡張された. Camacho-Sad 指数と呼ばれるこれらの指数は, 現在も盛んに研究され, 様々なかたちで利用されている. Camacho-Sad 指数に関連する論文の著者として例えば

M. Abate, A. Beltrán, F. Bracci, M. Brunella, G. Calsamiglin, F. Cano, P. Cascini, S. C. Coutinho

G. Dloussky, A. Fernández Pérez, P. Fernández-Sánchez, E. Floris, P. Fortuny Ayuso,

*1 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp
*2 〒 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1　E-mail: tshibuta@ip.kyusan-u.ac.jp
*3 〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp

E. R. García Barroso, Y. Genzmer, B. Gmira, A. Guilot, F. D. Innocenti, A. Lins Neto, D. Marín, J. -F. Mattei, Ł. Menasché Schechter, J. Mozo-Fernández, L. Ortiz Bobadilla, E. Rosales Gonzárez, H. Reis L. Teyssier, M. Toma, S. M. Voronin

らをあげることができる. Camacho-Sad 指数は holomorphic なベクトル場の研究において重要な概念であるが, 複素解析的な不変量であり, その値を実際に求めることは一般には容易ではない.

本稿では, 計算複素解析の立場から, 諏訪立雄が導入した Camacho-Sad-Suwa 指数の計算法について研究する. 構成した 2 つのアルゴリズムを用いることで

(**I**) 原点を特異点として持つ平面代数曲線に対し, それに沿って対数的なベクトル場全体のなす (正則函数を係数とする) 加群の生成元

(**II**) 原点を特異点として持つ holomorphic なベクトル場とその separatrix に対し, その Camacho-Sad-Suwa 指数

を求めることが出来る. 対数的ベクトル場の概念等の説明をはじめるまえに, 計算例を以下に紹介する

本稿を通じ $X \subset \mathbb{C}^2$ は原点 $O \in \mathbb{C}^2$ の近傍とする.

例 (W_{12} 特異点) $f(x,y) = x^4 + y^6 + xy^4$ に対し, $S = \{(x,y) \in X \mid f(x,y) = 0\}$ とおく.

S に沿って対数的なベクトル場のなす層を $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ で表す. (**I**) のアルゴリズムにより, 2 つのベクトル場

$$v_1 = \left(x^2 + 9x^3 + \frac{3}{4}y^4\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{3}{4}xy + 6x^2y - \frac{1}{8}y^3\right)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$v_2 = \left(xy + 9x^2y - \frac{1}{2}y^3\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 6xy^2\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. これらは $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ の生成元である. ベクトル場 v_1, v_2 はそれぞれ

$$v_1(f) = 4(1+9x)xf(x,y),\ v_2(f) = 4(1+9x)yf(x,y)$$

を満たす. 即ち, 曲線 S は, ベクトル場 v_1, v_2 の separatrix である.

いま, ベクトル場 v_1, v_2 の係数多項式の行列式を計算すると

$$\det\begin{vmatrix} x^2 + 9x^3 + \frac{3}{4}y^4 & \frac{3}{4}xy + 6x^2y - \frac{1}{8}y^3 \\ xy + 9x^2y - \frac{1}{2}y^3 & \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 6xy^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1+9x)f(x,y)$$

を得る. 右辺の f の係数 $\frac{1}{2}(1+9x)$ は原点で零とならない ([20]). 対数的ベクトル場のなす加群の層の生成元でありこのような性質を持つベクトル場の組は, 斉藤基底と呼ばれている [5, 8].

次に, アルゴリズム (**II**) を用いて, ベクトル場 v_1, v_2 の separatrix$S$ に沿った Camacho-Sad-Suwa 指数を求めると

$$\mathrm{CS}_{\{O\}}(v_1, S) = \frac{144}{7},\ \mathrm{CS}_{\{O\}}(v_2, S) = \frac{64}{3}$$

を得る.

2 Camacho-Sad-Suwa index

X は, $\mathbb{C}^2$ の原点 O の開近傍とする. X 上の正則函数のなす層 $\mathcal{O}_X$ の原点での芽を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す. 正則函数 $f \in \mathcal{O}_X$ が定める曲線を $S = \{(x,y) \in X \mid f(x,y) = 0\}$ で表す. 以下, S は reduced と仮定する.

v は, 正則函数を係数にもつベクトル場であるとする.

定義 (K. Saito[22])
v が S に沿って対数的なベクトル場であるとは, $v(f) = c(x,y)f(x,y)$ を満たす $c(x,y) \in \mathcal{O}_{X,O}$ が存在することと定める.

S に沿って対数的なベクトル場全体のなす加群の層を $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ で表す.

例 1 $f(x,y) = x^3 + y^7$, $S = \{(x,y) \in X \mid |f(x,y) = 0\}$.

$\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ は, 次の 2 つのベクトル場を生成元として持つ.

$$v_1 = \frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{7}y\frac{\partial}{\partial y},\ v_2 = 7y^6\frac{\partial}{\partial x} - 3x^2\frac{\partial}{\partial y}$$

多項式 f は weight vector $\frac{1}{21}(7,3)$ に関して weighted homogeneous な多項式であるが, v_1 はこの weight vector に関する Euler 作用素であり $v_1(f) = f$ を満たす, ベクトル場 v_2 は $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ と等しく $v_2(f) = 0$ を満たす.

多項式 f が原点を孤立特異点として持つ weighted homogeneous な多項式のとき, 対数的ベクトル場に関し, この例と同様のことが成り立つ.

Remark: 正則函数の germ $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ が局所的に正則な座標変換により weighted homogeneous にできるとき, f は quasi homogeneous であるという. 与えられた正則函数の germ f が quasi homogeneous であるか否かは, f が収束冪級数環でのヤコビイデアル $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \subset \mathbb{C}\{x,y\}$ に属するか否かと同値である ([19]). 従って, quasi homogeneous な正則函数の germ に関しては, その対数的ベクトル場の構造は, 上に与えた例の場合と同様である.

Remark: 対数的ベクトル場のなす加群 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ は, 特異点に関し非常に多くの情報を含んでいる. 論文 [9] を参照されたい.

いま, 正則函数 $a, b \in \mathcal{O}_{X,O}$ を係数にもつベクトル場

$$v = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

に対し, 微分形式 ω を次で定める.

$$\omega = b(x,y)dx - a(x,y)dy \in \Omega_{X,O}$$

次が成り立つ

補題 (K. Saito [20], A. Lins Neto [10]) 次の (i), (ii) は同値である

(i) $v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$

(ii) $g\omega = hdf + f\eta$ を満たす $g, h \in \mathcal{O}_{X,O}$ と $\eta \in \Omega_{X,O}$ が存在する.

微分形式に関する (ii) の条件はちょっとわかりにくいが, 対数的ベクトル場

$$v(f) = a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = c(x,y)f(x,y)$$

に対して,

(ア) $g = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), h = -a(x,y), \eta = c(x,y)dx$, あるいは (イ) $g = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), h = b(x,y), \eta = -c(x,y)dy$

とおけば, (ii) を満たすことを確かめることができる.

$S = \{(x,y) \in X \mid f(x,y) = 0\}$ は, 原点に特異点をもつベクトル場 v の separatrix であるとする. S は

$S = \cup_{i=1}^{r} C_i$ と既約分解されるとする. また, $f = f_1 f_2 \cdots f_r$ は S の規約分解に対応する f の $\mathcal{O}_{X,O}$ における分解とする (各 C_i は, 複素解析的に既約な平面曲線であり, 代数曲線とは限らない). 写像 $\varphi_i : \Delta \longrightarrow C_i$ は既約成分 C_i の local uniformization であるとする.

定義 (T. Suwa [22]) 次により, Camacho-Sad-Suwa 指数を定義する

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v; S, C_i) = -res_0(\varphi_i(\frac{\eta}{h}))$

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v; S) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v; S, C_i)$

次が成り立つ.

定理 (T. Suwa [22])

$$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v; S, C_i) = \mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{df_i}{f_i} \wedge \left(-\frac{\eta}{h}\right)\right)$$

右辺は Grothendieck local residue である.

例 2 例 1 に与えた 2 つのベクトル場 v_1, v_2 の Camacho-Sad-Suwa 指数を求める.
$v_1(f) = f,\ v_2(f) = 0$ より, v_1 に対しては, $\eta = dx$, v_2 に対しては, $\eta = 0$ を得る. これより直ちに

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1, S) = 21,\ \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2, S) = 0$

を得る

3 Local cohomology

この節では, local cohomology と Grothendieck local residue に関する基本的な事柄を復習しておく. この節の内容は一般の複素次元で成り立つことがらであるが, 混乱を避けるため, X は 2 次元空間 $\mathbb{C}^2$ の原点 O の開近傍の場合に話を限ることにする.

X 上の 正則函数のなす層を $\mathcal{O}_X$, holomorphic 2-form のなす層を Ω_X^2 で表す. いま

$\mathcal{H}_{\{O\}}^2(\Omega_X^2)$ により原点 O に台を持つ local cohomology
$\mathcal{H}_{[O]}^2(\Omega_X^2)$ により原点 O に台を持つ algebraic local cohomology

を表すとする.

原点 O における収束冪級数全体を $\mathcal{O}_{X,O}$, 形式冪級数全体を $\hat{\mathcal{O}}_{X,O}$ で表す. 多変数留数が定める自然な pairing

$\mathcal{O}_{X,O} \times \mathcal{H}_{\{O\}}^2(\Omega_X^2) \longrightarrow \mathbb{C}$
$\hat{\mathcal{O}}_{X,O} \times \mathcal{H}_{[O]}^2(\Omega_X^2) \longrightarrow \mathbb{C}$

により, ベクトル空間 $\mathcal{O}_{X,O}$ とベクトル空間 $\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\Omega^2_X)$ は (局所凸位相ベクトル空間として) 互いに双対の関係にある. 同様に $\hat{\mathcal{O}}_{X,O}$ と $\mathcal{H}^2_{[O]}(\Omega^2_X)$ も互いに双対の関係にある.

いま, 収束冪級数環のイデアル $I \subset \mathcal{O}_{X,O}$ は. $V(I) \cap X = \{O\}$ を満たすとする. このとき

$W_I = \{\psi \in \mathcal{H}^2_{\{O\}}(\Omega^2_X) \mid I\psi = 0\}$,

$W_{\hat{I}} = \{\psi \in \mathcal{H}^2_{[O]}(\Omega^2_X) \mid \hat{I}\psi = 0\}$, ただし $\hat{I} = \hat{\mathcal{O}}_{X,O} I \subset \hat{\mathcal{O}}_{X,O}$

とおく. $W_I, W_{\hat{I}}$ は有限次元ベクトル空間である. 次が成立する.

定理 (Grothendieck local duality) 次の pairing は非退化である

(1) $\mathcal{O}_{X,O}/I \times W_I \longrightarrow \mathbb{C}$

(2) $\mathcal{O}_{X,O}/\hat{I} \times W_{\hat{I}} \longrightarrow \mathbb{C}$

微分形式のなす層 Ω^2_X の替わりに正則函数のなす層を考え, 原点 O に台を持つ algebraic local cohomology

$$H^2_{[O]}(\mathcal{O}_X) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X,O}/(x,y)^k, \mathcal{O}_X)$$

を用いて

$$H_I = \{\sigma \in H^2_{[O]}(\mathcal{O}_X) \mid I\sigma = 0\}$$

とおく. $W_{\hat{I}} = \{\sigma \cdot dx \wedge dy \mid \sigma \in H_I\}$ であるが, $W_I \cong W_{\hat{I}}$ が成り立つので

$$W_I = \{\sigma \cdot dx \wedge dy \mid \sigma \in H_I\}$$

を得る. 以上のことから, (微分形式 $dx \wedge dy$ を固定しておけば), H_I は剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/I$ の双対ベクトル空間と見做せることが分かる.

定義から明らかなように, ベクトル空間 H_I はイデアル I の生成元から直接求めることができる.

例 3 (E_{12} 特異点)

$f(x,y) = x^3 + y^7 + xy^5$ に対し, イデアル J を $J = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \subset \mathcal{O}_{X,O}$ で定める. $f = 0$ は原点 O を特異点として持つ. その Milnor number $\mu_f = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/J)$ は 12 である. 多項式 f は weight vector $\frac{1}{12}(7,3)$ に関し semi quasihomogeneous であることに注目し, この weight vector と両立する項順序に従って, ベクトル空間 H_J の基底を求める

$$\begin{bmatrix} 1 \\ xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ xy^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ xy^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x^2y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ xy^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x^2y^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ xy^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x^2y^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ xy^6 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ x^3y \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x^2y^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x^2y^5 \end{bmatrix} - \frac{5}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ xy^7 \end{bmatrix} - \frac{5}{21}\begin{bmatrix} 1 \\ x^3y^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x^2y^6 \end{bmatrix} - \frac{5}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ x^4y \end{bmatrix} - \frac{5}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ xy^8 \end{bmatrix} - \frac{5}{21}\begin{bmatrix} 1 \\ x^3y^3 \end{bmatrix}$$

を得る

正則函数 $h(x,y)$ の原点でのテイラー展開を $h(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} x^i y^j$ とおく, 剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/J$ と W_J あるいは H_J との双対性は多変数留数で与えられていることから, $h(x,y)$ がイデアル J に属する条件は,

$$c_{0,0} = c_{0,1} = c_{0,2} = c_{1,0} = c_{0,3} = c_{1,1} = c_{0,4} = c_{1,2} = c_{0,5} - \frac{1}{3}c_{2,0} = 0$$

$$c_{1,3} = c_{1,4} - \frac{5}{7}c_{0,6} - \frac{1}{21}c_{2,1} = c_{1,5} - \frac{5}{7}c_{3,0} - \frac{5}{7}c_{0,7} - \frac{5}{21}c_{2,2} = 0$$

で与えられる.

収束冪級数環においてイデアルメンバーシップ問題を解くには通常、まずイデアルのスタンダード基底を求め, 与えられた関数をそれらスタンダード基底による剰余を計算することで判定する. 割り算が必要になる. それに対し, ここで示したように local cohomology を用いると, メンバーシップの判定に割り算を必要としない点に留意されたい.

H_J の基底をなす 12 個の local cohomology class の主項に対応する 12 個の単項式

$$1, y, y^2, x, y^3, xy, y^4, xy^2, y^5, xy^3, xy^4, xy^5$$

は剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/J$ の単項式基底である. 先にに与えた, H_J の基底は, この単項式基底の (Grothendieck local duality に関する) 双対基底に他ならない. 従って, H_J の基底を用いれば, イデアル J を法とする normal form の計算が直ちにできる. local cohomology を使えば, normal form の計算に割り算が必要ないことが分かる. 同様に, local cohomology を用いることで, イデアルのスタンダード基底の計算も行うことができる.

半擬斉次孤立特異点のヤコビイデアルに付随した local cohomology の計算, Grothendieck local duality, local cohomology を用いたスタンダード基底の計算等については, 論文 [18] を参照されたい. 論文 [12] にアルゴリズムの説明がある. 一般の零次元イデアルに付随した local cohomology の計算とその応用等に関しては, 論文 [27, 28, 35] を参照されたい. 論文 [36] に計算アルゴリズムの説明がある.

4 Logarithmic vector fields

さて, ベクトル場 $v = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, $(a, b \in \mathcal{O}_{X,O})$ が平面曲線 $S = \{(x,y) \in X \mid f(x,y) = 0\}$ に沿って対数的であるというのは

$$a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = c(x,y)f(x,y)$$

を満たす $c(x,y) \in \mathcal{O}_{X,O}$ が存在することであった. この式をみると, f が多項式のとき, 多項式環において $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -f$ のシジジーの計算をすれば, a, b, c の組が求まることに気が付く. しかし, ここで解きたい問題は, 対数的ベクトル場のなす加群 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としての生成元を求める事であった. 本来, 収束冪級数環を係数とする世界での問題を多項式環の世界での問題にそのまま置き換えて考えた場合計算によって得られる生成元は, 収束冪級数環を係数環とする世界での生成元としては余分なものを多く含むことになる.

以下, local cohomology を用いることで, 原点に特異点を持つ平面代数曲線に沿う対数的ベクトル場のなす加群 $\mathcal{D}er_{X,O}(-\log S)$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としての生成元を求めるアルゴリズムを紹介する.

孤立特異点を持つ超曲面に沿う対数的ベクトル場の計算法として, polar variety の概念に基づくことで導出した Method I([16, 29]) と, polar variety の概念を使わないで [13] の結果に基づいて導出した Method II ([17]) がある. 本研究では後者を採用する.

平面代数曲線の定義多項式 f に対するヤコビイデアルを $J = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \subset \mathcal{O}_{X,O}$ で定め, イデアル商

$$J : (f) = \{c(x,y) \in \mathcal{O}_{X,O} \mid c(x,y)f(x,y) \in J\}$$

を考える. 次の補題は定義より明らかである.

補題 次は同値

(i) $s(x,y) \in (J : (f))$

(ii) $a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = s(x,y)f(x,y)$ を満たす $a(x,y), b(x,y) \in \mathcal{O}_{X,O}$ が存在する.

Local cohomology $H_J = \{\sigma \in H^2_{[O]}(\mathcal{O}_{X,O}) \mid \frac{\partial f}{\partial x}\sigma = \frac{\partial f}{\partial y}\sigma = 0\}$ から H_J 自身への写像 $m_f : H_J \longrightarrow H_J$ を $m_f(\sigma) = f(x,y)\sigma$ で定め, その像集合を $F = \mathrm{Im}(m_f) \subset H_J$, 写像 m_f の核 $\mathrm{Ker}(m_f)$ を K とおく.

$K = \{\sigma \mid f\sigma = \frac{\partial f}{\partial x}\sigma = \frac{\partial f}{\partial y}\sigma = 0\}$ が成り立つ. Grothendieck local duality より $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(K) = (f, J)$ が従うので,

$$\dim_{\mathbb{C}}(K) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/(f,J))$$

を得るが, この右辺は, f の Tjurina 数 τ_f に他ならない,

次が成り立つ.

補題 ([30])

(i) $0 \longrightarrow K \longrightarrow H_J \longrightarrow F \longrightarrow 0$ は exact

(ii) $\dim(F) = \mu_f - \tau_f$, ただし, μ_f は MIlnor number, τ_f は Tjurina number である.

補題 ([30]) 次が成り立つ

$J : (f) = Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(F)$

まず最初に H_J を求め, 次に, ベクトル空間 $F = \{f(x,y)\sigma \mid \sigma \in H_J\}$ を求めた後, その annihilator のスタンダード基底を計算すれば, 収束冪級数環におけるイデアル商 $J : (f)$ のスタンダード基底を求めたことになる. この方法は, 収束冪級数環におけるイデアル商の計算法としては, 通常の方法より平易である.

イデアル商 $J : (f)$ のスタンダード基底を SB で表す.

補題

$s(x,y) \in \mathrm{SB}$ に対し,

$$a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = q(x,y)s(x,y)f(x,y), \quad q(0,0) \neq 0$$

を満たす, 多項式の組 $a(x,y), b(x,y), q(x,y) \in K[x,y]$ が存在する

この補題により, 収束冪級数環を係数とする加群の問題を, 多項式環における計算に帰着させることが可能となった.

S に沿って対数的なベクトル場 $v = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ が $v(f) = 0$ をみたす場合はその Camacho-Sad-Suwa 指数の値は, 明らかに 0 であるので, Camacho-Sad-Suwa 指数の計算のためには, ベクトル場として非自明なもの, 即ち $v(f) = cf$ とおいたとき, $c \neq 0$ をみたすもののみを考えれば十分である. いままでの議論により, 次の計算法を得る

Step 1 compute H_J

Step 2 compute a basis of $F = \{f(x,y)\sigma \mid \sigma \in H_J\}$

Step 3 compute a standard basis SB of $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(F)$

Step 4 for $s(x,y) \in \mathrm{SB}$, compute a syzygy of

$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -s(x,y)f(x,y))$

Step 2, 3 の計算は, 文献 [13] にあるアルゴリズムで行える. Step 4 では [14] で導入した手法を用いることで計算の効率化を図ることができる,

この計算法は, 論文 [17] で既に導出してあり, Bruce-Robert Milnor 数の計算アルゴリズムに用いられている.

計算例をひとつ与える.

例 4 E_{12} 特異点

例 3 と同じ特異点である. 定義多項式は $f(x,y) = x^3 + y^7 + xy^5$, Milnor number μ_f は 12, Tjurina number τ_f は 11 である. 従って, ベクトル空間 $F = \mathrm{Im}(m_f)$ の次元は,$\mu_f - \tau_f = 12 - 11$ より $\dim(F) = 1$ となる. イデアル商 $J : (f)$ のスタンダード基底 SB は, SB $= \{x, y\}$ である.

曲線 $S = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ に沿って対数的なベクトル場の生成元として

$$v_1 = (10x^2 - 1323xy - 211xy^2 - 45y^4)\frac{\partial}{\partial x} + (27+4y)(x - 21y^2)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$v_2 = (3x^2 + 63xy^2 + 10xy^3 + 2y^5)\frac{\partial}{\partial x} + (27+4y)y^3\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. ベクトル場の係数の行列式を計算すると

$$\det\begin{vmatrix} 10x^2 - 1323xy - 211xy^2 - 45y^4 & (27+4y)(x-21y^2) \\ 3x^2 + 63xy^2 + 10xy^3 + 2y^5 & (27+4y)y^3 \end{vmatrix} = 3(27+4y)f(x,y)$$

を得る. 右辺の f の係数は, 原点で零でないので, v_1, v_2 は斉藤基底である.

Remark: 論文 [16, 29] で導入した Mathod I を使って対数的ベクトル場を求めると

$$v_1 = (-10x^2 + 1323xy + 211xy^2 + 45y^4)\frac{\partial}{\partial x} - (27+4y)(x-21y^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_2 = (63x^2 + 10x^2y + xy^3 - 3y^5)\frac{\partial}{\partial x} - (27+4y)xy\frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_3 = (-3x^2 - 63xy^2 - 10xy^3 - 2y^5)\frac{\partial}{\partial x} - (27+4y)y^3\frac{\partial}{\partial y}$$

あるいは

$$v_1' = (343+50y)(21x^2 - y^5)\frac{\partial}{\partial x} - (25x^2 + 3087xy + 415xy^2 + 49y^4 + 25y^5)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} v_2' = {} & 3(343+50y)(7203xy + 245y^4 - 125y^5)\frac{\partial}{\partial x} \\ & +(-151263x + 3125x^2 + 3675xy + 3176523y^2 - 625xy^2 + 427035y^3 + 875y^4 + 3125y^5)\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$v_3' = (343+50y)y^6\frac{\partial}{\partial x} + (-147x^2 - 25x^2y + 5xy^3 - 154y^5 - 25y^6)\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. Method I を使うと斉藤基底を直接求めることが出来ない.

5 Camacho-Sad-Suwa index と Grothendieck local residues

原点を特異点として持つ平面曲線 $S = \{(x,y) \in X \mid f(x,y) = 0\}$ と, S に沿って対数的なベクトル場

$$v = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log(S))$$

が与えられたとする．さらに, $v(f) = c(x,y)f(x,y)$ を満たす $c(x,y)$ も求めてあるとする．

定理 (T. Suwa[22]) $\frac{\partial f}{\partial y}$ と f は互いに素であるとする．このとき, 次が成り立つ

$$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;S) = \mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{df}{f} \wedge \left(\frac{cdx}{a}\right)\right).$$

$S = \cup_{i=1}^r C_i$ は S の既約分解であるとする, 各 C_i は $C_i = \{(x,y) \mid f_i(x,y) = 0\}$ で与えられるとする

定理 (T. Suwa[22]) $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ と f_i は互いに素とする．このとき, 次が成り立つ

$$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;S,C_i) = \mathrm{res}_{\{O\}}\left(\frac{df_i}{f_i} \wedge \left(\frac{cdx}{a}\right)\right).$$

Remark: $\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_i) = \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_i,C_i)$ は, Lins Neto [10] が導入した指数と一致する．

次の結果も諏訪立雄による

定理 (T. Suwa [22]) 次が成り立つ

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C,C_i) = \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_i) + \sum_{j\neq i}(C_i \cdot C_j)_O$

ただし, $(C_i \cdot C_j)_O$ は原点 O での C_i と C_j の交点数である．

さて, 論文 [31, 32] において, Grothendieck local residues の値を計算するアルゴリズムを与えてある．[32] にある計算法は, local cohomology に対する transformation law を用いる方法であり, 基本的には [24] にあるアイデアに基づいているが数式処理の技法を取り入れる等の工夫を施すことで計算の効率化を図ってある．[31] に与えたアルゴリズムは, [33, 25, 26, 34] と同様に, 原点に台を持つ local cohomology の満たす線形偏微分方程式系が, simple なホロノミー系であること ([37]) に注目することで得た計算法である．従来の計算法と異なり, 階数の高い偏微分作用素の利用を避け 1 階の線形偏微分作用素のみを用いて Grothendieck residue mapping を与える local cohomology class を特徴づけ, その結果を用いて Grothendieck local residue の値を計算するというアルゴリズムである．

[31, 32] にあるアルゴリズムを用いることで Camacho-Sad-Suwa 指数を, 効率良く求めることが出来る．

次の例は, 諏訪立雄の論文 [22] にあるが, [22] とは異なる方法で計算している．

Example $v = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}$

$S = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, ただし $C_1 = \{x=0\}, C_2 = \{y=0\}, C_3 = \{x^3 - y^2 = 0\}$ とおいた．

Grothendieck local residue の計算を行う．

$$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_1) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_2 \cup C_3, C_2) = \frac{9}{2}, \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_2 \cup C_3, C_3) = 9$$

を得る．原点での C_2 と C_3 の交点数は $(C_2 \cdot C_3)_O = 3$ であるので

$$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_2) = \frac{3}{2}, \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v;C_3) = 6$$

を得る．

6　斉藤基底と Camacho-Sad-Suwa 指数

4 節で紹介したアルゴリズムを用いて, 与えられた特異平面代数曲線に沿う対数的ベクトル場をもとめ, 斉藤基底であることを確かめる. さらに, 第 5 節で紹介したアルゴリズムを用いて, それらの Camacho-Sad-Suwa 指数を求めてみる.

例 ($J_{3,1}$ singularity) $f = x^3 + x^2y^3 + y^{10}$

f の Milnor number, Tjurina number は, それぞれ $\mu_f = 17, \tau_f = 15$ である, イデアル商 $J : (f)$ のスタンダード基底は $\mathrm{SB} = \{x, y^2\}$ で与えられる. 対数的ベクトル場を求める.

$$v_1 = \left(\frac{2}{3}x^2 + 5x^2y + \frac{1}{6}xy^4 - \frac{1}{9}y^7\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{2}{9}xy + \frac{3}{2}xy^2\right)\frac{\partial}{\partial y},$$
$$v_2 = \left(\frac{7}{10}xy^2 + 5xy^3 + \frac{1}{6}y^6\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{1}{30}x + \frac{1}{5}y^3 + \frac{3}{2}y^4\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. ベクトル場 v_1, v_2 は $v_1(f) = (2 + 15y)xf(x, y),\ v_2(f) = (2 + 15y)y^2f(x, y)$ を満たす.

ベクトル場の係数のなす行列式を求めると

$$\det \begin{vmatrix} \frac{2}{3}x^2 + 5x^2y + \frac{1}{6}xy^4 - \frac{1}{9}y^7 & \frac{2}{9}xy + \frac{3}{2}xy^2 \\ \frac{7}{10}xy^2 + 5xy^3 + \frac{1}{6}y^6 & -\frac{1}{30}x + \frac{1}{5}y^3 + \frac{3}{2}y^4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{60}(2 + 15y)f(x, y)$$

を得る. v_1, v_2 は斉藤基底である.

Grothendieck local residue の値を求めることで, Camacho-Sad-Suwa 指数を求める

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S) = 27,\ \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S) = \frac{200}{7}$

を得る.(computation time: 0.016 sec,　0.094 sec).

例 ($J_{3,0}$ singularity)　$f = x^3 + x^2y^3 + xy^7 + y^9$

f の Milnor number, Tjurina number はそれぞれ $\mu_f = 16,\ \tau_f = 15$ である. イデアル商 $J : (f)$ のスタンダード基底は $\mathrm{SB} = \{x, y\}$ である. 対数的ベクトル場を求める.

$$v_1 = \left(19623x^2 + 20923x^3 - 3546x^2y + 25469x^2y^2 + \frac{2989}{3}x^2y^3 - 422xy^4 - 196xy^5 - 1899y^7\right)\frac{\partial}{\partial x}$$
$$+ \left(-\frac{671}{3}x^2 + 6541xy + 5978x^2y - 760xy^2 + 8462xy^3 - \frac{427}{3}xy^4 + 211y^6\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$v_2 = \left(19623xy + 20923x^2y - 2913xy^2 + 25469xy^3 + \frac{2983}{3}xy^4 - 422y^5 + 1281y^6\right)\frac{\partial}{\partial x}$$
$$+ \left(-633x - \frac{671}{3}xy + 6541y^2 + 5978xy^2 - 1182y^3 + 8462y^4 - \frac{427}{3}y^5\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. ベクトル場 v_1, v_2 は

$$v_1(f) = (58869 + 62769x - 10638y + 75736y^2)xf(x, y)$$
$$v_2(f) = (58869 + 62769x - 10638y + 75736y^2)yf(x, y)$$

を満たす.

ベクトル場の係数の行列式を計算すると $-211(58869 + 62769x - 10638y + 75736y^2)f(x, y)$ を得る.

従って, v_1, v_2 は斉藤基底である.

Grothendieck local residue の計算により, Camacho-Sad-Suwa 指数を求めると

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S) = \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S) = 27$

を得る (computation time: 2.55sec, 1.61sec).

例 (Z_{11} singularity) $f = x^3y + xy^4 + y^5$

f の Milnor number, Tjurina number はそれぞれ $\mu_f = 11,\ \tau_f = 10$ である. イデアル商 $J : (f)$ のスタンダード基底は $\mathrm{SB} = \{x, y\}$ である. 対数的ベクトル場を求める.

$$v_1 = (180x^2 + 33x^2y - xy^2 - 15y^3)\frac{\partial}{\partial x} + (135xy + 22xy^2 + 3y^3)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$v_2 = (3x^2 + 180xy + 33xy^2 + 11y^3)\frac{\partial}{\partial x} + (-9xy + 135y^2 + 22y^3)\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る. ベクトル場 v_1, v_2 は $v_1(f) = (675 + 121y)xf(x, y),\ v_2(f) = (675 + 121y)yf(x, y)$ を満たす.

行列式の計算を行うと

$$\det \begin{vmatrix} 180x^2 + 33x^2y - xy^2 - 15y^3 & 135xy + 22xy^2 + 3y^3) \\ 3x^2 + 180xy + 33xy^2 + 11y^3 & -9xy + 135y^2 + 22y^3 \end{vmatrix} = -3(675 + 121y)f(x, y)$$

を得るので, v_1, v_2 は斉藤基底である.

Grothendieck local residue の値を求めることで, Camacho-Sad-Suwa 指数を求める

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S) = \frac{75}{4}, \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S) = 15$

を得る.

さて, $x^3y + xy^4 + y^5 = y(x^3 + xy^3 + y^4)$ より, S の既約分解

$$S = C_1 \cup C_2,\ \text{ただし}\ C_1 = \{y = 0\}, C_2 = \{x^3 + xy^3 + y^4\}$$

を得る. Camacho-Sad-Suwa 指数を求めると

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S, C_1) = \dfrac{15}{4}, \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S, C_2) = 15, \quad \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S, C_1) = 0,\ \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S, C_2) = 15$

を得る.

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S) = \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S, C_1) + \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_1; S, C_2),$

$\mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S) = \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S, C_1) + \mathrm{Ind}_{\{O\}}(v_2; S, C_2),$

が成り立つことを確認できる.

Remark: 平面代数曲線が複素解析的に既約であるか否かは, 論文 [21] にあるアルゴリズムで判定できる.

参 考 文 献

[1] C. Camacho and P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Annals of Math. **115** (1982), 579–595.

[2] C. Camacho e P.Sad, Pontos singulares de equacoes differenciais analiticas, IMPA, Rio de Janeiro, 1987

[3] F. Cano, D. Cerveau et J. Déserti, Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers, Belin 2013.

[4] F. Cano, N. Corral and R. Mol, Local polar invariants for plane singular foliations, Expo. Math. **37** (2001), 145-164.

[5] F. Cano, N. Corral and D. Senevilla-Sanz, Computing a Saito basis from a standard basis, arXiv:2401.00316.

[6] Y. Genzmer, Construction of foliations with prescribed separatrix, Ergodic Theory Dynam. Systems **28** (2008), 817-842.

[7] Y. Genzmer and M. E. Hernandes, On the Saito number of plane curves arXiv:2404.13729v1, 2024.

[8] Y. Genzmer and M. E. Hernandes, On the Saito's basis and the Tjurina number for plane branches, Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 3693-3707.

[9] H. Hauser and G. Müller, Affine varieties and Lie algebra of vector fields, Manuscripta Math. **80** (1993), 309-337.

[10] A. Lins Neto, Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two. Lecture Notes in Math. **1345** (1988), 192–232.

[11] F. Lourengo and F. Reis, A brief survey on residue theory of holomorphic foliations, Matemática Contemporânes, **53** (2023), 181-212.

[12] K. Nabeshima and S. Tajima, On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases, ISSAC 2014, Proc. the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, (2014) 351-358.

[13] K. Nabeshima and S. Tajima, An algorithm for computing Tjurina stratifications of μ-constant deformations using algebraic local cohomology, Lecture Notes in Computer Science **8592**, Springer, (2014), 523–530.

[14] K. Nabeshima and S. Tajima, Solving extended ideal membership problems in rings of convergent power series via Gröbner bases, Lecture Notes in Computer Sciences **9582**, Springer, (2016), 252–267.

[15] K. Nabeshima and S. Tajima, Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, Journal of Symbolic Computation. **82** (2017), 91–122,

[16] K. Nabeshima and S. Tajima, Computing logarithmic vector fields and Bruce-Roberts Milnor numbers via local cohomology classes, Revue Roumaine Math. Pures et Appl. **64** (2019), 521–538.

[17] K. Nabeshima and S. Tajima, A new algorithm for computing logarithmic vector fields along an isolated singularity and Bruce-Roberts Milnor ideals, Journal of Symbolic Computation **107** (2021), 190–208.

[18] Y. Nakamura and S. Tajima, On weighted degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, Advanced Studies in Pure Math. **46** (2007, 103-117.

[19] K. Saito, Quasihomogene isolierts Singularitaten von Hyperflächen, Invent. math. **14** (1971), 123-142.

[20] K, Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **27** (1980), 265–291.

[21] T. Shibuta, Irreducibility criterion for algebroid curves, Math. Comp. **82** (2013), 531-554.

[22] T. Suwa, Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces, Proc. AMS. **123** (1995), 2989–2997.

[23] T. Suwa, Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations, Hermann, 1998.

[24] 田島慎一, Grothendieck duality の計算と多変数 Hermite 補間問題, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085** (1999), 82-90.

[25] 田島慎一, Algorithms for computing Grothendieck local residues —improvement with a rescue step—, 京都大学数理解析研究所講究録 **1233** (2001), 67–81.

[26] 田島慎一, Noether 作用素と多変数留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録 **1431** (2005), 123–136.

[27] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1456**(2005), 126-132.

[28] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1568** (2007), 74-80.

[29] S. Tajima, On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules, RIMS Kokyuroku Bessatsu **40** (2013), 41-51.

[30] S. Tajima, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, Proc. Topics on Real and Complex Singularities, World Scientific (2014), 189-200.

[31] S. Tajima and K. Nabeshima, Computing Grothendieck point residues via solving holonomic systems of first order linear partial differential equations, ISSAC2021, Proc. the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (2021), 361–368.

[32] S. Tajima and K. Nabeshima, An effective method for computing Grothendieck point residue mappings, Journal of Algebra **593** (2022), 568–588.

[33] 田島慎一, 中村弥生, 多変数有理関数の留数計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085** (1999), 71–81.

[34] S. Tajima and Y. Nakamura, Computational aspects of Grothendieck local residues, Séminaire et Congrès **10**, Singularités Franco-Japonaises, Société Mathématique de France (2005), 287–305.

[35] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, J. Symbolic Computation, **44** (2009), 435–448.

[36] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Advanced Studies in Pure Mathematics, **56** (2009), 341–361.

[37] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, Multidimensional residue calculus and holonomic D-modules, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033** (1998), 59–70.

[38] C. T. C. Wall, Singular Points of Plane Curves, Londan Math. Soc. Student Texts **63** Cambridge Univ. Press (2004).