Parallel methods for quasinonexpansive mappings in a Hilbert space

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治 (Koji Aoyama)
Chiba University
中央大学・理工学部 家本繁 (Shigeru Iemoto)
Chuo University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J25, 47J20, 47H09.
Keywords and phrases. Parallel method, 擬非拡大写像, 不動点, 逐次近似.

1　はじめに

本稿では, 次の共通不動点問題の解の逐次近似に関する結果を報告する.

問題 1.1. N を正の整数, C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $T_1, \dots, T_N$ を C から H への写像とする. このとき, $T_1, \dots, T_N$ の共通不動点を求めよ.

問題 1.1 の解を構成するための逐次近似法として様々なものが知られているが, 本稿では, 文献 [1] および [10] で使われた, いわゆる "parallel method" を含む逐次近似法に注目する. すなわち, C の点 x_n が与えられたとき

$$\|T_{i_n}x_n - x_n\| = \max\{\|T_1x_n - x_n\|, \dots, \|T_Nx_n - x_n\|\}$$

となる $i_n \in \{1, \dots, N\}$ を選び, x_n と T_{i_n} を用いて x_{n+1} を構成する逐次近似法を用いる.

文献 [1] および [10] では, parallel method と, いわゆる hybrid projection method [33, 34] や shrinking projection method [36] を組み合わせた逐次近似法が使われている. 本稿では, parallel method と, [16, 25] で使われたアルゴリズムを組み合わせた逐次近似法を用いる.

2　準備

本稿では, H を実 Hilbert 空間 (以下, 「実」を略す.), $\|\cdot\|$ を H のノルム, C を H の空でない部分集合, I を H 上の恒等写像, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする. H の点列 $\{x_n\}$ が z に強収束するとき $x_n \to z$, 弱収束するとき $x_n \rightharpoonup z$ と表す.

T を C から H への写像とする. 写像 T の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ と表す. つまり,

$\mathrm{F}(T) = \{z \in C \colon z = Tz\}$ である．点 $z \in C$ が T の**漸近的不動点** (*asymptotic fixed point*) であるとは, C の点列 $\{x_n\}$ が存在して, $x_n - Tx_n \to 0$ および $x_n \rightharpoonup z$ が成り立つときをいう [33, 35]．写像 T の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(T)$ と表す．定義より, $\mathrm{F}(T) \subset \hat{\mathrm{F}}(T)$ が成り立つことがわかる．写像 T が 0 で *demiclosed* であるとは, $\{x_n\}$ が C の点列で $x_n \rightharpoonup p$ および $Tx_n \to 0$ のとき, $Tp = 0$ が成り立つときをいう [32]．定義より, $I - T$ が 0 で demiclosed であるための必要十分条件は, $\hat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$ であることがわかる．写像 T が**擬非拡大** (*quasinonexpansive*) であるとは, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, かつ, すべての $x \in C$ と $p \in \mathrm{F}(T)$ に対して $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$ が成り立つときをいう．擬非拡大写像の不動点集合は閉凸であることが知られている [31, Theorem 1]．写像 T が**非拡大** (*nonexpansive*) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう．写像 T が非拡大のとき, $\hat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$ が成り立つことが知られている [32]. 写像 T が**堅非拡大** (*firmly nonexpansive*) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x - y - (Tx - Ty)\|^2 \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう．式 (2.1) より, 堅非拡大写像 T は非拡大であることがわかる．写像 T が**強擬非拡大** (*strongly quasinonexpansive*) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [7, 11, 16, 19, 20, 23, 25, 27, 28, 35].

- T が擬非拡大であり,
- $\{x_n\}$ が C の有界点列, $p \in \mathrm{F}(T)$, $\|x_n - p\| - \|Tx_n - p\| \to 0$ ならば, $x_n - Tx_n \to 0$ である.

式 (2.1) より, T が不動点をもつ堅非拡大写像ならば, T は強擬非拡大であることがわかる.

註 1. 上記の漸近的不動点は, 文献 [35] の漸近的不動点に基づいているが, 両者の定義は少し異なる.

註 2. 強擬非拡大写像は, 文献 [35] の**強非拡大写像** (*strongly nonexpansive mapping*) に基づいている．強非拡大写像については, [30] も参照されたい.

註 3. 文献 [13, 17, 18, 22, 30] の強非拡大写像が不動点をもつならば, それらは強擬非拡大である.

註 4. 文献 [19, 23, 25] の *type (sr)* 写像は, 強擬非拡大写像の一般化の一つである. type (sr) 写像とその周辺に関しては, [21, 27] および [12, Remark 2.4] も参照されたい.

註 5. 文献 [20] の**劣勾配射影** (*subgradient projection*) は強擬非拡大であるが, 一般に非拡大ではないことが知られている [21, 29].

D を H の空でない閉凸部分集合とする. H から D の上への**距離射影** (*metric projection*) を P_D と表す. つまり, $x \in H$ のとき, $P_D(x)$ は

$$\|x - P_D(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in D\}$$

を満たす唯一の D の点である. 距離射影 P_D は堅非拡大であることが知られている [43]. したがって, P_D は非拡大であるから, $\hat{\mathrm{F}}(P_D) = \mathrm{F}(P_D) = D$ であり, P_D は強擬非拡大である.

$\{T_n\}$ を C から H への写像の列, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(T_n)$ とし, $F \neq \emptyset$ と仮定する. このとき, $\{T_n\}$ が**強擬非拡大列** (*strongly quasinonexpansive sequence*) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [12, 40].

- 各 T_n が擬非拡大であり,
- $\{x_n\}$ が C の有界点列, $p \in F$, $\|x_n - p\| - \|T_n x_n - p\| \to 0$ ならば, $x_n - T_n x_n \to 0$ である.

点 $z \in C$ が $\{T_n\}$ の**漸近的不動点** (*asymptotic fixed point*) であるとは, C の点列 $\{x_n\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在し, $x_n - T_n x_n \to 0$ および $x_{n_i} \rightharpoonup z$ が成り立つときをいう [4, 8, 11]. $\{T_n\}$ の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ と表す. 定義より, $F \subset \hat{\mathrm{F}}(\{T_n\})$ が成り立つことがわかる.

註 6. 上記の強擬非拡大列は, [8, 11, 20, 37, 38] における**強擬非拡大型** (*strongly quasinonexpansive type*) の写像列と同じである. また, [4, 16, 19, 25, 40] の *strongly relatively nonexpansive sequence* は, 強擬非拡大列の一般化の一つである [20, Remark 2.5]. 文献 [9, 13, 17, 18, 39, 41, 42] の**強非拡大列** (*strongly nonexpansive sequence*) が共通不動点をもつとき, それらは強擬非拡大列となる.

次の補助定理は, 次節以降の結果を得るために重要である.

補助定理 2.1. C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合, $\{U_n\}$ を C から H への写像の列, N を正の整数, $T_1, \dots, T_N$ を C から H への写像とし, 以下を仮定する.

- $\bigcap_{i=1}^N \mathrm{F}(T_i) \neq \emptyset$;
- 任意の $x \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して, $U_n x = T_k x$ となる $k \in \arg\max\{\|T_i x - x\| : i = 1, \dots, N\}$ が存在する.

このとき, 以下が成り立つ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{F}(U_n) = \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{F}(T_i)$. よって, $\bigcap_n \mathrm{F}(U_n) \neq \emptyset$.
(2) $T_1, \dots, T_N$ が擬非拡大ならば, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して U_n も擬非拡大である.
(3) すべての $i = 1, \dots, N$ に対して $\hat{\mathrm{F}}(T_i) = \mathrm{F}(T_i)$ ならば, $\hat{\mathrm{F}}(\{U_n\}) = \bigcap_n \mathrm{F}(U_n)$.
(4) $T_1, \dots, T_N$ が強擬非拡大ならば, $\{U_n\}$ は強擬非拡大列である.

次の定理は, [16, Theorem 4.1] の特別な場合である.

定理 2.2. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $u \in H$, $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列, $\{S_n\}$ を C から H への写像の列とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = P_C\big(\alpha_n u + (1 - \alpha_n) S_n x_n\big)$$

で定義する. さらに, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n) \neq \emptyset$, $\hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) = F$, $\{S_n\}$ は強擬非拡大列であり, $\sum_n \alpha_n = \infty$ および $\lim_n \alpha_n = 0$ を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する.

次の定理は, [25, Theorem 4.1] の特別な場合である.

定理 2.3. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, $u \in H$, $\{S_n\}$ を C から C への写像の列とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_{n+1} = S_n x_n$ で定義する. さらに, $F = \bigcap_n \mathrm{F}(S_n) \neq \emptyset$, $\hat{\mathrm{F}}(\{S_n\}) = F$, $\{S_n\}$ は強擬非拡大列であると仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は $\lim_n P_F(x_n)$ に弱収束する.

註 7. 定理 2.2 および 2.3 の仮定 $\hat{\mathrm{F}}(\{T_n\}) = F$ は, [2–6, 13–16, 19, 20, 22, 25] の条件 (Z), [24] の条件 (Z1), および, [18, 23] の条件 (A) と同値である. 詳しくは [4, Proposition 6] を参照されたい.

註 8. 定理 2.2 および 2.3 の仮定を満たす写像列の例については, [8], [20, Example 4.5], [13, 16, 25] および [2–4, 6, 14, 17–19, 22, 24–26] を参照されたい.

3　問題 1.1 の各 T_i が擬非拡大のとき

この節では, 問題 1.1 の各 T_i を擬非拡大と仮定し, その解の逐次近似に関する結果を紹介する.

補助定理 2.1 および定理 2.2 を使うと, 次の定理を示すことができる.

定理 3.1 ([12, Theorem 3.1]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合, N を正の

整数, $T_1,\dots,T_N$ を C から H への擬非拡大写像, F を $T_1,\dots,T_N$ の共通不動点, つまり, $F=\bigcap_{i=1}^N \mathrm{F}(T_i)$, $u\in H$, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列, $\{\beta_n\}$ を $(0,1)$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1\in C$ および任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n\in\arg\max\{\|T_ix_n-x_n\|: i=1,\dots,N\}; \\ x_{n+1}=P_C\Big(\alpha_n u+(1-\alpha_n)\big(\beta_n x_n+(1-\beta_n)T_{i_n}x_n\big)\Big) \end{cases} \tag{3.1}$$

で定義する. さらに, $F\neq\emptyset$, 任意の $i=1,\dots,N$ に対して $\hat{\mathrm{F}}(T_i)=\mathrm{F}(T_i)$, $\sum_n\alpha_n=\infty$, $\lim_n\alpha_n=0$, $\inf_n\beta_n>0$ および $\sup_n\beta_n<1$ を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する.

定理 3.1 で各 T_i の値域が C の部分集合であり, $u\in C$ ならば, 式 (3.1) を

$$x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)\big(\beta_n x_n+(1-\beta_n)T_{i_n}x_n\big)$$

とできる [12, Corollary 3.3].

4 問題 1.1 で各 T_i が強擬非拡大のとき

この節では, 問題 1.1 の各 T_i を強擬非拡大写像, $C=H$ と仮定し, その解の逐次近似に関する結果を紹介する.

補助定理 2.1 および定理 2.2 を使うと, 次の定理を示すことができる.

定理 4.1 ([12, Theorem 4.1])**.** H を Hilbert 空間, N を正の整数, $T_1,\dots,T_N$ を H から H への強擬非拡大写像, F を $T_1,\dots,T_n$ の共通不動点, $u\in H$, $\{\alpha_n\}$ を $(0,1]$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1\in H$ および $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n\in\arg\max\{\|T_ix_n-x_n\|: i\in\Lambda\}; \\ x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)T_{i_n}x_n \end{cases}$$

で定義する. さらに, $F\neq\emptyset$, 任意の $i=1,\dots,N$ に対して $\hat{\mathrm{F}}(T_i)=\mathrm{F}(T_i)$, $\sum_n\alpha_n=\infty$ および $\lim_n\alpha_n=0$ を仮定する. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する.

補助定理 2.1 および定理 2.3 を使うと, 次の定理を示すことができる.

定理 4.2 ([12, Theorem 4.2])**.** H, N, $T_1,\dots,T_N$, F は定理 4.1 と同じとし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1\in H$ および任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n\in\arg\max\{\|T_ix_n-x_n\|: i=1,\dots,N\}; \\ x_{n+1}=T_{i_n}x_n \end{cases}$$

で定義する．このとき, $\{x_n\}$ は $\lim_n P_F(x_n)$ に弱収束する．

註 9. 定理 4.1 および 4.2 は, H の閉凸部分集合 C を定義域とする写像の共通不動点問題にも応用できる．実際, 各 $S\colon C \to H$ が強擬非拡大のとき, $\mathrm{F}(SP_C) = \mathrm{F}(S)$, SP_C は H から H への強擬非拡大写像であり, さらに, $\hat{\mathrm{F}}(S) = \mathrm{F}(S)$ ならば $\hat{\mathrm{F}}(SP_C) = \mathrm{F}(SP_C)$ であることが知られている．詳しくは, [23, Lemma 3.2, Lemma 3.3], [28, Theorem 5.5], [23, Theorem 3.4] および [12, Remark 2.6] を参照されたい．

註 10. 定理 4.1 および 4.2 は, (強擬非拡大ではない) 擬非拡大写像の共通不動点問題にも応用できる．実際, 擬非拡大写像 $T\colon H \to H$ が与えられたとき, $\lambda \in (0,1)$ をとり, $S_\lambda = \lambda I + (1-\lambda)T$ とおくと, $\mathrm{F}(S_\lambda) = \mathrm{F}(T)$, S_λ は強擬非拡大であり, さらに, $\hat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$ ならば $\hat{\mathrm{F}}(S_\lambda) = \mathrm{F}(S_\lambda)$ が成り立つことが知られている．詳しくは, [27, Corollary 3.4] および [23, Corollary 3.8] を参照されたい．

参考文献

[1] P. K. Anh and C. V. Chung, *Parallel hybrid methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. **35** (2014), 649–664.

[2] K. Aoyama, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2010, pp. 21–28.

[3] ———, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed point theory and its applications, 2010, pp. 1–7.

[4] ———, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III (ISBFS 2009), 2011, pp. 343–350.

[5] ———, *Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear mathematics for uncertainty and its applications, 2011, pp. 387–394.

[6] ———, *Approximations to solutions of the variational inequality problem for inverse-strongly-monotone mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis -I-, 2013, pp. 1–9.

[7] ———, *Strongly quasinonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2016, pp. 19–27.

[8] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 167–180.

[9] ———, *Uniformly nonexpansive sequences*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 179–187.

[10] ———, *Parallel hybrid methods for relatively nonexpansive mappings*, Josai Mathematical Monographs **11** (2018), 121–130.

[11] ———, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings and quasinonexpansive mappings in a Hilbert space*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2019, pp. 1–10.

[12] K. Aoyama and S. Iemoto, *Parallel methods for quasinonexpansive mappings in a Hilbert space* (2024), available at `arXiv:2409.03242[math.FA]`.

[13] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[14] ———, *A note on the hybrid steepest descent methods*, Fixed point theory and its applications, 2013, pp. 73–80.

[15] ———, *Viscosity approximation methods with a sequence of contractions*, Cubo **16** (2014), 9–20.

[16] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[17] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[18] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, 2008, pp. 1–18.

[19] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.

[20] ———, *Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.

[21] ———, *Cutter mappings and subgradient projections in Banach spaces*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 457–473.

[22] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[23] ———, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2009, pp. 7–26.

[24] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, 2009, pp. 1–17.

[25] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[26] ———, *Proximal point methods for monotone operators in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 259–281.

[27] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[28] K. Aoyama and K. Zembayashi, *Strongly quasinonexpansive mappings, II*, J. Nonlinear Convex Anal. **19** (2018), 1655–1663.

[29] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces*, Math. Oper. Res. **26** (2001), 248–264.

[30] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[31] W. G. Dotson Jr., *Fixed points of quasi-nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 167–170.

[32] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[33] S.-y. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[34] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[35] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, 1996, pp. 313–318.

[36] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by*

hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[37] 青山耕治, *An iterative method for generalized split feasibility problems*, 京都大学数理解析研究所講究録 **2065** (2018), 19–29.

[38] ______, *Hilbert* 空間における非拡大写像と擬非拡大写像の不動点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2114** (2019), 29–35.

[39] ______, 一様非拡大性をもつ写像列について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2190** (2021), 166–173.

[40] ______, 強擬非拡大性をもつ写像列, 京都大学数理解析研究所講究録 **2194** (2021), 77–88.

[41] ______, 増大作用素のリゾルベントに関する収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **2214** (2022), 1–10.

[42] ______, 強非拡大性をもつ写像列の不動点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2250** (2023), 115–123.

[43] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.