4 次複素一般線型群の既約表現のテンソル積空間における ザリスキ閉包

The Zariski closure in a space of 2-tensors on irreducible representations of the complex general linear group of degree 4

九州大学大学院数理学府　　太田了徳 *1
RYOTOKU OTA
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Abstract

We consider the irreducible representations of the complex general linear group of degree 4 as polynomial mappings from the set of all complex square matrices of degree 4 to a tensor product of spaces of alternating 2-tensors on 4-dimensional complex vector spaces. We obtain the result that the Zariski closure of the image of such a polynomial mapping is either a singleton, the entire target space, or a non-trivial affine algebraic variety. Furthermore, we find that the image of the polynomial mapping is a dense subset of its Zariski closure.

1　序章

4 次複素一般線型群 $GL_4(\mathbb{C})$ の既約表現を $(\rho, \bigwedge^k \mathbb{C}^4)$ とする．整数 k は $0 \leq k \leq 4$ をみたすものとする．このとき, $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}$ のテンソル積 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^4$ における Zariski 稠密な集合 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ と, その Zariski 閉包 $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))}$ を求めると以下の表 1 のようになる:

表 1: $M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ における稠密な集合とその Zariski 閉包

k	0	1	2	3	4
$\rho(M_4(\mathbb{C}))$	$\{1\}$	$M_4(\mathbb{C})$	$\boldsymbol{V}(I_{16})$ に対して稠密な集合	$M_4(\mathbb{C})$ に対して稠密な集合	$M_1(\mathbb{C})$
$\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))}$	$\{1\}$	$M_4(\mathbb{C})$	$\boldsymbol{V}(I_{16})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_1(\mathbb{C})$

ただし, 表現空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^4$ は $M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}$ 線型同型であるから, テンソル積 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^4$ を $M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ とみなし, Zariski 位相を入れる．また, 注意として, $k = 2$ のとき, つまり $GL_4(\mathbb{C})$ の 6 次元表現 $(\rho, \bigwedge^2 \mathbb{C}^4)$ のとき, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ は非自明なアフィン代数多様体 $\boldsymbol{V}(I_{16})$ に対する稠密な部分集合となる [太田]. ただし, この非自明なアフィン代数多様体 $\boldsymbol{V}(I_{16})$ は $M_6(\mathbb{C})$ の相対位相を入れた空間である.

本稿では, 線型空間 $M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ の部分集合に対して, 稠密性のみに着目した．すなわち,「線型空間 $M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ の部分集合 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ が, 稠密な部分集合になるか否か, ならないのであればどのような集合に対して稠密

*1 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744　E-mail: ota.ryotoku.588@s.kyushu-u.ac.jp

な部分集合になるのか」という問いを立て, 答えを導き出した. 特に $k=2$ のとき, 線型空間 $M_6(\mathbb{C})$ における部分集合 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ は, $M_6(\mathbb{C})$ に対して稠密な部分集合とならず, 非自明なアフィン代数多様体 $\boldsymbol{V}(I_{16})$ に対する稠密な部分集合となる.

本稿では, 表 1 の結果を証明する. 以下, 1.1 節で改めて表 1 の主張を述べ, 第 2 章で証明を与える. また, 特に断りがない限り, 位相は Zariski 位相とする.

1.1 主結果

定理 1

4 次複素一般線型群の既約表現を $(\rho, \bigwedge^k \mathbb{C}^4)$ とする. ただし整数 k は $0 \leq k \leq 4$ をみたすものとする. このとき, ${}_4C_k$ 次元表現 $\rho : GL_4(\mathbb{C}) \to GL_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ を 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^k \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^k \mathbb{C}^4 \cong M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ への多項式写像とみなす:

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{{}_4C_k}(\mathbb{C}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & \bigwedge^k A. \end{array}$$

このとき, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C})) \subset M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ とその Zariski 閉包 $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} \subset M_{{}_4C_k}(\mathbb{C})$ は次の通りである:

$$\begin{aligned} &k=0 \text{ のとき}, \rho(M_4(\mathbb{C})) = \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \{1\}, \\ &k=1 \text{ のとき}, \rho(M_4(\mathbb{C})) = \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_4(\mathbb{C}), \\ &k=2 \text{ のとき}, \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \boldsymbol{V}(I_{16}), \\ &k=3 \text{ のとき}, \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_4(\mathbb{C}), \\ &k=4 \text{ のとき}, \rho(M_4(\mathbb{C})) = \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_1(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

2 主結果の証明

ここでは 1.1 節で述べた定理 1 に対して, 証明を与える.

証明 $k=0$ とする.

$GL_4(\mathbb{C})$ の自明表現 $(\rho, \bigwedge^0 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^0 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^0 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^0 \mathbb{C}^4 \cong M_1(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_1(\mathbb{C}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & 1 \end{array}$$

を得る. このとき, 像は $\rho(M_4(\mathbb{C})) = \{1\}$ である. したがって $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \{1\}$ である.

$k=1$ とする.

$GL_4(\mathbb{C})$ の自然表現 $(\rho, \bigwedge^1 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^1 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^1 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^1 \mathbb{C}^4 \cong M_4(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_4(\mathbb{C}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & A \end{array}$$

を得る．このとき, ρ は全単射であるから像は $\rho(M_4(\mathbb{C})) = M_4(\mathbb{C})$ である．像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_4(\mathbb{C})$ である．

<u>$k = 2$ とする．</u>

$GL_4(\mathbb{C})$ の 6 次元表現 $(\rho, \bigwedge^2 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \cong M_6(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_6(\mathbb{C}) \\ & \cup & & \cup \\ & A & \longmapsto & \bigwedge^2 A \end{array}$$

を得る． ただし, $\wedge^2 A \coloneqq (\det A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix})_{1\le i_1<i_2\le 4, 1\le j_1<j_2\le 4}$ である [山本]．ここで, 4 次複素正方行列 A の成分を $a_{ij} \in \mathbb{C}$ とし,

$$x_{11} = \det A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =, \ldots, x_{66} = \det A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

イデアル I を $I = \langle x_{11} - \det A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, x_{66} - \det A\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\rangle \subset \mathbb{C}[a_{11}, \ldots, a_{44}, x_{11}, \ldots, x_{66}]$ とおく．すると 16 次消去イデアル $I_{16} = I \cap \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{44}]$ のグレブナー基底 G_{16} は

$$\begin{aligned} G_{16} &= \left\{ \begin{array}{l} x_{63}x_{64} - x_{62}x_{65} + x_{61}x_{66}, \ldots, \\ -x_{14}x_{22}x_{24}x_{51}x_{52}x_{55}x_{62} + \cdots - x_{11}^2x_{22}^2x_{52}x_{53}x_{63}x_{66} \end{array} \right\} \\ &= \{g_1, \ldots, g_{772}\}. \end{aligned}$$

よって, 16 次の消去イデアル $I_{16} = \langle G_{16}\rangle$ の共通零点全体は,

$$\boldsymbol{V}(I_{16}) = \left\{ (x_1, \ldots, x_{36}) \in M_6(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{c} g_1(x_{11}, \ldots, x_{66}) = 0, \\ \vdots \\ g_{772}(x_{11}, \ldots, x_{66}) = 0 \end{array} \right\}.$$

よって, 多項式陰関数表示化 [COX] より, $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \boldsymbol{V}(I_{16})$ である．

<u>$k = 3$ とする．</u>

$GL_4(\mathbb{C})$ の 4 次元表現 $(\rho, \bigwedge^3 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^3 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^3 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^3 \mathbb{C}^4 \cong M_4(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_4(\mathbb{C}) \\ & \cup & & \cup \\ & A & \longmapsto & \bigwedge^3 A \end{array}$$

を得る．ただし, $\wedge^3 A \coloneqq (\det A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix})_{1\le i_1<i_2<i_3\le 4, 1\le j_1<j_2<j_3\le 4}$ である [山本]．ここで, 4 次複素正方行列 A の成分を $a_{ij} \in \mathbb{C}$ とし,

$$x_{11} = \det A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =, \ldots, x_{44} = \det A\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

イデアル I を $I = \langle x_{11} - \det A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ldots, x_{44} - \det A\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\rangle \subset \mathbb{C}[a_{11}, \ldots, a_{44}, x_{11}, \ldots, x_{44}]$ とおく．すると 16 次消去イデアル I_{16} は $I_{16} = I \cap \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{44}] = \langle 0\rangle$ である．よって, 多項式陰関数表示化 [COX] より, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \boldsymbol{V}(I_{16}) = \boldsymbol{V}(0) = M_4(\mathbb{C})$ である．

$k=4$ とする.

$GL_4(\mathbb{C})$ の行列式表現 $(\rho, \bigwedge^4 \mathbb{C}^4)$ に対して, 4 次複素正方行列全体の集合 $M_4(\mathbb{C})$ から $GL_4(\mathbb{C})$ の表現空間 $\bigwedge^4 \mathbb{C}^4$ のテンソル積 $\bigwedge^4 \mathbb{C}^4 \otimes \bigwedge^4 \mathbb{C}^4 \cong M_1(\mathbb{C})$ への多項式写像を定めると,

$$\begin{array}{cccc} \rho\colon & M_4(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_1(\mathbb{C}) \\ & \cup & & \cup \\ & A & \longmapsto & \bigwedge^4 A \end{array}$$

を得る. ただし, $\wedge^4 A \coloneqq (\det A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \end{pmatrix})_{1\le i_1<i_2<i_3<i_4\le 4, 1\le j_1<j_2<j_3<j_4\le 4} = \det A$. ここで, 4 次複素正方行列 A の成分を $a_{ij} \in \mathbb{C}$ とし, $x_{11} = \det A$ イデアル I を $I = \langle x_{11} - \det A\rangle \subset \mathbb{C}[a_{11}, \ldots, a_{44}, x_{11}, \ldots, x_{44}]$ とおく. すると 16 次消去イデアル I_{16} は $I_{16} = I \cap \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{44}] = \langle 0\rangle$ である. よって, 多項式陰関数表示化 [COX] より, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ の Zariski 閉包は, $\overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = \boldsymbol{V}(I_{16}) = \boldsymbol{V}(0) = M_1(\mathbb{C})$ である.

また, 像 $\rho(M_4(\mathbb{C}))$ が $M_1(\mathbb{C})$ となることを示す. $\rho^{-1}(M_1(\mathbb{C}) - \{0\}) = GL_4(\mathbb{C})$, $\rho(M_4(\mathbb{C}) - GL_4(\mathbb{C})) = \{0\}$ であるから, $\rho(M_4(\mathbb{C})) = \rho(GL_4(\mathbb{C}) \cup (M_4(\mathbb{C}) - GL_4(\mathbb{C}))) = \rho(GL_4(\mathbb{C})) \cup \rho(M_4(\mathbb{C}) - GL_4(\mathbb{C})) = M_1(\mathbb{C}) - \{0\} \cup \{0\} = M_1(\mathbb{C})$. 以上より, $\rho(M_4(\mathbb{C})) = \overline{\rho(M_4(\mathbb{C}))} = M_1(\mathbb{C})$.

∎

謝　辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参 考 文 献

[COX] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. *Ideals, Varietices, and Algorithms*, 4th edition, Springer-Verlag, New York, 2015.

[山本] 山本哲朗. 『行列解析の基礎』, サイエンス社, SGC ライブラリ 79, 2010.

[太田] 太田了徳, 4 次複素一般線型群の既約表現のテンソル積空間におけるグレブナー基底の特徴, 数理解析研究所講究録 **2280** (2024), pp.46-54.