

包括的 Gröbner 基底系を用いた 6 自由度ロボット マニピュレータの逆運動学問題の解法

Solving Inverse Kinematic Problem for a 6-Degree-of-Freedom Robot Manipulator Using Comprehensive Gröbner Systems

筑波大学 数理物質科学研究群 岡崎 拓夢^{*1}

TAKUMU OKAZAKI

DEGREE PROGRAMS IN PURE AND APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF TSUKUBA

筑波大学 数理物質系 照井 章^{*2}

AKIRA TERUI

INSTITUTE OF PURE AND APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF TSUKUBA

筑波大学 図書館情報メディア系 三河 正彦^{*3}

MASAHIKO MIKAWA

FACULTY OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA SCIENCE

UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

This paper proposes a solution method for the inverse kinematics problem of the 6-DOF robot manipulator “myCobot 280 m5” [2], and implements and evaluates the algorithm.

There are two types of methods for solving the inverse kinematics problem of a 6-DOF robot manipulator: numerical and analytical. The numerical solution method approximates the solution of the inverse kinematics problem using the Newton method and other methods, whereas the analytical solution method rigorously determines the solution based on the geometric relationship of the robot manipulator and other factors. However, because of its strong dependence on the structure of the robot manipulator, the analytical solution method does not exist for many 6-DOF robot manipulators. On the other hand, since the numerical solution method is relatively easy to implement, numerical solutions are generally used to solve inverse kinematics problems for 6-DOF robot manipulators. However, if an analytical solution method exists for 6-DOF robot manipulators, it would be faster, more stable, and more accurate than the numerical solution method.

In this paper, based on Pieper [11], we propose an analytical solution method for the inverse kinematics problem of myCobot, focusing on the structure of myCobot, and implement and evaluate the algorithm.

^{*1} 〒 305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 E-mail: s2320132@u.tsukuba.ac.jp

^{*2} 〒 305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 E-mail: terui@math.tsukuba.ac.jp

^{*3} 〒 305-8550 茨城県つくば市春日 1-2 E-mail: mikawa@slis.tsukuba.ac.jp

1 はじめに

本研究では、多変数多項式環のイデアルの包括的 Gröbner 基底系を用いた 6 自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題の解法について述べる。6 自由度ロボットマニピュレータとは、リンク、ジョイント、エンドエフェクタの 3 個の基本要素から構成されたロボットのうち、ロボット全体の自由度の総数が 6 のものを指す。

ロボットマニピュレータの逆運動学問題 [16] は、エンドエフェクタが空間のある特定の座標にある特定の姿勢で位置するときの各ジョイントの配置（角度）を求める問題である。一般にロボットマニピュレータの自由度が 3 自由度であれば、位置に関する逆運動学問題、6 自由度であれば、位置と姿勢に関する逆運動学問題を求めることが可能である。6 自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題の解法は数値的解法と解析的解法の 2 つがあるが、多くのマニピュレータには解析的解法が存在しないため、6 自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題は数値的解法が主流となっている。しかし、仮に 6 自由度ロボットマニピュレータに解析的解法が存在していれば、数値的解法よりも高速かつ安定に、より正確な解を求めることができる。数式処理等による解析的解法としてはこれまでにいくつかの種類の特定のマニピュレータに対する解法が提案されている [4, 7]。

軌道計画問題 [12, 14] は、エンドエフェクタがある 2 点間を与えられた軌道上を移動するときのジョイントの配置の列を求める問題である。このとき、軌道計画問題の通過地点において逆運動学問題の解が複数見つかる場合がある。

吉澤 [17] および Yoshizawa et al. [14] は包括的 Gröbner 基底系 [13] およびそれに基づく限量子消去 [3] を用いて、ある 2 点間を結ぶ線分上の軌道計画問題の解法を示した。白戸 [15] および Shirato et al. [12] はスプライン補間を用いて曲線における軌道計画問題の解法を示した。ここで彼らは、6 個のジョイントを持つ 6 自由度ロボットマニピュレータに対し、制御するジョイントを 3 個に制限して 3 自由度ロボットマニピュレータとして、エンドエフェクタの位置にのみ着目した軌道計画問題に取り組んでいた。しかし、実世界では作業用ロボットのようにエンドエフェクタの姿勢を指定した運動が求められる場合が多い。そのため、6 自由度ロボットマニピュレータとして姿勢を考慮した軌道計画問題を行う必要がある。

本研究では、軌道計画問題の前段階として、6 自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題の解析的解法の提案を行う。前述の通り、一般には 6 自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題を解析的に求めるのは非常に困難とされている [11]。そこで、本研究で使用するロボットマニピュレータの形状に着目し、Pieper [11] の提案した手法を基に、逆運動学問題の解析的解法を導出する。その後、逆運動学問題を解くためのアルゴリズムの開発、実装、評価を行う。アルゴリズムの実装には数式処理システム Risa/Asir [9] を用いる。最後にまとめと今後の課題について述べる。

2 準備事項

本章では、逆運動学問題の解法の導出において必要な、いくつかの問題について述べる。まず、第 2.1 節で包括的 Gröbner 基底系の定義について述べ、第 2.2 節では座標系の定義や座標変換の方法について述べる。第 2.3 節ではエンドエフェクタの姿勢として用いるロール・ピッチ・ヨーについて述べる。

2.1 包括的 Gröbner 基底系

本章では、包括的 Gröbner 基底系 [3, 13] の概要を述べる。まず、準備として必要な記号を定義する。

- K, C : 体 (C は K の代数閉包)

- $\overline{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$: 主変数の有限集合
- $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$: パラメータ変数の有限集合 ($\overline{X} \cap \overline{A} = \emptyset$)
- $K[\overline{A}], K[\overline{X}]$: K 上の多項式環
- $K[\overline{A}, \overline{X}]$: 係数環 $K[\overline{A}]$ 上の多項式環
- $T(\overline{X})$: $\overline{X}$ の単項式の集合
- $I \subseteq K[\overline{X}]$: イデアル
- $V_c(I) = \{\bar{c} \in C^m \mid \forall f \in I, f(\bar{c}) = 0\}$: C 上の I のアフィン多様体
- $<_{\overline{X}}$: $T(\overline{X})$ 上の項順序
- $LC(f)$: $f \in K[\overline{A}, \overline{X}]$ の $<_{\overline{X}}$ に関する先頭係数

定義 1 (分割 [3, Definition 10])

S を代数的閉体 C^n の部分集合とする。 S の部分集合の有限集合 $\{S_1, \dots, S_t\}$ が次の 3 つの条件を満たすとき、 $\{S_1, \dots, S_t\}$ を S の代数的分割という。

1. $\bigcup_{i=1}^t S_i = S$ を満たす。
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$ を満たす。ただし、 $i \neq j$ である。
3. 各 $i \in \{1, \dots, t\}$ に対して、あるイデアル $I_1, I_2 \subseteq K[\overline{A}]$ を用いて $S = V_c(I_1) \setminus V_c(I_2)$ と表される。

また、各 S_i をセグメントという。

定義 2 (包括的 Gröbner 基底系 [3, Definition 11])

$S \subseteq C^n$ とする。このとき、有限集合 $F \subseteq K[\overline{A}, \overline{X}]$ に対して有限集合 $\mathcal{G} = \{(S_1, G_1), \dots, (S_s, G_s)\}$ が次の 4 つの条件を満たすとき、 $\mathcal{G}$ を $<_{\overline{X}}$ に関する S 上の F の包括的 Gröbner 基底系という。

1. 各 G_i は $K[\overline{A}, \overline{X}]$ の有限集合である。
2. $\{S_1, \dots, S_s\}$ は S の代数的分割である。
3. 各 $\bar{c} \in S_i$ に対して、 $G_i(\bar{c}) = \{g(\bar{c}, \overline{X}) \mid g(\overline{A}, \overline{X}) \in G_i\}$ は $<_{\overline{X}}$ に関するイデアル $\langle F(\bar{c}) \rangle \subseteq C[\overline{X}]$ の Gröbner 基底。ただし、 $F(\bar{c}) = \{f(\bar{c}, \overline{X}) \mid f(\overline{A}, \overline{X}) \in F\}$ である。
4. 各 $\bar{c} \in S_i$ に対して、任意の $g \in G_i$ で $LC(g)(\bar{c}) \neq 0$ を満たす。

2.2 座標系と座標変換

本研究では、Elephant Robotics 社が開発する図 1 のロボットマニピュレータ「myCobot 280 m5」[2] (以下、「myCobot」と呼ぶ) を用いる。myCobot は教育と研究に最適なマニピュレータであり、無料のオープンソースソフトウェアである ROS (Robot Operating System) [6, 10] を用いて制御することが可能である。

図 2 は myCobot の動きを分かりやすくした概略図である。また、便宜上、エンドエフェクタを joint 7 とみなす。図 2 の各 joint i ($i = 1, \dots, 7$) に対して、座標系 Σ_i ($i = 1, \dots, 7$) を設ける。座標系の原点や各軸は以下を満たすように定める。



図 1: myCobot 280 [2]

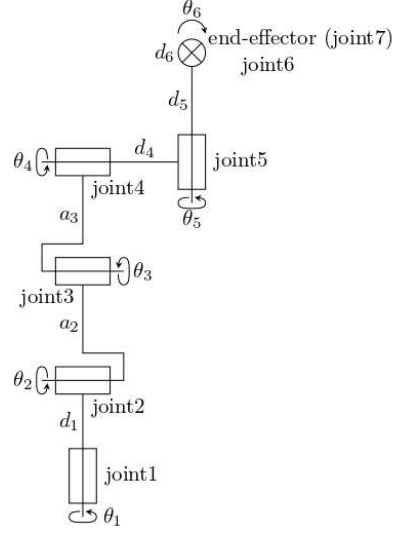


図 2: myCobot の概略図

- 原点 $\mathcal{O}_i$ は joint i の位置に合わせる
- ${}^i z$ 軸は joint i の回転軸方向を正として取る
- ${}^i x$ 軸は ${}^i y$ 軸は ROS の 3 次元可視化ツール RViz [5] に従う
- 右手系

図 3は RViz 上の各座標系を図示したものである。このとき、 Σ_1 をグローバル座標系として扱う。次に、各座標系間の座標変換行列を定義する。本研究では、ロボット工学でよく用いられる古典的 Denavit-Hartenberg の記法 [1] (以下、DH 法と呼ぶ) を拡張して用いる。まず、次の 5 個の DH パラメータを定義する。ここで、 ${}^i l_{i+1}$ は ${}^i z$ 軸と ${}^{i+1} z$ 軸の間の共通法線を表している。

- δ_i : ${}^{i+1} z$ 軸周りの ${}^i x$ 軸と ${}^{i+1} x$ 軸間の回転角度 [rad]
- a_i : 共通法線 ${}^i l_{i+1}$ の長さ [mm]
- α_i : ${}^{i+1} x$ 軸周りの ${}^i z$ 軸と ${}^{i+1} z$ 軸間の回転角度 [rad]
- d_i : 共通法線 ${}^i l_{i+1}$ と $\mathcal{O}_i$ との距離 [mm]
- θ_i : ${}^i z$ 軸周りの共通法線 ${}^i l_{i+1}$ と ${}^i x$ 軸間の回転角度 [rad]

座標系 Σ_{i+1} から座標系 Σ_i への座標変換は次の手順で行う。

1. ${}^{i+1} z$ 軸周りに δ_i 回転させる ($\text{Rot}({}^{i+1} z, \delta_i)$)。
2. ${}^{i+1} x$ 軸向きに a_i だけ平行移動させ、 ${}^i z$ 軸上に移動する ($\text{Trans}({}^{i+1} x, a_i)$)。
3. ${}^{i+1} x$ 軸まわりに α_i 回転させ、 ${}^{i+1} z$ 軸と ${}^i z$ 軸を合わせる ($\text{Rot}({}^{i+1} x, \alpha_i)$)。
4. ${}^i z$ 軸まわりに θ_i 回転させ、 ${}^{i+1} x$ 軸と ${}^i x$ 軸を合わせる ($\text{Rot}({}^i z, \theta_i)$)。

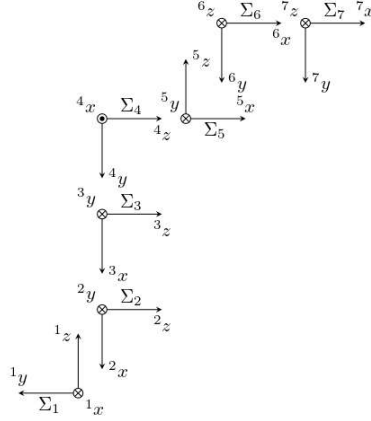


図 3: myCobot の各ジョイントに対する座標系

joint	a_i	α_i	d_i	θ_i	δ_i
1	0	$\pi/2$	131.56	θ_1	$-\pi/2$
2	-110.4	0	0	θ_2	0
3	-96	0	0	θ_3	$-\pi/2$
4	0	$\pi/2$	64.62	θ_4	$\pi/2$
5	0	$-\pi/2$	73.18	θ_5	0
6	0	0	48.6	θ_6	0

表 1: myCobot の DH パラメータ

5. ${}^i z$ 軸向きに d_i だけ平行移動させ、原点 $\mathcal{O}_i$ と $\mathcal{O}_{i+1}$ を合わせる ($\text{Trans}({}^i z, d_i)$)。

したがって、座標系 Σ_{i+1} から座標系 Σ_i への変換行列 A_i は次のように行列の積で表される。

$$A_i = \text{Trans}({}^i z, d_i) \text{Rot}({}^i z, \theta_i) \text{Rot}({}^{i+1} x, \alpha_i) \text{Trans}({}^{i+1} x, a_i) \text{Rot}({}^{i+1} z, \delta_i) \quad (1)$$

エンドエフェクタの座標系 Σ_7 からグローバル座標系 Σ_1 への変換行列を A とすると、 A は式 (1) の A_i の積で表すことができる。したがって、次のように表される。

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (2)$$

実際に計算を行う場合は、myCobot における DH パラメータを式 (2) に代入すれば良い。myCobot における DH パラメータは表 1 の通りである。

2.3 ロール・ピッチ・ヨー

エンドエフェクタの姿勢は直交する 3 個の単位ベクトルで表現可能である。したがって、エンドエフェクタに対応する座標系、すなわち座標系 Σ_7 の姿勢に対応させることが可能である。 Σ_7 の x 軸、 y 軸、 z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ とすると、エンドエフェクタの姿勢は次の 3×3 行列で表される。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

上式のように9個の成分で表現可能であるが、回転の最小自由度である3自由度の変数で表現することが望ましい。そこで、飛行機等の姿勢表現に用いられるロール・ピッチ・ヨー角を用いて表現する。

ロール・ピッチ・ヨーは3次元の回転行列の表現方法の一つである。まず、 z 軸周りに γ 回転させ（ヨー角）、次に y 軸周りに β 回転させる（ピッチ角）。最後に、 x 軸周りに α 回転させる（ロール角）ことで、3次元上の任意の姿勢を表現することができる。 z 軸、 y 軸、 x 軸周りの回転行列をそれぞれ $\text{Rot}_z, \text{Rot}_y, \text{Rot}_x$ とすると、エンドエフェクタの姿勢はこれらの積で表される。すなわち、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} &= \text{Rot}_x \text{Rot}_y \text{Rot}_z \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

3 myCobot の逆運動学問題

本章では、myCobot の逆運動学問題について述べる。まず、一般の6自由度ロボットマニピュレータの順運動学問題と逆運動学問題の概要について述べ、その後、myCobot の構造に着目して逆運動学問題の解析的解法の導出を行う。

3.1 順運動学問題と逆運動学問題

ロボットマニピュレータの順運動学問題は、ロボットマニピュレータのジョイントの角度が与えられたときのロボットマニピュレータのエンドエフェクタの姿勢と位置を求める問題である。すなわち、エンドエフェクタの姿勢と位置からジョイントの角度を求める逆運動学問題とは逆の操作を行なう問題である。

第2.2節において、DH法を用いてエンドエフェクタの座標系 (Σ_7) からグローバル座標系 (Σ_1) への変換行列 A を求めた。この変換行列 A はエンドエフェクタの姿勢と位置からも求めることができる。エンドエフェクタの姿勢を第2.3節同様、ベクトル $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ とし、エンドエフェクタの位置をベクトル $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ と定める。ここで T は転置を表す記号である。このとき、 $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ は座標系 Σ_7 上の x 軸、 y 軸、 z 軸の単位方向ベクトル、 $\mathbf{p}$ は Σ_7 の原点の位置ベクトルであるため、変換行列 A を用いると、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

上式をまとめると、変換行列 A は以下のように表すことができる。

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & p_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式 (2) と式 (4) の A の各成分を比較することで、順運動学問題と逆運動学問題を解くことができる。順運動学問題を解く場合は、式 (2) に θ_i ($i = 1, \dots, 6$) を代入したものを、逆運動学問題を解く場合は式 (4) に姿勢、位置の値を代入したものをを用いて連立方程式を解けばよい。

しかし、逆運動学問題は 6 次元かつ非線形の問題となるため、一般に解析的に解くことは困難である。一方、Pieper はある特定の構造をもつ 6 自由度マニピュレータは逆運動学問題を解析的に解けることを示した [11]。6 自由度マニピュレータが 3 次元の回転を伴う球状ジョイントを含む場合は、逆運動学問題は姿勢に関する 3 次元の問題と位置に関する 3 次元の問題に分離させることができるため、解析的に解くことが可能である。また、連続する 3 個の回転ジョイントの回転軸がある 1 点で交わる場合は、その 3 個のジョイントの動きは球状ジョイントと運動学的に等価である。この場合も前述の場合と同様に、逆運動学問題は解析的に解くことが可能である。Pieper は連続する 3 個のジョイントの回転軸が 1 点で交わる場合については、その交点に着目した逆運動学問題の解法を提案している。本研究では、この解法を応用し、myCobot の逆運動学問題の解法の導出を行う。

3.2 myCobot の逆運動学問題

myCobot において回転軸が 1 点で交わるような連続するジョイントは joint 1 と joint 2、joint 4 と joint 5、joint 5 と joint 6 であり、3 軸が交わる場合は存在しない。そのため、Pieper の解法はそのまま適用できないため、その解法に基づいて myCobot の逆運動学問題の導出を行う。

joint 4 と joint 5 の回転軸の交点 $\mathbf{P}$ の座標を次のように定める。

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

このとき、 $\mathbf{P}$ は joint 5 の原点に位置している。また、 $\mathbf{P}$ の座標 x, y, z は未知数である。まずはじめに、この $\mathbf{P}$ の座標 x, y, z を用いて各 $\sin \theta_i, \cos \theta_i$ ($i = 1, \dots, 6$) を表現する。ここで、式の単純化のため、エンドエフェクタの姿勢は第 2.3 節のロール・ピッチ・ヨーで表したものは用いず、各成分である l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) のまま用いる。

交点 $\mathbf{P}$ やエンドエフェクタ、myCobot の根元同士を結ぶベクトルやジョイントの回転軸を表すベクトルは式 (1) や式 (4) を用いて 2 通りの方法で表すことができる。例として、エンドエフェクタから交点 $\mathbf{P}$ への位置ベクトルを ${}^7\mathbf{P}$ とすると、次のように 2 通りで表せる。

$${}^7\mathbf{P} = A_6^{-1} A_5^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73.18 \sin \theta_6 \\ 73.18 \cos \theta_6 \\ -48.6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$${}^7\mathbf{P} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1(-p_1 + x) + l_2(-p_2 + y) + l_3(-p_3 + z) \\ m_1(-p_1 + x) + m_2(-p_2 + y) + m_3(-p_3 + z) \\ n_1(-p_1 + x) + n_2(-p_2 + y) + n_3(-p_3 + z) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

このとき、式 (6) は $\sin \theta_6, \cos \theta_6$ で表されており、式 (7) は x, y, z で表されている。これらのベクトルの各成分は等しいので、各成分を比較することで、 $\sin \theta_6, \cos \theta_6$ を x, y, z で表すことができる。同様の議論を他

のベクトルにおいても行くと、三角関数の制約条件も含めて次の 12 個の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
F1 &= 7318 \sin \theta_6 - 10^2(l_1(-p_1 + x) + l_2(-p_2 + y) + l_3(-p_3 + z)) = 0 \\
F2 &= 7318 \cos \theta_6 - 10^2(m_1(-p_1 + x) + m_2(-p_2 + y) + m_3(-p_3 + z)) = 0 \\
F3 &= -n_3 \sin \theta_5 + \cos \theta_5(l_3 \cos \theta_6 - m_3 \sin \theta_6) = 0 \\
F4 &= (\sin \theta_5)^2 + (\cos \theta_5)^2 - 1 = 0 \\
F5 &= \sin \theta_1 + n_1 \sin \theta_5 - \cos \theta_5(l_1 \cos \theta_6 - m_1 \sin \theta_6) = 0 \\
F6 &= \cos \theta_1 - n_2 \sin \theta_5 + \cos \theta_5(l_2 \cos \theta_6 - m_2 \sin \theta_6) = 0 \\
F7 &= (\sin \theta_3)^2 + (\cos \theta_3)^2 - 1 = 0 \\
F8 &= 10^4 x^2 + 10^4 y^2 + (100z - 13156)^2 - 255799044 - 211968000 \cos \theta_3 = 0 \\
F9 &= 13156 + 11040 \cos \theta_2 + 9600(\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) - 100z = 0 \\
F10 &= (\sin \theta_2)^2 + (\cos \theta_2)^2 - 1 = 0 \\
F11 &= (\sin \theta_4)^2 + (\cos \theta_4)^2 - 1 = 0 \\
F12 &= (\cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) \cos \theta_4 - (\sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3) \sin \theta_4 + m_3 \cos \theta_6 + l_3 \sin \theta_6 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

式 (8) から座標 x, y, z が求まれば、 $\sin \theta_i, \cos \theta_i$ ($i = 1, \dots, 6$) は求められることが分かる。実際に求める時は、イデアル $\langle F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10, F11, F12 \rangle$ の

$K(l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, p_1, p_2, p_3, x, y, z)$ を係数体とする多項式環の Gröbner 基底を $\sin \theta_4 > \cos \theta_4 > \sin \theta_2 > \cos \theta_2 > \sin \theta_3 > \cos \theta_3 > \sin \theta_1 > \cos \theta_1 > \sin \theta_5 > \cos \theta_5 > \sin \theta_6 > \cos \theta_6$ の辞書式順序で求め、 $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, p_1, p_2, p_3, x, y, z$ を代入して特殊化をすればよい。

次に、交点 P の座標 x, y, z の求め方について述べる。 x, y, z も $\sin \theta_i, \cos \theta_i$ の求め方同様、様々なベクトルを 2 通りで表して比較することで求めることができる。式 (6),(7) に対して、 $\|{}^7\mathbf{P}\|^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
\|{}^7\mathbf{P}\|^2 &= 73.18^2 + 48.6^2 \\
\|{}^7\mathbf{P}\|^2 &= (p_1 - x)^2 + (p_2 - y)^2 + (p_3 - z)^2
\end{aligned}$$

したがって、 $(p_1 - x)^2 + (p_2 - y)^2 + (p_3 - z)^2 = 73.18^2 + 48.6^2$ が成り立つ。 x, y, z を求めるには x, y, z に関する関係式が 3 個あればいいので、他のベクトルに対して同様の議論を行うと、次のパラメータ付き連立代数方程式が得られる。

パラメータ n_1, n_2, n_3 (エンドエフェクタの z 軸方向の向き),
 p_1, p_2, p_3 (エンドエフェクタの位置)

変数 x, y, z (交点 P の座標)

$$\begin{aligned}
n_1(p_1 - x) + n_2(p_2 - y) + n_3(p_3 - z) &= 48.6 \\
(p_1 - x)^2 + (p_2 - y)^2 + (p_3 - z)^2 &= 73.18^2 + 48.6^2 \\
((n_1 n_2 x + (1 - n_1^2)y)(p_1 - x) - (n_1 n_2 y + (1 - n_2^2)x)(p_2 - y) - n_3(n_1 y - n_2 x)(p_3 - z))^2 \\
&= 64.62^2(73.18^2 n_3^2 + (n_2(p_1 - x) - n_1(p_2 - y))^2)
\end{aligned} \tag{9}$$

エンドエフェクタの姿勢および位置が分かれば、式 (9) は 3 変数連立方程式であるため、この連立方程式を解くことで交点 P の座標 x, y, z を求めることができる。 x, y, z が求まれば前節の手法で $\sin \theta_i, \cos \theta_i$ ($i = 1, \dots, 6$) が求まるため、 θ_i を求めることができる。すなわち、逆運動学問題を解くことが可能である。

式 (9) の連立代数方程式を解くには、エンドエフェクタの姿勢と位置を代入した後に Gröbner 基底を用いればよい。しかし、逆運動学問題を解くたびに Gröbner 基底を求めるのは、手間であり、時間もかかる。そこで、第 2.1 節で述べた包括的 Gröbner 基底系を式 (9) に適用することで、エンドエフェクタの姿勢と位置を与えれば、該当する Gröbner 基底をすぐ得ることができるため、大幅な時間短縮が可能となる。

また、今回求めた式 (9) は複号や根号を消去して包括的 Gröbner 基底系の計算をしやすいするため、一部の式で両辺を 2 乗している。そのため、得られる交点 P の座標 x, y, z や逆運動学問題の解に本来の解とは異なるものが含まれている場合がある。したがって、逆運動学問題を解いた後、順運動学問題を解いて検算を行う必要がある。

以上をまとめると、myCobot における逆運動学問題の解析的解法の流れは次のようになる。

1. (式 (8) の Gröbner 基底、式 (9) の CGS を事前に計算する。)
2. 式 (9) の CGS とエンドエフェクタの姿勢、位置から P の座標 x, y, z を求める。
3. 式 (8) の Gröbner 基底にエンドエフェクタの姿勢、位置及び x, y, z を代入し、 $\sin \theta_i, \cos \theta_i$ ($i = 1, \dots, 6$) を求める。
4. 得られた解から順運動学問題を解き、エンドエフェクタの位置が入力値と一致するもののみ出力する。

特別な姿勢の場合の解法

上記の解法はエンドエフェクタの姿勢が $n_3 = 0$ を満たす場合に用いることができない。例えば、式 (9) に $n_3 = 0$ を代入して整理すると、第 1 式と第 3 式が同じ式になり、3 変数に対して方程式が 2 個になるため、 x, y, z を一意に求めることができない。他にも、式 (8) が成立しない場合がある。したがって、これらの場合に対しては別に解法を求める必要がある。本研究では、これらの場合に対しても解法の導出を行ったが、今回は紙面の都合上、省略する。

4 アルゴリズムの実装と実験結果

本研究では、前章の逆運動学問題の解法の実装を数式処理システム Risa/Asir [9] を用いて実装を行った（以下、この実装結果をアルゴリズムと呼ぶ）。また、アルゴリズムの開発において、包括的 Gröbner 基底系の計算は Nabeshima [8] による数式処理システム Risa/Asir 上の実装を用いて行なった。計算環境は以下の通りである。

- CPU: Intel Xeon Silver 4210 3.2 GHz
- RAM: 256GB
- OS: Linux Kernel 5.4.0
- Risa/Asir: version 20230315 [9]

このとき、式 (9) に対して約 2 か月間計算を続けたが、完全な包括的 Gröbner 基底系は得られなかった。しかし、最初の 1 個のセグメントとそれに対応する Gröbner 基底については約 2.59 秒で得られたため、本アルゴリズムはこのセグメントを用いて実装を行なった。

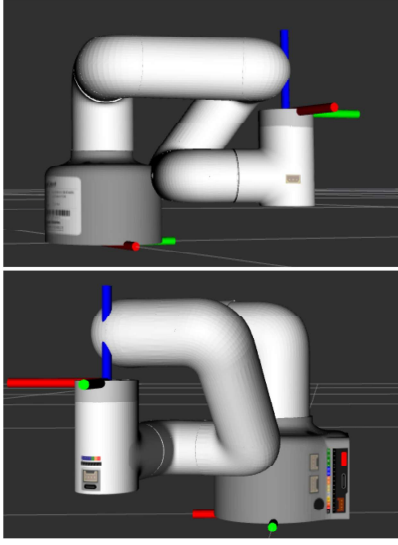


図 4: $n_3 = \pm 1$

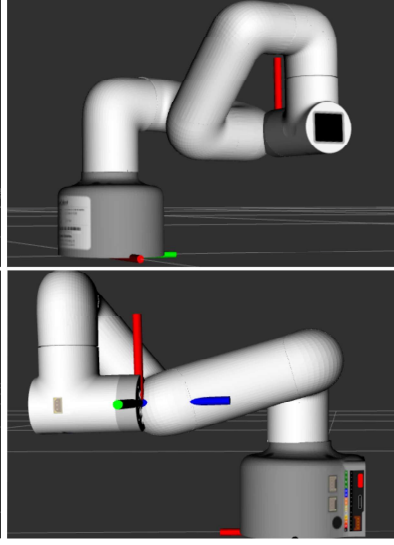


図 5: $n_3 = 0$

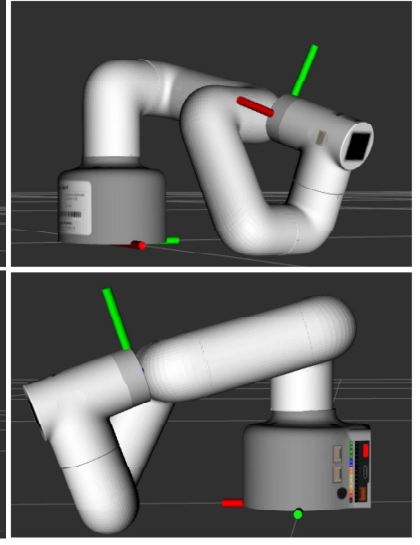


図 6: その他

4.1 計算例

実際に次の 3 個のエンドエフェクタの姿勢と位置の組に対して、アルゴリズムを用いて計算する。

- 姿勢: $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, 位置: $(p_1, p_2, p_3) = (100, 100, 100)$.
- 姿勢: $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{\pi}{2}, 0)$, 位置: $(p_1, p_2, p_3) = (100, 100, 100)$.
- 姿勢: $(\alpha, \beta, \gamma) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$, 位置: $(p_1, p_2, p_3) = (100, 100, 100)$.

本アルゴリズムを用いると、計算時間はそれぞれ 0.105196 [s], 0.082496 [s], 0.149572 [s] となった。また、逆運動学問題の解の個数はそれぞれ 4 個、8 個、8 個という結果だった。出力された逆運動学問題の解の中からそれぞれ 1 個ずつ解を選び、3 次元可視化ツール RViz [5] を用いて myCobot を配置した結果をそれぞれ図 4, 5, 6 に示す。

5 精度評価と誤差評価

次に、アルゴリズムの精度評価と誤差評価を行う。本研究における精度評価は、アルゴリズムによって解がどれくらいの頻度で求まるかやどのような解が求まるかに関する評価を指し、一方誤差評価は、逆運動学問題を求めたいエンドエフェクタの姿勢や位置とアルゴリズムで得られた解から求めたエンドエフェクタの姿勢や位置との誤差の評価を指す。誤差評価には、誤差率（相対誤差）を用いる。誤差率 ε は理論値を x 、実測値を x' とすると、次のように表される。

$$\varepsilon = \left| \frac{x - x'}{x} \right|$$

今回のアルゴリズムの入力値は姿勢に関する 3 個 (α, β, γ) と位置に関する 3 個 (p_1, p_2, p_3) の計 6 個あるため、これらの誤差率の平均値 E'_i で誤差評価を行う。したがって、それぞれの入力値に対する誤差率を $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_3}$ とするとき、 E'_i は次のように定義する。

$$E'_i = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{p_2} + \varepsilon_{p_3}}{6}$$

評価	計算時間（平均） [s]	解が出た回数 [回]	入力値と同じ解が出ない回数 [回]
1	0.112514	997	0
2	0.109371	994	0
3	0.110048	997	0
4	0.0965956	996	2
5	0.111914	996	1
6	0.10842	997	2
7	0.112219	997	0
8	0.110095	999	2
9	0.102675	996	0
10	0.0955962	995	1
平均	0.10694478	996.4	0.8

表 2: アルゴリズムの精度評価

また、アルゴリズムの解が複数得られた場合は、解一つ一つに誤差評価（ E'_i ）を行い、その平均値を最終的な誤差評価の対象とする。

精度評価と誤差評価の流れは以下の通りである。

1. $\theta_1, \dots, \theta_6$ の組を無作為に与える。
2. 式 (2) に代入してエンドエフェクタの姿勢と位置を調べる（順運動学問題の解法）。
3. 手順 2 で得られたエンドエフェクタの姿勢と位置をアルゴリズムに適用する（逆運動学問題の解法）。
4. 手順 3 から解 θ_i が得られた回数と手順 1 の入力値と同じ解が得られた回数を評価する（精度評価）。
5. 手順 3 から得られた解 θ_i を式 (2) に代入して、エンドエフェクタの姿勢と位置を得る。
6. 手順 2 と手順 5 の姿勢、位置の誤差を評価する（誤差評価）。

ここで、手順 1 において $\theta_1, \dots, \theta_6$ の組を無作為に与えているのは、実際に配置可能なエンドエフェクタの姿勢と位置の組において実験を行うためである。前章で軽く述べた通り、myCobot には球状ジョイントも 3 個の回転ジョイントの回転軸が 1 点で交わる組も存在しない。そのため、姿勢と位置を分離して考えることができず、姿勢と位置の組を無作為に与えると解が存在しない可能性が高いため、正確にアルゴリズムを評価することができない。

精度評価の結果を表 2、誤差評価の結果を図 7 に示す。今回、サンプル数は 1 評価につき 1000 サンプルの、計 10000 サンプルを取った。表 2 からアルゴリズムは約 99.6% の割合で解を求めることができている、包括的 Gröbner 基底系が不完全ながらも非常に高い精度を持っていることが分かった。しかし、その内の約 0.1% は最初に与えた $\theta_1, \dots, \theta_6$ とは異なる値だった。これは Risa/Asir において三角関数の値を数値的に求めているため誤差が発生しており、交点の座標や各 θ_i を順に求めるにあたって、誤差が蓄積した結果であると思われる。次に図 7 に着目する。逆運動学問題の解が求まった 9964 サンプルを赤で、その中で最初に与えた $\theta_1, \dots, \theta_6$ がアルゴリズムの出力に一致しなかった 8 サンプルを青で表している。図 7 から、実験結果全体の約 95% は誤差率が 10^{-6} 以下であることが分かる。ここで、エンドエフェクタの位置 (p_1, p_2, p_3) の理論値の取り得る範囲がおおよそ $-200[\text{mm}]$ から $400[\text{mm}]$ であることに注意すると、位置に関する誤差は約 $10^{-4}[\text{mm}]$ ほどである。myCobot の再現性 [2] が $\pm 0.5[\text{mm}]$ であることからアルゴリズムの出力は十

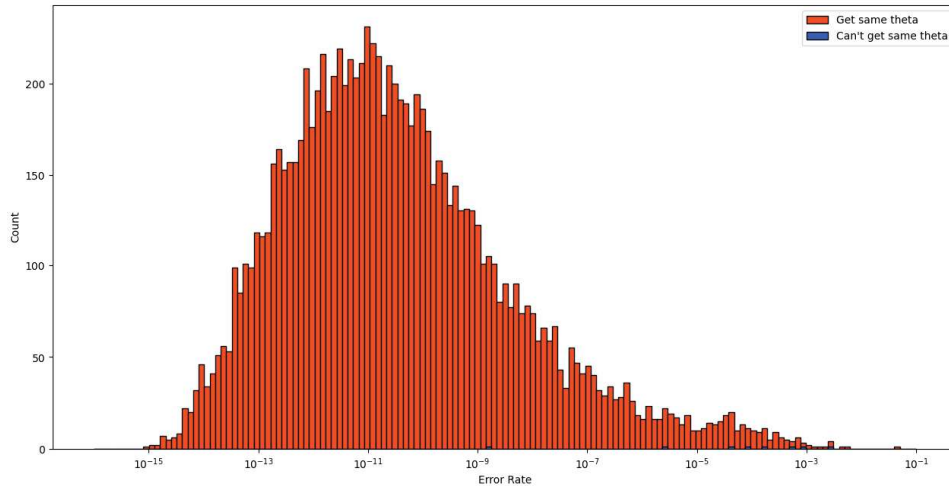


図 7: アルゴリズムの解の誤差率の分布

分な精度を持っていることが分かる。一方、表 2 で最初に与えた $\theta_1, \dots, \theta_6$ がアルゴリズムの出力と一致しなかったサンプルについては、大半が誤差率が 10^{-5} 以上であり、myCobot の再現性から見てもアルゴリズムの出力の精度は良いとは言えない。

6 まとめと今後の課題

本研究では、Pieper の提案手法を基に、myCobot の形状に着目し、6 自由度ロボットマニピュレータ myCobot の逆運動学問題の解析的解法の導出を行った。その後、逆運動学問題のアルゴリズムの実装、評価を行なった。アルゴリズムの実装には数式処理システム Risa/Asir を用いた。

今後の課題として、次の 2 点が挙げられる。

包括的 Gröbner 基底系計算の完了とアルゴリズムの精度向上

本研究では、式 (9) の包括的 Gröbner 基底系の計算が約 2 カ月かけても完了しなかった。そのため、アルゴリズムは不完全なアルゴリズムとなっている。実際に、無作為に与えた配置可能なエンドエフェクタの姿勢、位置のうち、約 0.4% は解を求めることができない。アルゴリズムを完全に実装するためには、包括的 Gröbner 基底系の計算が全て終わる必要がある。

軌道計画問題への拡張

本研究では、6 自由度ロボットマニピュレータの逆運動学問題の解析的解法の導出まで行なった。しかし、この研究の主目的は第 1 章で述べた通り、6 自由度マニピュレータの姿勢を考慮した軌道計画問題の解法の導出である。したがって、今回導出した解法を吉澤 [17] および Yoshizawa et al. [14] や白戸 [15] および Shirato et al. [12] の手法と組み合わせて姿勢を考慮した軌道計画問題の解法の導出を行う必要がある。

謝 辞

本研究は、京都大学の国際共同利用・共同研究拠点である数理科学研究所の支援を受けています。また、本研究は競輪の補助を受けています。

参 考 文 献

- [1] J. Denavit and R.S. Hartenberg. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, pp. 215–221, 1955.
- [2] Elephant Robotics, Inc. mycobot 280, 2024. Accessed: 2024-05-30, <https://www.elephantrobotics.com/en/mycobot-en/>.
- [3] R. Fukasaku, H. Iwane, and Y. Sato. Real quantifier elimination by computation of comprehensive Gröbner systems. In *Proc. ISSAC 2015*, pp. 173–180, 2015.
- [4] M. L. Husty, M. Pfurner, and H.P. Schröcker. A new and efficient algorithm for the inverse kinematics of a general serial 6R manipulator. *Mech. Mach. Theory* 42.1, pp. 66–81, 2007.
- [5] C.H. Kim, S.H. Lee H. R. Kam, and T. Park. RViz: a toolkit for real domain data visualization. In *Telecommunication Systems*, Vol. 60, pp. 337–345. Springer, 2015.
- [6] S. Macenski, T. Foote, B. Gerkey, C. Lalancette, and W. Woodall. Robot operating system 2: Design, architecture, and uses in the wild. *Science robotics*, Vol. 7, No. 66, p. eabm6074, 2022.
- [7] D. Manocha and J.F. Canny. Efficient inverse kinematics for general 6R manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 10, No. 5, pp. 648–657, 1994.
- [8] K. Nabeshima. CGS: a program for computing comprehensive Gröbner systems in a polynomial ring. <https://www.rs.tus.ac.jp/~nabeshima/softwares.html>. Accessed: 2024-12-05.
- [9] M. Noro and T. Takeshima. Risa/Asir—a computer algebra system. In *Papers from the international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pp. 387–396. 1992.
- [10] Open Source Robotics Foundation, Inc. “ros: Home”, 2024. Accessed: 2024-05-30.
- [11] D. L. Pieper. *The kinematics of manipulators under computer control*. Stanford University, 1969. Ph.D. Thesis.
- [12] Y. Shirato, N. Oka, A. Terui, and M. Mikawa. An Optimized Path Planning of Manipulator with Spline Curves Using Real Quantifier Elimination Based on Comprehensive Gröbner Systems. In *SCSS 2024 Work in Progress Proceedings*, pp. 105–112, 2024.
- [13] A. Suzuki and Y. Sato. A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases. In *Proc. ISSAC 2006*, pp. 326–331, 2006.
- [14] M. Yoshizawa, A. Terui, and M. Mikawa. Inverse Kinematics and Path Planning of Manipulator Using Real Quantifier Elimination Based on Comprehensive Gröbner Systems. In *Proc. CASC 2023*, Vol. 14139 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 393–419. Springer, 2023.
- [15] 白戸祐輔. 包括的グレブナー基底系とスプライン補間を用いたロボットアームの軌道計画問題. 修士論文, 筑波大学理工情報生命学術院数理物質科学研究群, 2024. 16p.
- [16] 杉原知道. 逆運動学の数値解法. 日本ロボット学会誌, Vol. 34, No. 3, pp. 167–173, 2016.
- [17] 吉澤瑞輝. 包括的グレブナー基底系を用いたロボットアームの逆運動学問題の解法とその応用. 修士論文, 筑波大学理工情報生命学術院数理物質科学研究群, 2023. 34p.