2次元ノルムによるPythagorean 直交の一般化

立命館大学 理工学部 数理科学科 水口洋康

Hiroyasu Mizuguchi

Faculty of Engineering Science, Ritsumeikan University

概 要

内積空間では直交が非常に重要な意味を持ち, ノルム空間にも一般化された直交の概念がいくつも定義, 研究されている. 内積空間において三平方の定理が成り立ち, その等式で定義されるノルム空間における Pythagorean 直交の概念が存在する. 三平方の定理と Pythagorean 直交における等式を $\mathbb{R}^2$ 上 ℓ_2 ノルムを使って表現されていると捉え, 一般化を考えた.

MSC: 46B20, 51B20, 52A21.

1. Introduction

Theorem 1 (三平方の定理)**.**
X が内積空間であるならば,

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x-y\|^2 \Longleftrightarrow x\perp y\,(\langle x,y\rangle=0)\,.$$

が成り立ち, 数千年前から世界各地で認知, 利用されている.

内積空間では内積が 0 であるとして 2 つの元の直交を考えることができ, 内積空間における直交の概念は有用かつ興味深く, 幅広く研究が行われている. 一方, ノルム空間では内積が存在するとは限らないので, ノルムに関する等式や不等式により直交を拡張した複数の概念が定義, 研究されている ([2, 3] 等を参照).

ノルム空間では, 三平方の定理における等式により Pythagorean 直交が定義される.

Definition 2 (Pythagorean 直交)**.** ノルム空間 X の元 x, y に対し, x が y に *Pythagorean* 直交する ($x\perp_P y$ と表記) とは,

$$\|x\|_X^2+\|y\|_X^2=\|x-y\|_X^2$$

が成り立つ事を言う ([6]).

Pythagorean 直交の条件式は, 2 次元上の通常のノルム ℓ_2-norm $\|\cdot\|_2$ を用いて

$$\|(\|x\|_X,\|y\|_X)\|_2=\left(\|x\|_X^2+\|y\|_X^2\right)^{1/2}=\|x-y\|_X$$

と表現できる.

p 乗に関する一般化があらかじめ考察されていた.

Definition 3 (L_p 直交)**.** *ノルム空間 X の元 x, y に対し, x が y に L_p 直交する ($x \perp_{L_p} y$ と表記) とは,*

$$\|x\|_X^p + \|y\|_X^p = \|x-y\|_X^p$$

が成り立つ事を言う ([8, 12]).

L_p 直交の条件式も, ℓ_p-norm $\|\cdot\|_p$ を用いて

$$\|(\|x\|_X, \|y\|_X)\|_p = (\|x\|_X^p + \|y\|_X^p)^{1/p} = \|x-y\|_X$$

と表現可能である.

以上から, 次を考える.

Definition 4. *$\|\cdot\|$ を実 2次元上のノルムとする. ノルム空間 X の元 x, y に対し, x が y に generalized relation of Pythagorean orthogonality by $\|\cdot\|$ を持つ ($x \perp_{\|\cdot\|GP} y$ と表記) とは*

$$\|(\|x\|_X, \|y\|_X)\| = \|x-y\|_X$$

が成り立つ事を言う.

性質 normalized: $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$ を仮定できる ([1]). 0 以上である $\|x\|_X$, $\|y\|_X$ に対して $\|(\|x\|_X, \|y\|_X)\|$ を考えるので, absolute ノルムを考えれば十分である. 2 次元上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは

$$\|(a,b)\| = \|(|a|,|b|)\| \quad \left({}^{\forall}(a,b) \in \mathbb{R}^2\right)$$

が成り立つことを言う ([5, 11]).

generalized relation of Pythagorean orthogonality by $\|\cdot\|$ は L_p 直交を含め, あくまでノルム空間における Pythagorean 直交の一般化であり, L_p 直交の段階で既に, 内積空間の直交をノルム空間に一般化したものではなくなっている ($p \neq 2$) 点に注意が必要である (3 節で例を挙げる).

しかしながら, ノルム空間における Pythagorean 直交が満たす 3 つの存在定理を, generalized relation of Pythagorean orthogonality by $\|\cdot\|$ も満たすことが判明した.

2. Results

Pythagorean 直交は一般のノルム空間において以下 3 つの存在定理を満たしている.

Theorem 5 (existence)**.** *X をノルム空間とする. このとき, 任意の一次独立な $x, y \in X$ と $\rho > 0$ に対して, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\|z\| = \rho$ および $x \perp_P z$ を満たす $z = ax + by$ が存在する.*

Theorem 6 (α-existence)**.** *X をノルム空間とする. このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x \perp_P \alpha x + y$ を満たす $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する.*

Theorem 7 (orthogonal diagonals)**.** X をノルム空間とする．このとき，任意の $x, y \in X$ に対して，$x + ry \perp_P x - ry$ を満たす $r > 0$ が存在し，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\|x\|_X}{\|y\|_Y} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \frac{\|x\|_X}{\|y\|_X}.$$

これらの一般化を generalized relation of Pythagorean orthogonality by $\|\cdot\|$ に対して証明した ([10]).

実 2 次元上の absolute normalized ノルム全体を AN_2 と表記する．

$$\|(a,b)\|_1 = |a| + |b|$$

で定められる $\|\cdot\|_1$ に関しては generalized relation of Pythagorean orthogonality by $\|\cdot\|_1$ は三角不等式の等号成立であり, 以下では除外する．

Theorem 8 (existence)**.** X をノルム空間とし，$\|\cdot\|_1 \neq \|\cdot\| \in AN_2$ とする．このとき, 任意の一次独立な $x, y \in X$ と $\rho > 0$ に対して，$a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\|z\| = \rho$ および $x \perp_{\|\cdot\|GP} z$ を満たす $z = ax + by$ が存在する．

実 2 次元上のノルム $\|\cdot\|$ に対しては一般に $\|(b,a)\| = \|(a,b)\|$ が必ずしも成立しないので, $x \perp_{\|\cdot\|GP} y$ は必ずしも $y \perp_{\|\cdot\|GP} x$ を意味せず, $x + ry \perp_{\|\cdot\|GP} x - ry$ も $x - ry \perp_{\|\cdot\|GP} x + ry$ を意味しない．

Theorem 9 (orthogonal diagonals)**.** X をノルム空間とし，$\|\cdot\|_1 \neq \|\cdot\| \in AN_2$ とする．このとき, 任意の $x, y \in X$ に対し，$x + ry \perp_{\|\cdot\|GP} x - ry$ を満たす $r > 0$ が存在する．
また $x - sy \perp_{\|\cdot\|GP} x + sy$ を満たす $s > 0$ との間に

$$\frac{\|(1,1)\|}{2} \frac{\|x\|_X}{\|y\|_X} \leq \max\{r, s\} \leq \frac{\|(1,1)\|}{2 - \|(1,1)\|} \frac{\|x\|_X}{\|y\|_X}$$

が成立する．

α-existence を示す際 sharp triangle inequality が有用だった．

Lemma 10 (Sharp triangle inequality [9])**.** X をノルム空間とする．このとき, 任意の $x, y \in X \setminus \{0\}$ に対して，

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Theorem 11 (α-existence)**.** X をノルム空間とし，$\|\cdot\|_1 \neq \|\cdot\| \in AN_2$ とする．このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して，$x \perp_{\|\cdot\|GP} \alpha x + y$ を満たす $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する．

Proof.

$$\begin{aligned} f(t) &= \|(\|x\|_X, \|tx+y\|_X)\| - \|x-(tx+y)\|_X \\ &= \|(\|x\|_X, \|tx+y\|_X)\| - \|(t-1)x+y\|_X. \end{aligned}$$

で関数 $f(t)$ を定義すると, ノルム $\|\cdot\|$ の monotonicity から

$$f(t) \geq \|tx+y\|_X - \|(t-1)x+y\|_X$$

が成立する. s に関する $\|y+sx\|_X$ が convex なので, 十分大きな $t \geq 0$ に対して $f(t) \geq \|tx+y\|_X - \|(t-1)x+y\|_X > 0$.

一方, 十分大きな負の数 t に対して, $\|x\|_X \leq \|tx+y\|_X$ が成り立つので, $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して sharp triangle inequality を用いると

$$\begin{aligned} f(t) &= \|(\|x\|_X, 0) + (0, \|tx+y\|_X)\| - \|(t-1)x+y\|_X \\ &\leq \|x\|_X + \|tx+y\|_X - (2 - \|(1,1)\|)\, \|x\|_X - \|(t-1)x+y\|_X \\ &= (\|(1,1)\| - 1)\, \|x\|_X + |t| \left\| x + \frac{1}{t} y \right\|_X - |t| \left\| x + \frac{1}{t}(y-x) \right\|_X \\ &= (\|(1,1)\| - 1)\, \|x\|_X - \frac{\left\| x + \frac{1}{t} y \right\|_X - \|x\|_X}{1/t} \\ &\qquad + \frac{\left\| x + \frac{1}{t}(y-x) \right\|_X - \|x\|_X}{1/t} \end{aligned}$$

であり, $N_-(x, y-x) = N_-(x,y) - \|x\|_X$ と $\|\cdot\| \neq \|\cdot\|_1$ から,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} f(t) &\leq (\|(1,1)\| - 1)\, \|x\|_X - N_-(x,y) + N_-(x, y-x) \\ &= -(2 - \|(1,1)\|)\, \|x\|_X < 0 \end{aligned}$$

を得る. ここで, $N_-(x,y)$ は x における y 方向の left Gateaux differential である.

以上より $f(t_0) = 0$ をみたす $t_0 \in \mathbb{R}$ が存在し, $x \perp_{\|\cdot\|GP} t_0 x + y$.

□

sharp triangle inequality の応用にもなっているため, こちらの証明は紹介した.

3. Examples

容易に得られる generalized relation of Pythagorean orthogonality の例として,

$$\|(a,b)\|_\infty = \max\{|a|, |b|\}$$

で定められる $\|\cdot\|_\infty$ に関し次が得られる.

Example 12. 任意のノルム空間 X において, $\|x-z\| \le 1$ を満たす $x, z \in S_X$ をとり $y = x - z$ とする．このとき,

$$\|(\|x\|_X, \|y\|_X)\|_\infty = \|x\|_X = 1 = \|z\|_X = \|x-y\|_X$$

なので $x \perp_{\|\cdot\|_\infty GP} y$ が成立する．

あくまでノルム空間における Pythagorean 直交の一般化であり, 内積空間の直交をノルム空間に一般化したものではない例としては, 次が挙げられる．

Example 13. 通常のノルム $\|\cdot\|_2$ と内積を持つ 2 次元空間において, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ に対し $e_1 \perp e_2$ であり, 直角三角形や三平方の定理の一例として $3:4:5$ は非常に有名であるが, 2 とは異なる $p \in [1,\infty]$ に対して

$$\|(\|3e_1\|_2, \|4e_2\|_2)\|_p \ne \|(\|3e_1\|_2, \|4e_2\|_2)\|_2 = 5 = \|3e_1 - 4e_2\|_2$$

より $3e_1 \not\perp_{\|\cdot\|_p GP} 4e_2$ である．一般の *absolute normalized* ノルムに関しても $\|(3,4)\| \ne 5$ ならば, 通常の 2 次元空間において $3e_1 \not\perp_{\|\cdot\| GP} 4e_2$ である．

空間および generalized relation of Pythagorean orthogonality で使用するノルムにより, あるベクトルに対してだけは Pythagorean 直交や内積空間における直交と同一の関係となる場合も有る．

Example 14. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\|(a,b)\| = \max\left\{\|(a,b)_\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\|(a,b)\|_1\right\}$$

で定義されるノルム $\|\cdot\|$ について, 空間 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ における *generalized relation of Pythagorean orthogonality by* $\|\cdot\|$ を考える．本稿の内容は一般的に 2 つのノルムを考えるが, ここでは同一のものを使用する．

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ に対して,

$$\|e_1 - e_2\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2} = \|(1,1)\| = \|(\|e_1\|, \|e_2\|)\|$$

なので $e_1 \perp_{GP\|\cdot\|} e_2$ が成立する．*Theorem 8* としては $x = e_1$, $y = e_2$, $\rho = 1$ に対して $a = 0$, $b = 1$ であり, *Theorem 11* としては $x = e_1$, $y = e_2$ に対して $\alpha = 0$ と言える．また,

$$\|(e_1+e_2)-(e_1-e_2)\| = 2\|e_2\| = 2 = \left\|(\sqrt{2},\sqrt{2})\right\| = \|(\|e_1+e_2\|, \|e_1-e_2\|)\|$$

が成り立ち, $e_1 + e_2 \perp_{GP\|\cdot\|} e_1 - e_2$ である．同様に $e_1 - e_2 \perp_{GP\|\cdot\|} e_1 + e_2$ も判明し, *Theorem 9* に関して $r = s = 1$ である．

これらは e_1, e_2 に加えて $e_1 \pm e_2$ に対しても $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$ における値が等しい故であり, 他のベクトルに関しては空間 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ における *generalized relation of Pythagorean orthogonality by* $\|\cdot\|$ を見つけ出すことは, 上記ほど容易ではない．

参考文献

[1] J. Alonso, Any two-dimensional normed space is a generalized Day–James space, J. Inequal. Appl., 2 (2011), 3pp.

[2] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, Aequationes Math., 83 (2012) 153–189.

[3] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, Orthogonality types in normed linear spaces. Chapter 4 of *Surveys in Geometry*, Ed. A. Papadopoulos, 97–170, Springer, Cham, 2022.

[4] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J., 1 (1935) 169–172.

[5] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, Lecture Note Series, 10 (1973), London Mathematical Society, UK.

[6] R. C. James, Orthogonality in normed linear spaces, Duke Math. J., 12 (1945), 291–302.

[7] R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 265–292.

[8] Z. Liu, L_p-orthogonality in Banach spaces., J. Math. Res. Exposition, 4 (1984), 31–35.

[9] K. -I. Mitani, K. -S. Saito, M. Kato and T. Tamura, On sharp triangle inequalities in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 336(2007), 1178–1186.

[10] H. Mizuguchi, On the generalization of Pythagorean orthogonality by two-dimensional norms, submitted.

[11] K. -S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Von Neumann–Jordan constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., 244 (2000), 515–532.

[12] F. E. Sullivan, Structure of real L_p spaces., J. Math. Anal. Appl., 32 (1970), 621–629.