計算機代数の技法と矢野-加藤の計算法を用いたミルナー数が一定の特異点変形に付随するパラメータ付き $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ 計算の実装について

On the implementation of Yano-Kato's computational method for $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ with parameters using modern computer algebra techniques

東京理科大学理学部第一部応用数学科　鍋島克輔 *1
Katsusuke Nabeshima
Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Science

新潟大学大学院自然科学研究科　田島慎一 *2
Shinichi Tajima
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

Abstract

A computational method for s-parametric annihilators, combining Yano-Kato's classical method with modern computer algebra techniques, is introduced in the context of symbolic computation. This method is generalized to parametric cases to study the deformation of semi-weighted homogeneous hypersurface singularities. It is reported that new results for the s-parametric annihilators of these singularities can be obtained using the computational method.

1　はじめに

特異点の解析的不変量の 1 つとして Bernstein-Sato 多項式 (以下，b-関数と呼ぶ) がある．この b-関数は記号計算の側面から計算法や応用が多くの研究者により研究 [1, 2, 8, 22, 23, 24, 25, 26] されており，本稿でも，記号計算の枠内で b-関数を考える．

矢野環 [28, 29] や加藤満生 [5, 6]，著者たち [13, 19] により b-関数が特異点変形においてどのように変化するのかを計算する方法及び具体例が紹介されている．中でも論文 [19] において，著者たちは，吉永-鈴木 [30] により得られた Innner modality 2 (表 1) のすべての特異点変形において,『如何に b-関数が変化するのか』を，非可換包括的グレブナー基底系 [14] を計算することによって解明している．

表 1 は，吉永-鈴木 [30] の特異点リストと中村-田島 [9] に紹介された Innner modality 2 のミルナー数一定な変形の形をまとめたものである．例えば E_{18} であれば，upper monomial が 2 個あるので，変形パラメータ a, b を用いて $f = x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$ とする．このとき，f の原点での簡約 b-関数は

*1 〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp
*2 〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp

1. もし，$a \neq 0$ であれば，$b_{\rm st}(s)(s+\frac{14}{30})(s+\frac{17}{30})$ となり，
2. もし，$a = 0 \wedge b \neq 0$ であれば， $b_{\rm st}(s)(s+\frac{17}{30})(s+\frac{44}{30})$,
3. もし，$a = b = 0$ であれば，$b_{\rm st}(s)(s+\frac{44}{30})(s+\frac{47}{30})$ となる．

ただし，$b_{\rm st}(s) = (s+\frac{13}{30})(s+\frac{16}{30})(s+\frac{19}{30})(s+\frac{22}{30})(s+\frac{23}{30})(s+\frac{25}{30})(s+\frac{26}{30})(s+\frac{28}{30})(s+\frac{29}{30})(s+\frac{31}{30})(s+\frac{32}{30})(s+\frac{34}{30})(s+\frac{35}{30})(s+\frac{37}{30})(s+\frac{38}{30})(s+\frac{41}{30})$ である．

表 1 にあるすべての特異点の変形に付随する b-関数の結果は論文 [19] で紹介されている．

表 1: Inner modality 2 の特異点のリスト

type	weighted homo. f_0	upper monomials	note
E_{18}	x^3+y^{10}	xy^7, xy^8	
E_{19}	x^3+xy^7	y^{11}, y^{12}	
E_{20}	x^3+y^{11}	xy^8, xy^9	
W_{17}	x^4+xy^5	y^7, y^8	
W_{18}	x^4+y^7	x^2y^4, x^2y^5	
Z_{17}	x^3y+y^8	xy^6, xy^7	
Z_{18}	x^3y+xy^6	y^9, y^{10}	
Z_{19}	x^3y+y^9	xy^7, xy^8	
Q_{16}	$x^3+yz^2+y^7$	xy^5, xz^2	
Q_{17}	$x^3+yz^2+xy^5$	y^8, y^9	
Q_{18}	$x^3+yz^2+y^8$	xy^6, xz^2	
S_{16}	$x^2z+yz^2+xy^4$	y^6, z^3	
S_{17}	$x^2z+yz^2+y^6$	y^4z, z^3	
U_{16}	$x^3+xz^2+y^5$	y^2z^2, y^3z^2	
J_{16}	$x^3+y^9+t_1x^2y^3$	y^{10}	$4t_1^3+27 \neq 0$
W_{15}	$x^4+y^6+t_1x^2y^3$	y^7	$t_1^2-4 \neq 0$
Z_{15}	$x^3y+y^7+t_1x^2y^3$	y^8	$4t_1^3+27 \neq 0$
Q_{14}	$x^3+yz^2+t_1x^2y^2+xy^4$	y^7	$t_1^2-4 \neq 0$
S_{14}	$x^2z+yz^2+y^5+t_1y^3z$	z^3	$t_1^2-4 \neq 0$
U_{14}	$x^3+xz^2+t_1xy^3+y^3z$	yz^3	$t_1^2+1 \neq 0$

Innner modality 2 の場合はすべて得られたので，吉永-鈴木 [30] にある Innner modality 3 の特異点の計算にチャレンジするのは自然な流れである．しかしながら，論文 [19] と同じ方法で Innner modality 3 の特異点の b-関数の計算を試したが，各々の問題に対して 1 カ月以上計算機を稼働させても 1 つの結果も得ることはできなかった．試した Innner modality 3 の特異点のリストが表 2 である．

b-関数を計算する際に重要となるのは，f^s をゼロとする偏微分作用素からなるイデアル $Ann(f^s)$ である．論文 [19] と同じ方法で Innner modality 3 の特異点の b-関数が得られなかった大きな原因は，パラメータが介在した $Ann(f^s)$ の計算 (i.e. 非可換包括的グレブナー基底系計算) が 1 カ月以上経っても終わらないことである．論文 [19] の方法では，b-関数は現実的な時間では得られないので新たな手法が必要となる．

本研究の目的は，矢野-加藤の計算法と計算機代数の技法を融合した f^s をゼロとするパラメータ付き偏微分作用素を計算する計算法を確立すると共に，そのプログラムを計算機に実装することである．

パラメータの介在しない場合の計算法は [7, 17] により著者たちにより確立されている．また，その計算法をパラメータ付きの場合に一般化するときに必要となる,『パラメータ付き代数的局所コホモロジー』,『パラメータ付きスタンダード基底』,『パラメータ付き拡張イデアルメンバーシップの解法（パラメータ付き syzygy 計算)』は個別に著者たちにより論文 [11, 12, 15, 16, 18] で確立されており，本研究で，これらを繋ぎ合わせ f^s をゼロとするパラメータ付き偏微分作用素を計算するプログラムを完成させた.

表 2: Inner modality 3 の特異点のリスト

type	weighted homo. f_0	upper monomials	note
E_{24}	x^3+y^{13}	xy^9, xy^{10}, xy^{11}	
E_{25}	x^3+xy^9	y^{14}, y^{15}, y^{16}	
E_{26}	x^3+y^{14}	$xy^{10}, xy^{11}, xy^{12}$	
Z_{23}	x^3y+y^{11}	xy^8, xy^9, xy^{10}	
Z_{24}	x^3y+xy^8	y^{12}, y^{13}, y^{14}	
Z_{25}	x^3y+y^{12}	xy^9, xy^{10}, xy^{11}	
N_{19}	x^4y+y^6	xy^5, x^2y^4, x^2y^5	
N_{20}^1	x^4y+xy^5	x^2y^4, y^7, y^8	
N_{20}^2	x^5+y^6	x^2y^4, x^3y^3, x^3y^4	
N_{21}	x^5+xy^5	x^3y^3, y^7, y^8	
Q_{22}	$x^3+yz^2+y^{10}$	xy^7, xy^8, xz^2	
Q_{23}	$x^3+yz^2+xy^7$	y^{11}, y^{12}, y^{13}	
Q_{24}	$x^3+yz^2+y^{11}$	xy^8, xy^9, xz^2	
V_{18}^{*1}	$x^2y+z^4+y^5$	y^4z, y^3z^2, y^4z^2	
V_{18}^{*2}	$x^2y+y^3z+xz^3$	z^5, yz^4, yz^5	
V_{19}^{*1}	$x^2y+z^4+y^4z$	y^2z^2, y^2z^3, y^3z^3	
V_{19}^{*2}	$x^2y+y^3z+z^5$	yz^4, y^2z^3, y^3z^3	
V_{19}^{*3}	$x^2y+xz^3+y^4$	yz^4, y^2z^3, y^2z^4	
V_{20}^*	$x^2y+y^4+z^5$	y^2z^3, y^3z^2, y^3z^3	
J_{22}	$x^3+t_1x^2y^4+y^{12}$	y^{13}, y^{14}	$4t_1^3+27\neq 0$
Z_{21}	$x^3y+t_1x^2y^4+y^{10}$	y^{11}, y^{12}	$4t_1^3+27\neq 0$
W_{20}	$x^3+yz^2+t_1x^2y^3+y^9$	y^{10}, y^{11}	$4t_1^3+27\neq 0$
N_{16}	$x^4y+t_1x^3y^2+t_2x^2y^3+xy^4$	y^6	$t_1^2t_2^2-4t_1^3-4t_3^3+18t_1t_2-27\neq 0$
V_{15}	$x^2z^2+t_1yz^2+x^4+t_2x^2y^2+y^4$	y^2z^2	$t_1(t_2^2-4)\neq 0$

本稿は次のように構成されている．第 2 節で本稿で使う記号や定義を紹介して，第 3 節でパラメータが介在しない場合の『矢野-加藤の計算法』と『計算機代数の技法』を融合した計算法を紹介する．第 4 節でパラメータ版に拡張した計算法での計算結果を与える.

2 準備

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を n 個の変数とし，変数 x_i で偏微分するという操作を $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ で表す $(1 \leq i \leq n)$. n 個の変数の省略形を $x := \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\partial := \{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ とする．このとき，$i \neq j$ で $x_ix_j = x_jx_i$, $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ が成り立ち，$i = j$ でライプニッツの公式より $\partial_i x_i = x_i\partial_i + 1$ が成り立つ.

定数でない多項式を $f\in\mathbb{C}[x]$ とし，原点 $O\in\mathbb{C}^n$ での局所化を $\mathbb{C}[x]_O=\left\{\frac{g_1(x)}{g_2(x)}|g_1(x),g_2(x)\in\mathbb{C}[x],g_2(O)\neq 0\right\}$ とし

$$\mathcal{D}=\left\{\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} h_{\beta,k}(x)\partial^\beta \;\middle|\; h_\beta(x)\in\mathbb{C}[x]_O\right\}$$

とする．ただし $\partial^\beta=\partial_1^{b_1}\cdots\partial_n^{b_n}\quad(\beta=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ である．また，新たな 1 変数を s とし，

$$\mathcal{D}[s]=\left\{\sum_{k\in\mathbb{N},\beta\in\mathbb{N}^n} h_{k,\beta}(x)s^k\partial^\beta \;\middle|\; h_{k,\beta}(x)\in\mathbb{C}[x]_O\right\}$$

とする．このとき，原点 $O\in\mathbb{C}^n$ での f の局所 b-関数 $b_{f,O}(s)\in\mathbb{C}[s]$ は

$$p\cdot f^{s+1}=a(x)\cdot b_{f,O}(s)\cdot f^s$$

を満たす最小次数のモニック多項式である．ただし，$p\in\mathcal{D}[s]$, $a(x)\in\mathbb{C}[x]$ である．

局所 b-関数は因子として常に $s+1$ を持つことが知られており，$\dfrac{b_{f,O}(s)}{s+1}$ を原点 O での f の局所簡約 b-関数という

f^s をゼロにする偏微分作用素からなるイデアルを

$$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)=\{\psi(s,x,\partial)\in\mathcal{D}[s]\,|\,\psi(s,x,\partial)f^s=0\}$$

とすると，イデアル $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)+\langle f,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle$ に含まれるモニックで最小次数の $\mathbb{C}[s]$ の多項式が，簡約局所 b-関数なることが知られている．

大域もしくは局所 b-関数の計算法については論文 [20, 22, 23, 24, 26] などで紹介されているが，非可換グレブナー基底計算を用いる方法であるので計算量が大きく，実際，特異点論の教科書にあるような簡単な特異点であっても，計算に膨大なメモリーと時間を要する．ましてや，f が変形パラメータを含んでいれば尚更，膨大なメモリーと計算時間を要する．

重みベクトルを $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)\in\mathbb{Z}^n_{>0}$ とし，多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ に対して，x^α は $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ を意味する．

定義 1

1. 項 x^α に対し, 重みベクトル $\mathbf{w}$ に関する重み付き d を $d=|x^\alpha|_\mathbf{w}:=\sum_{i=1}^n w_i\alpha_i$ により定める．
2. ゼロでない多項式 $f\in\mathbb{C}[x]$ が $(d;\mathbf{w})$ 型の **weighted homogeneous** であるとは, f のすべての項の重みベクトル $\mathbf{w}$ に関する重み付き次数が d に等しいこととする．
3. f を $\mathbb{C}[x]$ の多項式とする．まず, $ord_\mathbf{w}(f)=\min\{|x^\alpha|_\mathbf{w}:x^\alpha$ は f を構成する項$\}$ $(ord_\mathbf{w}(0):=-1)$ とする．多項式 f が $(d;\mathbf{w})$ 型 **semi-weighted homogeneous** であるとは, 多項式 f が $f=f_0+g$ なる形に表せることをいう． ただしここで, f_0 は $(d;w)$ 型の *semi-weighted homogeneous* な多項式であり, $ord_\mathbf{w}(g)>d$ または $g=0$ を満たすとする．(本稿では, *semi-weigted homogeneous* な多項式は *weighted homogeneous* な多項式を含むものとする．)

例えば, $f_0=x^3+y^{13}\in\mathbb{C}[x,y]$ (E_{24} 特異点) において, 重み $\mathbf{w}=(13,3)\in\mathbb{Z}^2_{>0}$ を考えれば, f_0 は $(39;(13,3))$ 型の semi-weigted homogeneous である．このときの各項の重み付き次数は 39 である．また, $f=x^3+y^{13}+2xy^9\in\mathbb{C}[x,y]$ と重み $\mathbf{w}=(13,3)\in\mathbb{Z}^2_{>0}$ を考えれば, これは項 xy^9 の重み付き次数が

40 であり, x^3+y^{13} は重み付き次数が 39 の weighted homogeneous な多項式かつ孤立特異点を原点に持つので f は $(39;(13,3))$ 型の semi-weighted homogeneous な多項式である．表 1 と表 2 は，semi-weighted homogeneous な多項式のリストである．

本稿の目的は，semi-weighted homogeneous な多項式 f に変形パラメータが介在する場合に，$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の効率的な計算法を与えることである．

3 計算機代数技法と矢野-加藤の計算アイデアの融合

ゼロでない多項式を $f \in \mathbb{C}[x]$ とし，超曲面 $f = 0$ は原点に孤立特異点を持つとする． このとき，$\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ は $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の元であり，トリビアルな s-parametric annihilator という．このトリビアルな s-parametric annihilator について次が知られている．

命題 2 (1978, 矢野 [28])
$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s) \cap \mathcal{D} = \langle \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \mid 1 \le i < j \le n\rangle.$
すなわち，s を持たない *s-parametric annihilator* は，トリビアルなものから生成される．

$f_0 \in \mathbb{C}[x]$ を重みベクトル $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ $(\gcd(w_1, \ldots, w_n) = 1)$ に関して重み次数を d となるweighted homogeneous とし，$f_0 = 0$ で定義された超曲面は原点に孤立特異点を持つとする．また，多項式 $g \in \mathbb{C}[x]$ を，$\mathbf{w}$ に関して g の全ての項の重み次数が d 以上となるものとする．本節では，$f = f_0 + g$ とする．

$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元を効率的に求めるため，オイラー偏微分作用素

$$E_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

を用いる．このとき，

$$(ds - E_0)f_0^s = dsf_0^s - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f_0^s = dsf_0^s - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_i}\right)\right) sf_0^{s-1} = dsf_0^s - df_0 \cdot sf_0^{s-1} = 0$$

となる．ここで，$R_1 = ds - E_0$ (R_1 の s の係数は定数 d である), $h_1 = dg - E_0(g)$ とすると，次の式を得る

$$\begin{cases} R_1 f^s = h_1 s f^{s-1}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} f^s = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) s f^{s-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

次を満たすような $b, a_1, \ldots, a_n$ は計算可能である

$$bh_1 + (a_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_n \tfrac{\partial f}{\partial x_n}) = 0.$$

この関係式より，次を得る

$$(bR_1 + a_1 \tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \tfrac{\partial}{\partial x_n}) f^s = (bh_1 + a_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_n \tfrac{\partial f}{\partial x_n}) s f^{s-1} = 0.$$

したがって，

$$bR_1 + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$$

となる．

1978 年の矢野環 [28] の論文より次が成り立つ．

定理 3 (1978, 矢野 [28])
イデアル商 $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle : \langle h_1 \rangle \subset \mathbb{C}[x]_O$ のスタンダード基底を $\{b_1, \ldots, b_r\}$ とする．各 $1 \leq i \leq r$ で $a_{i1}, \ldots, a_{in} \in \mathbb{C}[x]_O$ は $b_i h_1 + a_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + a_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ を満たすとする．このとき，$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s) \cap (\mathcal{D}s + \mathcal{D})$ は次で生成される

$$\left\{ b_i R_1 + a_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_{in}\frac{\partial}{\partial x_n} \,\middle|\, 1 \leq i \leq r \right\} \cup \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

定理 3 より，$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の 1 階の偏微分作用素の生成元は，現在の計算機代数の技法を用いることにより次のように計算できる．

$\boxed{\mathrm{FirstAnn}(f)}$

Step 1: $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle : \langle h_1 \rangle$ のスタンダード基底 $\{b_1, \ldots, b_r\}$ を求める．

Step 2: 各 $i = 1, \ldots, r$ について次を行う．

Step 2-1: $u_i \in \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle : \langle b_i h_1 \rangle$ となる $u_i(O) \neq 0$ を求める．

Step 2-2: $u_i b_i h_1 = \sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ となる a_{ij} を求める．
（拡張イデアルメンバーシップあるいは，syzygy の計算.）

Step 2-3: $P_i = u_i b_i R_1 - \sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ とおく．

Return: $\{P_1, \ldots, P_r\}$

もし，Step 1 での簡約スタンダード基底が $\{1\}$ なら 2 階以上の偏微分作用素は必要ないので，上記の方法で得られた s-parametric annihilator と，トリビアルな s-parametric annihilator たちで $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ は生成されることがわかる．Step 1 の簡約スタンダード基底の計算は，$\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle : \langle h_1 \rangle$ に付随する代数的局所コホモロジーを求めることにより線形代数の手法で求めることができ，実際，著者たちはこの方法でスタンダード基底を求めるプログラムを実装している ([11, 12, 27])．

上記の計算法で特筆すべきことは，非可換のグレブナー基底計算は必要なく，可換な計算のみで s-parametric annihilator を得られることである．

次に 2 階の偏微分作用素を考える．$R_2 = (d(s-1) - E_0)R_1,\ h_2 = -E_0(h_1)$ とすると

$$R_2 = (d(s-1) - E_0)R_1 = (d(s-1) - E_0)(ds - E_0) = d^2(s^2 - s) - d(2s-1)E_0 + E_0^2.$$

となる (R_2 の s^2 の項の係数は定数となっている)． このとき，次が成り立つ．

$$\begin{cases} R_2 f^s = h_2 s f^{s-1} & + h_1^2 s(s-1) f^{s-2}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} R_1 f^s = \left(\dfrac{\partial h_1}{\partial x_i}\right) s f^{s-1} & + h_1 \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) s(s-1) f^{s-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f^s = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) s f^{s-1} & + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) s(s-1) f^{s-2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \end{cases}$$

次を満たすような $b, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ は計算可能である

$$b h_1^2 + \sum_{i=1}^n a_i h_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = 0.$$

すなわち，

$$\left(bR_2+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}R_1+\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right)f^s=\left(bh_2+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial h_1}{\partial x_i}+\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)sf^{s-1}$$

が得られる．もうすでに式 $R_1f^s=h_1sf^{s-1}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}f^s=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)sf^{s-1}$ $(i=1,\dots,n)$ があるので，これを使って右辺をゼロにする次の $c',c_0,c_1,\dots,c_n\in\mathbb{C}[x]$ が計算できる

$$c'\left(bh_2+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial h_1}{\partial x_i}+\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)+c_0h_1+\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=0.$$

したがって，

$$c'\left(bR_2+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}R_1+\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right)+c_0R_1+\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$$

である．

ここでは，

$$b\in\left\langle\left\{h_1\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,h_1\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\}\cup\left\{\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\tfrac{\partial f}{\partial x_j}\,\middle|\,1\le i\le j\ne n\right\}\right\rangle:\langle h_1^2\rangle,$$

であり

$$c'\in\left\langle h_1,\tfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle:\left\langle bh_2+\textstyle\sum_{i=1}^{n}a_i\tfrac{\partial h_1}{\partial x_i}+\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right\rangle,$$

であるので，上の 2 つのイデアル商のスタンダード基底が b と c' の性質を決めることがわかる．

以上から次の計算法が得られる．FirstAnn(f) と同様に非可換のグレブナー基底計算は必要なく，可換な計算のみで s-parametric annihilator は得られることを強調しておく．

SecondAnn(f)

Step 0: $\mathcal{A}\leftarrow\emptyset$

Step 1: $\langle\{h_1\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,h_1\frac{\partial f}{\partial x_n}\}\cup\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}|1\le i\le j\le n\}\rangle:\langle h_1^2\rangle$ のスタンダード基底 $\{b_1,\dots,b_r\}$ を求める．

Step 2: 各 $i=1,\dots,r$ について次を行う．

Step 2-1: $u_i\in\langle h_1\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,h_1\frac{\partial f}{\partial x_n},(\frac{\partial f}{\partial x_1})(\frac{\partial f}{\partial x_1}),(\frac{\partial f}{\partial x_1})(\frac{\partial f}{\partial x_2}),\dots,(\frac{\partial f}{\partial x_n})(\frac{\partial f}{\partial x_n})\rangle:\langle b_ih_1^2\rangle$ となる $u_i(O)\ne 0$ を求める．

Step 2-2: $u_ib_ih_1^2=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_1\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{1\le j\le k\le n}a_{ijk}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ となる a_{ij},a_{ijk} を求める．
（拡張イデアルメンバーシップあるいは，syzygy の計算.）

Step 2-2: $P_i=u_ib_iR_2-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}R_1-\sum_{1\le j\le k\le n}a_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_j\partial x_k}\right)$ とする．

Step 2-3: $\langle h_1,\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle:\langle b_ih_2+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial h_1}{\partial x_i}+\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\rangle$ のスタンダード基底 $\{c_1,\dots,c_t\}$ を求める．

Step 2-4: 各 $\ell=1,\dots,t$ について次を行う．

Step 2-4-1: $u'_\ell\in\langle h_1,\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle:\langle c_\ell(b_ih_2+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial h_1}{\partial x_i}+\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j})\rangle$ となる $u'_\ell(O)\ne 0$ を求める．

Step 2-4-2: $u'_\ell c_\ell (b_i h_2 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}) = d_{\ell 0} h_1 + \sum_{j=1}^n d_{\ell j} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ となる $d_{\ell j}$ $(1 \le j \le n)$ を求める．

Step 2-4-3: $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{u'_\ell c_\ell P_i - d_{\ell 0} R_1 - \sum_{j=1}^n d_{\ell j} \frac{\partial}{\partial x_j}\}$

Return $\mathcal{A}$

本稿で紹介する計算法の終了条件として，次の 2 つを採用する．

定理 4
局所項順序を固定する．$\langle \{h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots, h_1 \frac{\partial f}{\partial x_n}\} \cup \{\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} | 1 \le i \le j \le n\}\rangle : \langle h_1^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x]_O$ の簡約スタンダード基底を S_2, $b \in S_2$ とし， $\langle h_1, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle : \langle \sum_{i=1}^n b h_2 + a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \rangle \subset \mathbb{C}[x]_O$ の簡約スタンダード基底を S_1 とする．このとき，$S_1 = S_2 = \{1\}$, *(i.e.* 今までの議論で $b = c' = 1)$ ならば，定理 *3* で得られた偏微分作用素と $\left(R_2 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_1 + \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) + c_0 R_1 + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ によって $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ は生成される．

定理 3 により，1 階の偏微分作用素を得た後，2 階の偏微分作用素を計算する際に $S_1 = S_2 = \{1\}$ となれば，必要な $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元を得られたので計算を終える．

定理 5 (1978, 矢野 [28])
上の定理の記号を用いる． $S_2 = \{1\}$, $S_1 = \{c'_1, \ldots, c'_r\} \ne \{1\}$, $s^3 + A_1(x,\partial)s^2 + A_2(x,\partial)s + A_3(x,\partial) \in \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ とする．ただし， $A_i(x,\partial) \in \mathcal{D}$ は高々 i 階の偏微分作用素である $(1 \le i \le 3)$.

このとき，$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s) \cap (\mathcal{D}s^2 + \mathcal{D}s + \mathcal{D})$ は トリビアルな生成元，*FirstAnn(f)* と *SecondAnn(f)* の出力により生成される．すなわち，$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ は，$s^3 + A_1(x,\partial)s^2 + A_2(x,\partial)s + A_3(x,\partial)$ とトリビアルな生成元，*FirstAnn(f)* と *SecondAnn(f)* の出力により生成される．

次に 3 階の偏微分作用素を考える．

$$R_3 = (d(s-2) - E_0)R_2, \sigma_1 = sf^{s-1}, \sigma_2 = s(s-1)f^{s-2}, \sigma_3 = s(s-1)(s-2)f^{s-3}$$

とする (R_3 の s^3 の係数は定数となっている）．このとき，次が成り立つ．

$$\begin{cases} R_3 f^s = (-dh_2 - E_0(h_2))\sigma_1 + 3h_1h_2\sigma_2 + h_1^3\sigma_3, \\[2ex] \frac{\partial}{\partial x_i} R_2 f^s = \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_i}\right)\sigma_1 + \left(h_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2h_1 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_i}\right)\sigma_2 + \left(h_1^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\sigma_3, \quad i = 1,2,\ldots,n, \\[2ex] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_1 f^s = \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial h_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + h_1 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\sigma_2 + \left(h_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\sigma_3, \\ \hfill 1 \le i \le j \le n, \\[2ex] \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f^s = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)\sigma_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\sigma_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\sigma_3 \\ \hfill 1 \le i \le j \le k \le n. \end{cases}$$

1 階，2 階の計算と同様に σ_3，σ_2，σ_1 を syzygy やスタンダード基底を計算することにより消去することで s-parametric annihilator を得ることができる．ここで得られたものが定理 5 で紹介した $s^3 + A_1(x,\partial)s^2 + A_2(x,\partial)s + A_3(x,\partial)$ であれば，必要な $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元を得たことになる．そうでなければ，他の s-parametric annihilator が必要になるが，計算量が膨大になると予想されるので我々の計算はここで終了することとする．すなわち，ここで紹介した計算法は，数学的には常に生成元が得られる保証はなく，ある条件を満たせば計算したものが生成元であるという計算法である．

4　パラメータ版に拡張

特異点変形に対応した $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元を計算するため，3 節で紹介した方法をパラメータ版に拡張する必要がある．拡張するためには次が必要である．

1. パラメータ付きスタンダード基底を計算するため，パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算が必要.
2. イデアル商の包括的グレブナー基底系の計算が必要.
3. パラメータ付き syzygy 加群の計算が必要.
4. 可換な多項式環 (普通) の包括的グレブナー基底系の計算が必要.
5. 上記のものを繋げるためのパラメータ空間 locally closed set を処理する関数が必要.

第 1 著者はパラメータ付きのシステムの扱いに慣れており，すでに上記のプログラムを作成していた．しかしながら，昔のプログラムも存在するので，今回思い切って効率的と思われる方法を計算機代数システム Risa/Asir [21] 上にすべて再実装し，矢野-加藤の計算法を現在の計算機代数の技法を用いてパラメータ版まで計算できるようにした.

$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の計算は複雑性が大きいので，ここでは具体例を書くことは紙面制限の関係で難しいが，出力の一部は次である．

例 1

$f = x^3 + xy^7 + ay^{11} + by^{12}$ とする．このとき，a, b は変形パラメータである．パラメータ a, b が $\mathbf{V}(1331a^3 + 196b)\backslash\mathbf{V}(ab)$ に属しているとき，$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元として，我々の実装は次を出力する．

```
[2581818624*dx^2*b^3*x^3+((920370528*dx^2*b*a+1475324928*dy*dx*b^3)*y-15490911744*dx*b
^3*s+95871930*dx^2*a^2-192099600*dy*dx*b^2*a+18349353792*dx*b^3)*x^2+(-22185240*dx^2*b
*y^4+(-3900170736*dx*b^2*a^2-58975763*dx^2*a+46860660*dy*dx*b^2)*y^3+(538999461*dy*dx*
b*a+214053840*dy^2*b^3+977961600*dx*b^2)*y^2+((-5522223168*dx*b*a-4425974784*dy*b^3)*s
-96743493*dy*dx*a^2+(-51866892*dy^2*b^2+6299159328*dx*b)*a+4781633472*dy*b^3)*y+232363
67616*b^3*s^2+(977893686*dx*a^2+576298800*dy*b^2*a-47302605504*b^3)*s+(640332*dy^2*b-3
013117800*dx)*a^2-133097580*dy*b^2*a)*x-10458756*dx^2*b^2*y^9+(21789075*dx^2*b*a-15367
968*dy*dx*b^3)*y^8+(8425109*dx^2*a^2+1920996*dy*dx*b^2*a-107575776*dx*b^3)*y^7+(-12326
391*dy*dx*b*a^2+224756532*dx*b^2*a)*y^6+(8964648*dx*b*a^2-5618340*dy*dx*b)*y^5+(665557
20*dx*b*s-975042684*dy*b^2*a^2-16850218*dy*dx*a+11875248*dy^2*b^2-22185240*dx*b)*y^4+(
(11700512208*b^2*a^2+176927289*dx*a-127135008*dy*b^2)*s+(81457992*dy^2*b-58975763*dx)*
a+284164524*dy*b^2)*y^3+((-1645012908*dy*b*a-2933884800*b^2)*s-34435632*dy^2*a^2+16272
04887*dy*b*a)*y^2+(8283334752*b*a*s^2+(723148272*dy*a^2-16136366400*b*a)*s-919107651*d
y*a^2)*y-3796528428*a^2*s^2+9326969190*a^2*s,399168*dx*b^3*x^3+((142296*dx*b*a+128304*
dy*b^3)*y-1197504*b^3*s-65219*dx*a^2-8316*dy*b^2*a)*x^2+(-33264*dx*b^3*y^7+19404*dx*b^
2*a*y^6+2772*dy*b^2*y^3+41580*dy*b*a*y^2+(-426888*b*a*s-18634*dy*a^2)*y+195657*a^2*s)*
x+30492*dx*b^2*a^2*y^10-6468*dx*b^2*y^9-2156*dx*b*a*y^8-2541*dy*b*a^2*y^6+196*dy*b*y^5
,399168*dx*b^3*y^2*x^2+((142296*dx*b*a+128304*dy*b^3)*y^3+(-1197504*b^3*s-65219*dx*a^2
-8316*dy*b^2*a)*y^2+7623*dy*b*a^2*y-588*dy*b)*x-33264*dx*b^3*y^9+19404*dx*b^2*a*y^8-17
```

```
787*dx*b*a^2*y^7+1372*dx*b*y^6+2772*dy*b^2*y^5+41580*dy*b*a*y^4+(-426888*b*a*s-18634*d
y*a^2)*y^3+195657*a^2*s*y^2]
```

著者たちの先行研究として，Briançon-Maisonobe [2] の s-parametric annihilator の計算法をパラメータ版に拡張し研究がある [14]．その先行研究において作成した実装と，今回新たに作成した方法を比較する．先行研究で得た実装の主な計算は Poincaré-Birkhoff-Witt 代数上での包括的グレブナー基底系 (CGS) 計算である．表 3 の CGS は先行研究で作成されたパラメータ付き s-parametric annihilator のプログラムを表し，NEW が今回新たに実装したプログラムを表す．使用した計算機は，OS：Windows 11, CPU: Interl(R), COre(TM) i9-10980XE@ 3.00GHz, メモリー 256GB であり，数値は CPU 秒を表し，$> 30m$ は 30 分経過しても出力が返ってこないことを意味する．x, y, z は主変数で，a, b は変形パラメータである．

表 3: 計算比較

	semi-weighted homogeneous な多項式 f	CGS	NEW
1	$x^3+y^{13}+axy^9+bxy^{10}$	$> 30m$	1.047
2	$x^3+xy^9+ay^{14}+by^{15}$	$> 30m$	0.7344
3	$x^3+y^{14}+axy^{10}+bxy^{11}$	$> 30m$	0.9844
4	$x^3y+y^{11}+axy^8+bxy^9$	$> 30m$	0.5469
5	$x^3y+xy^8+ay^{12}+by^{13}$	$> 30m$	0.6875
6	$x^3y+y^{12}+axy^9+bxy^{10}$	$> 30m$	1.719
7	$x^3+yz^2+y^{10}+axy^7+bxy^8$	$> 30m$	2.284
8	$x^3+yz^2+xy^7+ay^{11}+by^{12}$	$> 30m$	1.5
9	$x^3+yz^2+y^{11}+axy^{11}+bxy^{12}$	$> 30m$	0.8906
10	$x^3+x^2y^4+y^{12}+ay^{13}+by^{14}$	$> 30m$	1.438

表 3 にあるように，新しい計算法 NEW は，非可換な包括的グレブナー基底系を用いる計算法より圧倒的に効率が良いことがわかる．

新しい計算法を用いて，目的の表 2 の特異点の $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ を計算した．その結果が表 4 であり，6 個の $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元が得られた．他の特異点は，1 週間以上計算したが出力が返ってこない，もしくは，この方法では生成元が完璧には得られない（4 階以上の偏微分作用素が必要）かのどちらかである．

表 4: Inner modality 3 で結果が得られた特異点のリスト

type	weighted homogeneous part	upper monomials	時間 (CPU 秒)
E_{25}	x^3+xy^9	y^{14}, y^{15}, y^{16}	66.08
Z_{24}	x^3y+xy^8	y^{12}, y^{13}, y^{14}	2.049
Q_{23}	$x^3+yz^2+xy^7$	y^{11}, y^{12}, y^{13}	6.531
J_{22}	$x^3+t_1x^2y^4+y^{12}$	y^{13}, y^{14}	5.531
Z_{21}	$x^3y+t_1x^2y^4+y^{10}$	y^{11}, y^{12}	11.52
W_{20}	$x^3+yz^2+t_1x^2y^3+y^9$	y^{10}, y^{11}	3.438

非可換包括的グレブナー基底系を用いた方法では得られなかった 6 個が，新たな方法では結果が得られたことは大きな成果である．

さて，他の特異点の計算において何に時間かかっているのか？ 解析してみると，Step 2-2 や Step 2-4-1 に相当するパラメータ付きイデアル商の計算が一番重いようである．この改善方法の 1 つとして，例えば，2 階の偏微分作用素の場合，

$$u \in \left\langle \left\{ h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, h_1 \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \cup \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \,\middle|\, 1 \leq i \leq j \leq n \right\} \right\rangle : \langle b h_1^2 \rangle$$

であり，$u(O) \neq 0$ となるものを求める必要が，我々は原点しか興味がないので飽和イデアル

$$p \in \left\langle \left\{ h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, h_1 \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \cup \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \,\middle|\, 1 \leq i \leq j \leq n \right\} \right\rangle : \langle x_1, \ldots, x_n \rangle^\infty$$

を考えることで，$p(O) \neq 0$ となるもの求め，$u = p$ とすることで良いので，飽和イデアルを計算する方法も試した．しかしながら，我々のターゲットである Inner modality 3 の場合は表 4 にあるもの以外はやはり得られなかった．

イデアル商以外にも syzyzy 加群の包括的グレブナー基底系 (パラメータ付き拡張イデアルメンバーシップ) の計算も重いようであり今後の課題である．

ここでは，紙面制限があるので局所 b-関数の計算については議論しないが，$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元を得た後，論文 [19] で紹介した方法を用いれば局所 b-関数を得ることが出来る．すなわち，

1. weigted homogeneous な多項式の b-関数の根の集合を計算し，
2. 得られた根の集合から semi-weigted homogeneous な多項式の根の集合を予想し，
3. 予想した根が本当に根なのか，そうでないのかを論文 [8] の方法を用いてチェックする．その後，
4. $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元と $\{f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$ に付随する代数的局所コホモロジーを計算することで，必要な根の個数を得る

ということを行えばよい．これは，b-関数の根が有理数である事実 [4] と，weigted homogeneous から semi-weigted homogeneous に変形させたとき,『根は変化しないか』，もしくは『-1 または -2 だけずれる』という経験則を用いた計算法である．

本稿では，パラメータ付き $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の議論にとどめる．今回世界で初めて得られた Inner modality 3 の 6 個の特異点のパラメータ付き局所 b-関数については，今後，別の場所で報告・議論する予定である．

謝　辞

本研究は JSPS 科研費 23K03076, 22K03334 の助成を受けたものである．

参 考 文 献

[1] Briançon, J., Granger, M., Maisonobe, P. and Miniconi, M., Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **39**, 553–610, 1989

[2] Briançon, J. and Maisonobe, P. : Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes. *prépublication Univ. Nice-Sophia Antipolis n°*, 650, Mai, 2002.

[3] Kashiwara, M. : On the maximally overdetermined system of linear differential equations, I, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **10**, 563–579, 1975

[4] Kashiwara, M. : B-functions and holonomic systems: Rationality of roots of b-functions. *Invent. Math.*, **38**, 33–53, 1976

[5] Kato, M.: The b-function of μ-constant deformation of $x^7 + y^5$. *Bull. College of Science, Univ. of the Ryukyus*, Vol. **32**, 5-10, 1981.

[6] Kato, M.: The b-function of μ-constant deformation of $x^9 + y^4$. *Bull. College of Science, Univ. of the Ryukyus*, Vol. **33**, 5-8, 1982.

[7] 加藤満生, 田島慎一： 孤立特異点変形と f^s のパラメータ付き偏微分作用素環での annihilator について. 数理解析研究所講究録, Vol. **1955**, 168–179, 2015.

[8] Levandovskyy, V. and Martín-Morales, V.: Algorithms for checking rational roots of b-functions and their applications. *J. Algebra*, Vol. **352**, 408–429, 2012.

[9] 中村弥生, 田島慎一： Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について. 数理解析研究所講究録, Vol. **1431**, 55–67, 2005.

[10] 鍋島克輔, 田島慎一： 偏微分作用素環での包括的グレブナー 基底とホロノミー D-加群, b-関数. 数理解析研究所講究録, Vol. **1976**, 100–116, 2015.

[11] Nabeshima, K. and Tajima, S. : Efficient computation of algebraic local cohomology classes and change of ordering for zero-dimensional standard bases, *Proc. CASC2015, LNCS*, Vol.**9301**, Springer pp.334–348, 2015.

[12] Nabeshima, K. and Tajima, S. : Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, *J. Symb. Comp.*, Vol.**82**, 91–122, 2017.

[13] Nabeshima, K. and Tajima, S. : Comprehensive Gröbner systems approach to b-functions of μ-constant deformations,Saitama Mathematical Journal, Vol. **31**, 115–136, 2017

[14] Nabeshima, K. Ohara, K. and Tajima, S.: Comprehensive Gröbner systems in PBW algebras, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules, *J. Symb. Comp.*, Vol.**89**, 146-170, 2018

[15] 鍋島克輔, 田島慎一： 収束冪級数環における generalized integral dependence relation の計算について. 数理解析研究所講究録, Vol. **2104**, 78–85, 2019.

[16] Nabeshima, K. and Tajima, S. : Solving parametric ideal membership problems and computing integral numbers in a ring of convergent power series via comprehensive Gröbner systems, *Math.Comput.Sci.*, Vol. **13**, 185–194, 2019.

[17] 鍋島克輔, 田島慎一： 半擬斉次孤立特異点の性質を利用した局所 b-関数の計算. 数理解析研究所講究録, Vol. **2159**, 188–199, 2020

[18] Nabeshima, K. and Tajima, S. : Generalized integral dependence relations, *Proc. MACIS 2019, LNCS*, Vol.**11989**, Springer pp.48–63, 2020.

[19] Nabeshima, K., and Tajima, S.: Methods for computing b-functions associated with μ-constant deformations – Case of inner modality two –. *Kyushu J. Math.*, Vol.**75**, 55–76. 2021

[20] Nishiyama, K. and Noro, M.: Stratification associated with local b-functions, *J. Symb. Comp.*, Vol. **45**, 462–480, 2010

[21] Noro, M. and Takeshima, T.: Risa/Asir - A computer algebra system. *Proc. ISSAC 1992*, pp. 387–396, ACM, 1992. `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`

[22] Oaku, T. : An algorithm of computing b-functions. *Duke Math. J.*, Vol. **87**, 115–132, 1997.

[23] Oaku, T. : Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules. *Adv. Appl. Math.*, Vol. **19**, 61–105. 1997.

[24] Oaku, T. : Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. **117** and **118**, 495–518, 1997.

[25] 大阿久俊則：計算の視点から見た D 加群理論. 数学 50 巻 2 号, pp.203-211, 日本数学会，1998.

[26] 大阿久俊則：D 加群と計算数学. 朝倉書店, 2002.

[27] Tajima, S, Nakamura, N. and Nabeshima, K. : Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. **56**, 341–361, 2009.

[28] Yano, T. : On the holonomic system of f^s and b-functions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.*, Vol. **12**, 469–480, 1978.

[29] Yano, T. : On the theory of b-functions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.*, Vol. **14**, 111–202, 1978.

[30] Yoshinaga, E. and Suzuki, M. : Normal forms of nondegenerate quasihomogeneous functions with inner modality ≤ 4. *Invent. Math.*, Vol. **55**, 185–206, 1979.