Thin-film limit of the Ginzburg–Landau heat flow in a curved thin domain

弘前大学・大学院理工学研究科　三浦　達彦 *
Tatsu-Hiko Miura
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

1　導入

薄膜領域 (thin domain) とは, 空間内の (ひとつまたは複数の) ある方向への幅が他の方向に比べて非常に小さい領域である. 数学的には, 薄い板や膜のみならず, 細い棒や管も “thin domain” である (から本来は「薄い領域」と訳すべきかもしれない). 自然界には, 薄膜領域上の偏微分方程式で記述される現象が数多く存在する. たとえば, 薄い板や細い棒の変形, 加熱した薄い金属板の温度変化, 細胞膜中の物質輸送, 地球流体の運動, 細い血管内の血流, 薄膜の超伝導, などが挙げられる.

薄膜領域の場合, 通常は膜の厚さ (領域の幅) をゼロにする極限で領域全体が低次元集合 (これを極限集合と呼ぶことにする) に退化すると考える. このとき, 薄膜領域上の偏微分方程式について,

- 薄膜領域が低次元集合に十分近ければ, 適切性の問題は低次元の場合に近いか？
  (例：3 次元薄膜領域のナヴィエ・ストークス方程式の適切性は 2 次元のそれに近いか？)
- 膜の厚さをゼロにする極限 (これを薄膜極限と呼ぶことにする) を取ったとき, 薄膜領域上の方程式 (薄膜問題) から極限集合上の方程式 (極限問題) を導出し, 解を比較できるか？

という問題を考えるのは自然だろう. この内, 本稿では後者の薄膜極限の問題を扱う.

薄膜極限とは「何かの極限を求める」という問題であり, 純粋数学として意味のある問題である. さらに, 応用も視野に入れると, 薄膜極限の問題を研究する目的として次の 2 つが挙げられる:

(a) 領域の次元 (変数の個数) を減らすことによる, 問題の単純化や計算コストの削減
(b) 薄膜領域や極限集合で起きる現象の数理モデル化とその数学的正当化

目的 (a) は特に極限集合が低次元領域である「平らな薄膜領域」の場合に重要であり, かつ目的として納得しやすい. 一方, 極限集合が曲線や曲面などの多様体である「曲がった薄膜領域」の場合は, 目的 (b) も重要である. 古くは弾性体 [8] や地球流体 [38] の分野で, 近年では細胞膜内の流体運動 [5, 45] など生物学等の分野で, 曲がった薄膜領域で起きる現象を曲面上の方程式で近似的に記述する

* e-mail address: thmiura623@hirosaki-u.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:23K12993) の助成を受けたものである。

ことが行われている. 曲がった薄膜領域での薄膜極限の研究は, そのような近似的な数理モデル化に数学的正当性を与えるものである. また, 逆に, 物体表面で起きる現象を記述する方程式を, ユークリッド空間でのよく知られた方程式から薄膜極限によって導出する, という考え方もできる. このように, 薄膜極限の研究は応用の観点からも重要であり, 今後も発展が期待される分野である.

偏微分方程式やエネルギー汎関数の薄膜極限については, Hale–Raugel の研究 [19, 20] を初め, 低次元領域に退化する平らな薄膜領域の場合に盛んに研究が行われてきた. 本稿で扱うギンツブルグ・ランダウ (GL) 方程式についても, [12, 6, 7, 41, 22, 35, 2, 17] などが平らな薄膜領域での薄膜極限の研究を行っている. 一方, 曲線や曲面などの多様体に退化する曲がった薄膜領域を扱った研究としては, 反応拡散方程式の研究 [47, 39, 40], ナヴィエ・ストークス (NS) 方程式の研究 [44, 29, 31], カーン・ヒリアード方程式の研究 [1, 32], ラプラス作用素 [43, 23, 21, 46] や重調和作用素 [15] の固有値問題の研究, GL エネルギー汎関数の研究 [42, 11, 10] などが挙げられる. また, 動く曲面に厚みを付けた, 動く薄膜領域での拡散方程式 [13, 27, 34, 30] や流体方程式 [28] の薄膜極限を扱った研究もある.

本稿では, 曲がった薄膜領域における, 磁場の影響のない GL 方程式 (GL 熱流) の薄膜極限について最近の研究 [33] で得られた結果を紹介する. 超伝導のモデルとしての GL 方程式を考えるのであれば, 磁場の影響も考慮に入れるべきではあるが, 今回の研究の主目的は液晶のモデルの解析である. 液晶の運動を記述する数理モデルとして, Ericksen [14] と Leslie [24] が提唱したエリクセン・レスリー (EL) 方程式がある. EL 方程式の一般形は非常に複雑であるため, Lin [25], Lin–Liu [26] により NS 方程式と GL 熱流を連立した簡易 EL 方程式が導入され, 液晶運動の解析に使われている. 近年, 曲面上の液晶運動をモデル化してシミュレーションするため, Nitschke–Reuther–Voigt [37] が形式的な薄膜極限の計算で曲面上の簡易 EL 方程式を導出したが, その数学的正当化は行われていない (薄膜極限による曲面上の液晶のモデル化は [18, 36] でも行われている). 研究 [33] は, 液晶の薄膜極限を数学的に検証し, 曲面上の液晶運動を解析するための重要な一歩である.

2 例：薄い長方形における熱方程式

研究 [33] の内容に入る前に, 簡単な例を通じて薄膜領域上の偏微分方程式に対する薄膜極限の様子を概観しよう. 以下では厳密な証明を省略し, 形式的な計算のみを行うことにする.

まず, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $R_\varepsilon := (0,1) \times (0,\varepsilon)$ を薄い長方形とする. この薄い長方形において, ノイマン境界条件を課した次の熱方程式 (線形拡散方程式) を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(x,y,t) = \Delta u^\varepsilon(x,y,t), & (x,y) \in R_\varepsilon,\ t > 0, \\ \partial_x u^\varepsilon(0,y,t) = \partial_x u^\varepsilon(1,y,t) = 0, & 0 < y < \varepsilon,\ t > 0, \\ \partial_y u^\varepsilon(x,0,t) = \partial_y u^\varepsilon(x,\varepsilon,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

$\varepsilon \to 0$ のとき, R_ε は 1 次元の区間 $(0,1)$ に退化するが, このとき (2.1) の極限問題は $(0,1)$ 上のどのような方程式になるだろうか. 今の場合, 変数分離法によって解 u^ε が具体的に

$$u^\varepsilon(x,y,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n} e^{-(m^2+n^2/\varepsilon^2)\pi^2 t} \cos(m\pi x) \cos\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right), \quad (x,y) \in R_\varepsilon,\ t > 0$$

と書ける ($c_{m,n}$ は定数). ここで, $t > 0$ のときに $\varepsilon \to 0$ とすると, 上式の右辺で $n \neq 0$ の項は指数関

数の部分が 0 に収束する．したがって, $\varepsilon \to 0$ のときの $u^\varepsilon(x,y,t)$ の極限は

$$u^0(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,0} e^{-m^2\pi^2 t} \cos(m\pi x), \quad x \in (0,1),\ t > 0$$

となる．この関数は極限集合 $(0,1)$ におけるノイマン境界条件下の熱方程式

$$\partial_t u^0 = \partial_x^2 u^0 \quad \text{in} \quad (0,1)\times(0,\infty), \quad \partial_x u^0(0,t) = \partial_x u^0(1,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

の解である．したがって, (2.1) の極限問題は (2.2) である, と言える．

注意 2.1. 同じ方程式でも, 境界条件が違えば薄膜極限の結果も異なる．実際, (2.1) で上下の辺での境界条件をノイマン条件からディリクレ条件に変えた問題

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon(x,y,t) = \Delta v^\varepsilon(x,y,t), \quad (x,y) \in R_\varepsilon,\ t > 0, \\ \partial_x v^\varepsilon(0,y,t) = \partial_x v^\varepsilon(1,y,t) = 0, \quad 0 < y < \varepsilon,\ t > 0, \\ \quad v^\varepsilon(x,0,t) = v^\varepsilon(x,\varepsilon,t) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \end{cases}$$

を考えると, 変数分離法によって解 v^ε は

$$v^\varepsilon(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{m,n} e^{-(m^2+n^2/\varepsilon^2)\pi^2 t} \cos(m\pi x) \sin\left(\frac{n\pi y}{\varepsilon}\right), \quad (x,y) \in R_\varepsilon,\ t > 0$$

と書ける ($d_{m,n}$ は定数)．ここで $\varepsilon \to 0$ とすると, 右辺が $n \geq 1$ での和であるため, v^ε は 0 に収束する．この場合, 薄膜極限について有益な情報を得るためには変数のスケーリングなどを行って議論する必要がある．このように, 境界条件は薄膜極限に影響を与える重要な要素である．

次に, $g(x) > 0$ を $[0,1]$ 上の C^1 級関数として, Ω_ε を上辺の曲がった薄い長方形

$$\Omega_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < \varepsilon g(x)\} \tag{2.3}$$

とする．このとき, ノイマン境界条件を課した次の熱方程式を考える:

$$\partial_t u^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon \quad \text{in} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \quad \partial_{\nu_\varepsilon} u^\varepsilon = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_\varepsilon \times (0,\infty). \tag{2.4}$$

ただし, $\partial_{\nu_\varepsilon}$ は境界 $\partial\Omega_\varepsilon$ での法線微分である．再び, Ω_ε は $\varepsilon \to 0$ で区間 $(0,1)$ に退化するが, (2.4) の極限問題はどのような方程式になるだろうか．先ほどとは異なり, 変数分離法で (2.4) の解を具体的に表示することはできそうにない．そこで, 方程式そのものを変形して極限問題を発見する方針を取ることにする．以下では, そのような極限問題の導出方法を 2 つ紹介しよう．

2.1 スケーリングと漸近展開の方法

まず紹介するのは, 領域の幅を固定する変数変換を行い, 固定領域上の方程式を漸近展開することで極限問題を見つける方法である．この方法は物理や工学など他分野でも広く使われている．

まず, Ω_ε を固定領域 $\Omega_1 = \{(x,z) \mid 0 < x < 1,\ 0 < z < g(x)\}$ に変形する変数変換

$$U^\varepsilon(x,z,t) = u^\varepsilon(x,\varepsilon z,t), \quad (x,z) \in \Omega_1,\ t > 0$$

を行う．このとき, 薄い長方形 Ω_ε の上辺 $\{(x,\varepsilon g(x)) \mid 0<x<1\}$ での外向き単位法線ベクトルが

$$\nu_\varepsilon(x,\varepsilon g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2|g'(x)|^2}}\begin{pmatrix} -\varepsilon g'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (g' \text{ は } g \text{ の導関数})$$

であることに注意して, (2.4) に $u^\varepsilon(x,y,t) = U^\varepsilon(x,y/\varepsilon,t)$ を代入して計算し, $z = y/\varepsilon$ とすると

$$\begin{cases} \partial_t U^\varepsilon(x,z) = \partial_x^2 U^\varepsilon(x,z) + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\partial_z^2 U^\varepsilon(x,z), \quad (x,z)\in\Omega_1, \\ -\varepsilon g'(x)\partial_x U^\varepsilon(x,g(x)) + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_z U^\varepsilon(x,g(x)) = 0, \quad 0<x<1, \\ \partial_z U^\varepsilon(x,0) = 0, \quad 0<x<1, \\ \partial_x U^\varepsilon(x,z) = 0, \quad x=0,1, \quad 0<z<g(x). \end{cases} \tag{2.5}$$

という U^ε の方程式を得る (ただし, 変数 t は省略した)．次に, ε に関する U^ε の漸近展開

$$U^\varepsilon = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \cdots, \quad (U_0, U_1, U_2, \ldots \text{ は } \varepsilon \text{ に依存しない}) \tag{2.6}$$

を (2.5) に代入し, ε の各べき乗について整理する．これにより, 各 U_k の満たすべき方程式を逐次的に得ることができる．なお, 変数変換する前の方程式 (2.4) に u^ε の漸近展開

$$u^\varepsilon(x,y,t) = U_0\left(x,\frac{y}{\varepsilon},t\right) + \varepsilon U_1\left(x,\frac{y}{\varepsilon},t\right) + \varepsilon^2 U_2\left(x,\frac{y}{\varepsilon},t\right) + \cdots$$

を代入してもよい．さて, (2.6) を (2.5) に代入して整理すると次の式を得る (変数は省略する):

- $(x,z)\in\Omega_1$ のとき

$$-\varepsilon^{-2}\partial_z^2 U_0 - \varepsilon^{-1}\partial_z^2 U_1 + \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k(\partial_t U_k - \partial_x^2 U_k - \partial_z^2 U_{k+2}) = 0.$$

  したがって, $\ell = k+2$ として

$$\partial_z^2 U_0 = 0, \quad \partial_z^2 U_1 = 0, \quad \partial_t U_{\ell-2} - \partial_x^2 U_{\ell-2} - \partial_z^2 U_\ell = 0, \quad \ell \geq 2. \tag{2.7}$$

- $0<x<1$ かつ $z=g(x)$ のとき

$$\varepsilon^{-1}\partial_z U_0 + \partial_z U_1 + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k(-g'\partial_x U_{k-1} + \partial_z U_{k+1}) = 0.$$

  したがって, $\ell = k+1$ として

$$\partial_z U_0 = 0, \quad \partial_z U_1 = 0, \quad -g'\partial_x U_{\ell-2} + \partial_z U_\ell = 0, \quad \ell \geq 2. \tag{2.8}$$

- $0<x<1$ かつ $z=0$ のとき $\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \partial_z U_k = 0$. したがって, $\ell = k$ として

$$\partial_z U_\ell = 0, \quad \ell \geq 0. \tag{2.9}$$

- $x=0,1$ かつ $0<z<g(x)$ のとき $\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \partial_x U_k = 0$. したがって, $\ell = k$ として

$$\partial_x U_\ell = 0, \quad \ell \geq 0. \tag{2.10}$$

条件 (2.7)–(2.9) を U_0, U_1, U_2 について考える．すると，

- U_0 について，$0 < x < 1$ に対して

$$\partial_z^2 U_0(x,z) = 0, \quad 0 < z < g(x), \quad \partial_z U_0(x, g(x)) = 0, \quad \partial_z U_0(x,0) = 0.$$

  よって，$0 \le z \le g(x)$ に対して $\partial_z U_0(x,z) = 0$ が成り立ち，$U_0(x,z) = U_0(x)$ は z に依存しないことが分かる．ただし，この時点では $U_0(x)$ が満たすべき方程式は分からない．

- U_1 について，$0 < x < 1$ に対して

$$\partial_z^2 U_1(x,z) = 0, \quad 0 < z < g(x), \quad \partial_z U_1(x, g(x)) = 0, \quad \partial_z U_1(x,0) = 0.$$

  よって，$U_1(x,z) = U_1(x)$ も z に依存しない．

- U_2 について，$0 < x < 1$ に対して

$$\begin{cases} \partial_z^2 U_2(x,z) = \partial_t U_0(x) - \partial_x^2 U_0(x), \quad 0 < z < g(x), \\ \partial_z U_2(x, g(x)) = g'(x)\partial_x U_0(x), \\ \partial_z U_2(x,0) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

  この方程式を満たす U_2 が存在するためには，$0 < x < 1$ に対して

$$\int_0^{g(x)} \partial_z^2 U_2(x,z)\,dz = \partial_z U_2(x, g(x)) - \partial_z U_2(x,0) \tag{2.12}$$

  が成り立つことが必要である．この等式に (2.11) の右辺を代入すると

$$g(x)\{\partial_t U_0(x) - \partial_x^2 U_0(x)\} = g'(x)\partial_x U_0(x), \quad 0 < x < 1 \tag{2.13}$$

  となる．これが U_0 の満たすべき方程式である．そして，(2.13) が成り立つとき，U_2 は

$$U_2(x,z) = U_2(x,0) + \frac{z^2}{2}\{\partial_t U_0(x) - \partial_x^2 U_0(x)\}, \quad 0 < z < g(x)$$

  と書ける．ただし，$U_2(x,0)$ はさらに高次の項が存在するための必要条件から定まる．

漸近展開 (2.6) より，$\varepsilon \to 0$ での (2.4) の極限問題は U_0 の満たす方程式である，と考えるのが自然だろう．したがって，(2.10) と (2.13) より，(2.4) の極限問題は

$$\partial_t U_0 = \frac{1}{g}\partial_x(g\partial_x U_0) \quad \text{in} \quad (0,1)\times(0,\infty), \quad \partial_x U_0(0,t) = \partial_x U_0(1,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.14}$$

である．ただし，第 1 式は (2.13) の両辺を $g(x) > 0$ で割って変形したものである．

注意 2.2. 上の議論で注目すべきは，U_0 の満たすべき方程式 (2.13) は高次の項 U_2 が存在するための必要条件として導かれる，ということである．U_2 の条件を考えず，U_0 は z に依存しないから，または膜が薄ければ解は厚さ方向に一定になるはずだから，という理由で，(2.5) で $\partial_z U^\varepsilon = \partial_z^2 U^\varepsilon = 0$ としたものを極限問題だと思う人もいるかもしれない．しかし，その場合の極限問題は (2.2) となり，薄膜領域の境界を記述する関数 g が全く現れないという点で正しくない．これは薄膜問題 (2.4) やスケーリング後の問題 (2.5) の境界条件を考慮に入れていないために起きる間違いである．注意 2.1 で述べ

た通り, 薄膜問題の境界条件は薄膜極限の結果を左右する重要な要素である. 実際, 上の議論では, 高次の項 U_2 が存在するための必要条件 (2.12) に境界条件の情報が含まれているから, U_0 の満たすべき方程式 (2.13) にも薄膜領域の境界を記述する関数 g が現れたのである.

スケーリングと漸近展開の手法の利点は, 手順が単純で数学的な専門知識をそれほど必要としないこと, 機械的に高次の展開まで計算できることだろう. しかし, 極限問題の導出は形式的なものにすぎず, 薄膜問題の解から極限問題の解への収束や誤差の評価といった数学的正当化は別に行わなければならない, ということに注意が必要である. また, 薄膜領域や極限集合の形状が複雑な場合, 方程式のスケーリングや漸近展開の計算は困難になる (たとえば, 動く曲面に退化する薄膜領域の場合 [30] を参照). それでも, 汎用性が高く, 誰にでも使いやすい方法であることは確かだろう.

2.2 弱形式と積分平均の方法

次に紹介するのは, 薄膜問題に対応する弱形式に対して薄い方向への積分平均を行い, 薄膜極限を取って極限問題に対応する弱形式を導出する方法である.

再び, (2.3) の形の薄い長方形 Ω_ε において, ノイマン境界条件を課した熱方程式 (2.4) を考える. 各時刻 $t>0$ において, 熱方程式の両辺に試験関数 $\varphi(x,y)\in H^1(\Omega_\varepsilon)$ を掛けて Ω_ε 上で積分し, ノイマン境界条件を用いて部分積分を行うと次の積分等式を得る (変数 t は省略):

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon(x,y)\varphi(x,y)\,dxdy = -\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(x,y)\cdot\nabla\varphi(x,y)\,dxdy. \tag{2.15}$$

これが薄膜問題 (2.4) に対応する弱形式である. さて, ここで u^ε に対して薄い方向への積分平均を

$$M_\varepsilon u^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon g(x)}\int_0^{\varepsilon g(x)} u^\varepsilon(x,y)\,dy, \quad x\in(0,1)$$

で定義しよう. そして, (2.15) で試験関数 $\varphi(x,y)=\varphi(x)$ は薄い方向の変数 y に依存しないと仮定しよう. すると, フビニの定理と M_ε の定義が t に依存しないことから,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u^\varepsilon(x,y)\varphi(x)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\varepsilon g(x)} \partial_t u^\varepsilon(x,y)\,dy\right)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \varepsilon g(x)[M_\varepsilon(\partial_t u^\varepsilon)](x)\varphi(x)\,dx \\ &= \varepsilon\int_0^1 g(x)\partial_t M_\varepsilon u^\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx\end{aligned} \tag{2.16}$$

と変形できる. 一方, $M_\varepsilon u^\varepsilon(x)$ の定義式を x で微分すると

$$\begin{aligned}\partial_x M_\varepsilon u^\varepsilon(x) = &-\frac{g'(x)}{\varepsilon\{g(x)\}^2}\int_0^{\varepsilon g(x)} u^\varepsilon(x,y)\,dy \\ &+ \frac{1}{\varepsilon g(x)}\left(\varepsilon g'(x)u^\varepsilon(x,\varepsilon g(x)) + \int_0^{\varepsilon g(x)} \partial_x u^\varepsilon(x,y)\,dy\right)\end{aligned}$$

であり, $\int_0^{\varepsilon g(x)} \partial_x u^\varepsilon(x,y)\,dy = \varepsilon g(x)[M_\varepsilon(\partial_x u^\varepsilon)](x)$ と

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x,\varepsilon g(x)) &= \left[\frac{y}{\varepsilon g(x)} u^\varepsilon(x,y)\right]_{y=0}^{\varepsilon g(x)} = \int_0^{\varepsilon g(x)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\varepsilon g(x)} u^\varepsilon(x,y)\right) dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon g(x)} \int_0^{\varepsilon g(x)} u^\varepsilon(x,y)\,dy + \frac{1}{\varepsilon g(x)} \int_0^{\varepsilon g(x)} y\partial_y u^\varepsilon(x,y)\,dy,
\end{aligned}$$

および $\int_0^{\varepsilon g(x)} y\partial_y u^\varepsilon(x,y)\,dy = \varepsilon g(x)[M_\varepsilon(y\partial_y u^\varepsilon)](x)$ であることを用いると

$$\partial_x M_\varepsilon u^\varepsilon(x) = [M_\varepsilon(\partial_x u^\varepsilon)](x) + \frac{g'(x)}{g(x)}[M_\varepsilon(y\partial_y u^\varepsilon)](x), \quad x \in (0,1) \tag{2.17}$$

となる．したがって, $\varphi(x,y) = \varphi(x)$ が y に依存しないとき, フビニの定理より

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y)\,dxdy &= \int_{\Omega_\varepsilon} \partial_x u^\varepsilon(x,y)\partial_x\varphi(x)\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\varepsilon g(x)} \partial_x u^\varepsilon(x,y)\,dy\right) \partial_x\varphi(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \varepsilon g(x)[M_\varepsilon(\partial_x u^\varepsilon)](x)\partial_x\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

であり, 最後の行に (2.17) を適用すれば

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y)\,dxdy = \varepsilon &\int_0^1 g(x)\partial_x M_\varepsilon u^\varepsilon(x)\partial_x\varphi(x)\,dx \\
&- \varepsilon \int_0^1 g'(x)[M_\varepsilon(y\partial_y u^\varepsilon)](x)\partial_x\varphi(x)\,dx
\end{aligned} \tag{2.18}$$

が従う．さて, (2.16) と (2.18) を (2.15) に適用し, 両辺を ε で割ると次の等式を得る:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\partial_t M_\varepsilon u^\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = &-\int_0^1 g(x)\partial_x M_\varepsilon u^\varepsilon(x)\partial_x\varphi(x)\,dx \\
&+ \int_0^1 g'(x)[M_\varepsilon(y\partial_y u^\varepsilon)](x)\partial_x\varphi(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで, $M_\varepsilon(y\partial_y u^\varepsilon)$ の項は, $0 < y < \varepsilon g(x)$ とヘルダーの不等式を用いれば

$$|[M_\varepsilon(y\partial_y u^\varepsilon)](x)| \le \int_0^{\varepsilon g(x)} |\partial_y u^\varepsilon(x,y)|\,dy \le \sqrt{\varepsilon g(x)} \left(\int_0^{\varepsilon g(x)} |\partial_y u^\varepsilon(x,y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

と評価できる．したがって, $c > 0$ を ε に依存しないある定数として,

$$\|M_\varepsilon(y\partial_y u^\varepsilon)\|_{L^2(0,1)} \le c\varepsilon^{1/2}\|\partial_y u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

が成り立つ．さらに, 薄膜問題 (2.4) の解のエネルギー評価を用いれば, $\|\partial_y u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ (の 2 乗の時間積分) は初期値に関する適当な仮定の下で ε について有界であることが示せる．よって, (2.19) の最後の項は $\varepsilon \to 0$ のときに 0 に収束することが分かる．また, (2.19) で $\varphi = M_\varepsilon u^\varepsilon$ とすれば $M_\varepsilon u^\varepsilon$ のエ

ネルギー評価を導出でき, $M_\varepsilon u^\varepsilon$, $\partial_t M_\varepsilon u^\varepsilon$, $\partial_x M_\varepsilon u^\varepsilon$ が適当なノルムで ε について有界であることも分かる. したがって, 適当な関数空間での (汎) 弱点列コンパクト性により, $\varepsilon \to 0$ のときに

$$\text{部分列の (汎) 弱収束の意味で} \quad M_\varepsilon u^\varepsilon \to v, \quad \partial_t M_\varepsilon u^\varepsilon \to \partial_t v, \quad \partial_x M_\varepsilon u^\varepsilon \to \partial_x v$$

が成り立つような関数 $v(x,t)$ が存在する. このとき, (2.19) で $\varepsilon \to 0$ とする (正確には部分列の極限を取る) と, 上の (汎) 弱収束と, (2.19) の最後の項が 0 に収束することから,

$$\int_0^1 g(x)\partial_t v(x)\varphi(x)\,dx = -\int_0^1 g(x)\partial_x v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx \tag{2.20}$$

が任意の試験関数 $\varphi(x) \in H^1(0,1)$ に対して成り立つ. さらに, 部分積分と変分法の基本補題により, 積分等式 (2.20) は次の方程式に対応する弱形式であることが分かる:

$$g\partial_t v = \partial_x(g\partial_x v) \quad \text{in} \quad (0,1)\times(0,\infty), \quad \partial_x v(0,t) = \partial_x v(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.21}$$

よって, $\varepsilon \to 0$ での $M_\varepsilon u^\varepsilon$ の (弱) 極限 v は (2.21) の (弱) 解である. このことから, 薄膜問題 (2.4) の極限問題は (2.21) である, と言ってよいだろう. 特に, 第 1 式の両辺を $g > 0$ で割れば

$$\partial_t v = \frac{1}{g}\partial_x(g\partial_x v) \quad \text{in} \quad (0,1)\times(0,\infty), \quad \partial_x v(0,t) = \partial_x v(1,t) = 0, \quad t > 0$$

となり, これはスケーリングと漸近展開の手法で得られた極限問題 (2.14) と同じである.

注意 2.3. 上の議論では薄膜問題 (2.4) の境界条件が使われていないように見えるが, 実は元の問題を弱形式 (2.15) に変形するときに境界条件を用いている. したがって, 弱形式自体が境界条件の情報を含んでいると言える. また, 弱形式 (2.15) で変数 y に依存しない試験関数を取れるのは, 境界条件がノイマン条件だからである. 薄い長方形の上下の辺での境界条件をディリクレ条件に変えた場合, 弱形式 (2.15) の試験関数は上下の辺での値が 0 になるものに限られる. この場合, 変数 y に依存せず, 境界条件を満たす試験関数は恒等的に 0 となる関数しかないので, 上の議論は適用できない.

弱形式と積分平均の方法の最大の利点は, 実際に計算する微分の階数が少なくて済むことである. これは, 薄膜領域や極限集合の形状が複雑であるときに特に重要である. また, 多くの場合, 少なくとも解の弱収束のレベルでは, 極限問題の導出と数学的正当化をほぼ同時に行えることも利点と言える. 一方, 弱形式の変形, 極限操作, 積分等式から微分方程式への復元など, 実際の議論には専門知識と経験を必要とし, 万人向けの手法ではない. また, 積分平均により情報量が落ちるため, 漸近展開のように機械的に高次の項まで計算することはできない, ということにも注意が必要である.

3 曲がった薄膜領域上のギンツブルグ・ランダウ熱流の薄膜極限

それでは, 本稿の主題に移り, 研究 [33] の結果と証明の概略について説明しよう. 簡単のため, 与えられた関数等は全て十分滑らかであると仮定する. 実際に必要な関数等の正則性は [33] を参照.

3.1 問題設定と主結果

$n \geq 2$ として, Γ を与えられた $\mathbb{R}^n$ 内の向き付けられた $n-1$ 次元の閉超曲面 (コンパクトで境界のない超曲面) とする. また, Γ の外向き単位法線ベクトルを ν と書く. g_0 と g_1 を与えられた Γ 上の関

数として, $g = g_1 - g_0$ と定める．さらに, ある定数 $c > 0$ が存在して, Γ 上で $g \geq c$ が成り立つと仮定する．このとき, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 内の曲がった薄膜領域を

$$\Omega_\varepsilon := \{y + r\nu(y) \mid y \in \Gamma,\ \varepsilon g_0(y) < r < \varepsilon g_1(y)\}$$

で定め, ノイマン境界条件を課した次のギンツブルグ・ランダウ (GL) 熱流を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \lambda(|u^\varepsilon|^2 - 1)u^\varepsilon = 0 & \text{in} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \\ \partial_{\nu_\varepsilon} u^\varepsilon = 0 & \text{in} \quad \partial\Omega_\varepsilon \times (0,\infty), \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon & \text{in} \quad \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで, $N \geq 1$ として, 与えられた初期値 u_0^ε と未知関数 u^ε は共に $\mathbb{R}^N$ 値関数である (ただし, N の値による結果や証明への影響はない)．特に, $N = 1$ のときの (3.1) はアレン・カーン方程式である．また, $\lambda > 0$ は ε に依存しない定数であり, $\partial_{\nu_\varepsilon}$ は境界 $\partial\Omega_\varepsilon$ での法線微分である．なお, GL 熱流は次の GL 自由エネルギーの $L^2(\Omega_\varepsilon)$ 勾配流であることが知られている:

$$E_\varepsilon(u^\varepsilon) := \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{|\nabla u^\varepsilon|^2}{2} + \frac{\lambda}{4}(|u^\varepsilon|^2 - 1)^2 \right) dx.$$

初期値が $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)^N$ であるとき, ガレルキン法とエネルギー法により,

$$u^\varepsilon \in C([0,\infty); L^2(\Omega_\varepsilon)^N) \cap L^2_{loc}([0,\infty); H^1(\Omega_\varepsilon)^N) \cap L^4_{loc}([0,\infty); L^4(\Omega_\varepsilon)^N) \tag{3.2}$$

のクラスに属する (3.1) の時間大域的な弱解が一意的に存在することが示せる．そこで, この弱解の $\varepsilon \to 0$ での収束を示し, 極限関数が満たす方程式として (3.1) の極限問題を導出したい．

主結果を述べるため, いくつかの記号を導入する (詳細は [33] を参照)．関数 $\eta\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ に対して

$$\nabla_\Gamma \eta = (\underline{D}_1\eta, \dots, \underline{D}_n\eta)^{\mathrm{T}} := \nabla\tilde{\eta} - (\nabla\tilde{\eta}\cdot\nu)\nu \quad \text{on} \quad \Gamma$$

と定め, η の接勾配と呼ぶ．ただし, $\tilde{\eta}$ は Γ の近傍への η の拡張である．$v\colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$ に対しては

$$\nabla_\Gamma v := \begin{pmatrix} \nabla_\Gamma v_1 & \cdots & \nabla_\Gamma v_N \end{pmatrix} : \Gamma \to \mathbb{R}^{n\times N}, \quad v = (v_1, \dots, v_N)^{\mathrm{T}}$$

と書く．$N = n$ のとき, Γ 上のベクトル場 $v = (v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}$ の表面発散を

$$\mathrm{div}_\Gamma v := \mathrm{tr}[\nabla_\Gamma v] = \underline{D}_1 v_1 + \cdots + \underline{D}_n v_n \quad \text{on} \quad \Gamma$$

で定める．関数 $A\colon \Gamma \to \mathbb{R}^{n\times N}$ に対して, $\mathrm{div}_\Gamma A\colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$ を

$$\mathrm{div}_\Gamma A := (\mathrm{div}_\Gamma A_1, \dots, \mathrm{div}_\Gamma A_N)^{\mathrm{T}}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_N \end{pmatrix}$$

で定める．ただし, $A_1, \dots, A_N : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ である．

次に, Ω_ε 上の関数 φ に対して, 薄い方向への重み付き積分平均を

$$\mathcal{M}_\varepsilon\varphi(y) := \frac{1}{\varepsilon g(y)} \int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} \varphi(y + r\nu(y))J(y,r)\,dr, \quad y \in \Gamma \tag{3.3}$$

で定める．ここで, 重み関数 J は, Γ の主曲率 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ を用いて

$$J(y,r) := \prod_{j=1}^{n-1}\{1 - r\kappa_j(y)\}, \quad y \in \Gamma,\ \varepsilon g_0(y) \leq r \leq \varepsilon g_1(y)$$

で定義される．この関数は積分の変数変換

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int_\Gamma \int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} \varphi(y + r\nu(y)) J(y,r)\,dr\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{3.4}$$

に現れるヤコビアンである．ただし, $\mathcal{H}^{n-1}$ は $n-1$ 次元ハウスドルフ測度である．

以上の準備の下で, [33] の主結果を述べる．最初の結果は, 薄膜極限での (3.1) の解の収束と極限関数の特徴付けによる, 数学的に厳密な極限問題の導出である．

定理 3.1 ([33, Theorem 1.1])**.** 初期値 $u_0^\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)^N$ が次の条件を満たすと仮定する:

(a) ある定数 $c_1 \geq 1$ と $\alpha \in (0, 1/3]$ が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq c_1 \varepsilon^{-1/3+\alpha},$$

(b) ある関数 $v_0 \in L^2(\Gamma)^N$ が存在して, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{M}_\varepsilon u_0^\varepsilon = v$ weakly in $L^2(\Gamma)^N$.

各 $\varepsilon > 0$ に対して, u^ε を (3.2) のクラスに属する (3.1) の一意的な弱解とする．このとき, 関数

$$v \in C([0,\infty); L^2(\Gamma)^N) \cap L^2_{loc}([0,\infty); H^1(\Gamma)^N) \cap L^4_{loc}([0,\infty); L^4(\Gamma)^N) \tag{3.5}$$

が存在して, 各 $T > 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon = v \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T; H^1(\Gamma)^N) \cap L^4(0,T; L^4(\Gamma)^N)$$

が成り立ち, さらに v は次の極限問題の唯一の時間大域的な弱解である:

$$\begin{cases} \partial_t v - \dfrac{1}{g}\mathrm{div}_\Gamma(g\nabla_\Gamma v) + \lambda(|v|^2 - 1)v = 0 & \text{on} \quad \Gamma \times (0,\infty), \\ v|_{t=0} = 0 & \text{on} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3.6}$$

薄膜問題 (3.1) と同様に, 極限問題 (3.6) は重み付き GL 自由エネルギー

$$E_g(v) := \int_\Gamma g \left(\frac{|\nabla_\Gamma v|^2}{2} + \frac{\lambda}{4}(|v|^2 - 1)^2 \right) d\mathcal{H}^{n-1}$$

の重み付き内積 $(g\cdot,\cdot)_{L^2(\Gamma)}$ に関する勾配流である．定理 3.1 はある種の初期値 v_0 に対する (3.6) の時間大域的な弱解の存在も示している．一般の初期値 $v_0 \in L^2(\Gamma)^N$ に対しては, ガレルキン法とエネルギー法で (3.5) のクラスに属する (3.6) の時間大域的な弱解が一意的に存在することを示せる．

次に, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ と v の差分評価についての結果を述べる．

定理 3.2 ([33, Theorem 1.2])**.** $u_0^\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)^N$, $v_0 \in L^2(\Gamma)^N$ として, u^ε と v をそれぞれ (3.1) と (3.6) の唯一の時間大域的な弱解とする．さらに, 定理 3.1 の条件 (a) が成り立つと仮定する．このとき, ある定数 $c > 0$ が存在して, 任意の $T > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon - v\|_{C([0,T];L^2(\Gamma))} + \|\nabla_\Gamma \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon - \nabla_\Gamma v\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \\ &\qquad \leq c e^{c(1+\lambda)T} \Big\{ \|\mathcal{M}_\varepsilon u_0^\varepsilon - v_0\|_{L^2(\Gamma)} + \varepsilon^{3\alpha}(1+\lambda) \Big\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

が成り立つ．特に, $\varepsilon \to 0$ のとき $\mathcal{M}_\varepsilon u_0^\varepsilon$ が v_0 に $L^2(\Gamma)^N$ 内で強収束するならば,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon = v \quad \text{strongly in} \quad L^2(0,T; H^1(\Gamma)^N) \cap L^4(0,T; L^4(\Gamma)^N).$$

Γ 上の関数 η に対して, Γ の法線方向に η を定数拡張して得られる関数を $\bar{\eta}$ と書くことにする. このとき, u^ε と $\bar{v}$ を Ω_ε 内で比較することができる. しかも, 驚くべきことに, Ω_ε での差分評価の場合には初期値 u_0^ε は L^2 クラスでよく, 定理 3.1 の条件 (a) も不要である.

定理 3.3 ([33, Theorem 1.3]). $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)^N$, $v \in L^2(\Gamma)^N$ として, u^ε と v をそれぞれ (3.1) と (3.6) の唯一の時間大域的な弱解とする. このとき, ある定数 $c > 0$ が存在して, 不等式

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-1/2}\Big(\|u^\varepsilon - \bar{v}\|_{C([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|\nabla u^\varepsilon - \nabla\bar{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}\Big) \\ &\qquad\qquad \leq ce^{c(1+\lambda)T}\Big(\varepsilon^{-1/2}\|u_0^\varepsilon - \bar{v}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon\|v_0\|_{L^2(\Gamma)}\Big) \end{aligned} \tag{3.8}$$

が各 $T > 0$ に対して成り立つ.

上の不等式では, Ω_ε の膜の厚さのオーダーに合わせて $L^2(\Omega_\varepsilon)$ ノルムを $\varepsilon^{1/2}$ で割っている. また, $\|v_0\|_{L^2(\Gamma)}$ は ε に関係ない. よって, v は u^ε を ε のオーダーで近似していると言える.

3.2 定理 3.1 と 3.2 の証明の概略

定理の主張から分かる通り, 今回の極限問題の導出は 2.2 節で紹介した弱形式と積分平均の方法によるものである. 実際, 定理 3.1 と 3.2 は次の手順で示される:

(i) 薄膜問題 (3.1) の弱形式において, Γ 上の関数を法線方向に定数拡張したものを試験関数に取る. そして, 積分の変数変換公式 (3.4) と積分平均の定義式 (3.3) を用いて (3.1) の弱形式を変形し, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の満たす Γ 上の積分等式 ($\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の弱形式) を導出する.

(ii) $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の弱形式において $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ 自身を試験関数として取り, エネルギー評価を導出する. これにより, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ とその微分が適切な関数空間で ε について有界であることが分かる.

(iii) 適切な関数空間での有界性と (汎) 弱点列コンパクト性より, $\varepsilon \to 0$ のとき $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ (の部分列) とその微分が (汎) 弱収束することが分かる. (後に全列の収束も分かるが, ここでは省略する.) そして, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の弱形式で $\varepsilon \to 0$ とすることで, 極限関数 v が (3.6) の弱解であることが分かり, エネルギー法により弱解の一意性も示される. 以上より, 定理 3.1 の証明が終わる.

(iv) また, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の弱形式と, v が満たす (3.6) の弱形式の差分を取り, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon - v$ を試験関数として取ってエネルギー評価の計算を行うことで, 定理 3.2 の差分評価 (3.7) を得る. ただし, エネルギー評価において, 方程式の非線形項は一般的な不等式

$$(|a|^2a - |b|^2b) \cdot (a-b) \geq (|a|^3 - |b|^3)(|a| - |b|) \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}^N \tag{3.9}$$

によって無視できることに注意する.

上の手順で最も議論を要するのは (i) である. $\eta\colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$ を極限問題 (3.6) の試験関数として, Γ の法線方向に η を定数拡張したものを $\bar{\eta}$ とする. このとき, (3.3) と (3.4) より,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \cdot \bar{\eta}(x)\,dx &= \int_\Gamma \left(\int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} u^\varepsilon(y + r\nu(y))J(y,r)\,dr\right) \cdot \eta(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \varepsilon\int_\Gamma g(y)\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon(y) \cdot \eta(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) \end{aligned}$$

と変形できる．これが, 重み付き積分平均を用いる主な利点である．しかし, 薄膜問題 (3.1) の弱形式は ∇ と非線形項を含み, これらは $\mathcal{M}_\varepsilon$ と非可換である．ゆえに, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の弱形式は極限問題 (3.6) の弱形式に近いが, $\mathcal{M}_\varepsilon$ と ∇ および非線形項との交換に由来する誤差項を含む．この誤差項を ε によって具体的に評価し, $\varepsilon \to 0$ のときに 0 に収束することを示すことが, 最も努力を要する点である．

$\eta\colon \Gamma \to \mathbb{R}^N$ を試験関数とするとき, $\mathcal{M}_\varepsilon$ と ∇ の交換に由来する誤差項は

$$R_\varepsilon^1 := \varepsilon^{-1}(\nabla u^\varepsilon, \nabla\bar{\eta})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - (g\nabla_\Gamma \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon, \nabla_\Gamma \eta)_{L^2(\Gamma)}$$

である．ここで, 右辺第 1 項を ε で割っているのは, Ω_ε 上での積分と Γ 上での積分のスケールを合わせるためである．この誤差項は, $\nabla_\Gamma \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ を具体的に計算し ([33, Lemma 5.6] を参照), $\nabla\bar{\eta}$ が $\nabla_\Gamma\eta$ に近いこと ([33, Lemma 2.1] を参照) を用いて変数変換公式 (3.4) と合わせて計算することで

$$|R_\varepsilon^1| \le c\varepsilon^{3/2}\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla_\Gamma \eta\|_{L^2(\Gamma)}$$

と評価できる．したがって, 上式の右辺に u^ε のエネルギー評価と定理 3.1 の条件 (a) を用いることで, $\varepsilon \to 0$ のときに R_ε^1 が十分小さくなることが確認できる．

次に, $\mathcal{M}_\varepsilon$ と非線形項の交換に由来する誤差項は

$$R_\varepsilon^2 := \varepsilon^{-1}(|u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon, \bar{\eta})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - (g|\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon|^2 \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon, \eta)_{L^2(\Gamma)}$$

である．ここで, $v^\varepsilon = \mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ と書き, Γ 上の関数 v^ε を Γ の法線方向に定数拡張した関数を $\bar{v}^\varepsilon$ と書くことにする．このとき, 因数分解により, 非線形項自体の差分は Ω_ε 上で

$$\big|\,|u^\varepsilon|^2 u^\varepsilon - |\bar{v}^\varepsilon|^2 \bar{v}^\varepsilon\,\big| \le c(|u^\varepsilon|^2 + |\bar{v}^\varepsilon|^2)|u^\varepsilon - \bar{v}^\varepsilon|$$

と評価できる ($c > 0$ は ε に依存しない定数)．このうち, $u^\varepsilon - \bar{v}^\varepsilon$ は u^ε からその積分平均を引いたものであるから, ポアンカレの不等式に類似の評価 ([33, Lemma 5.2] を参照)

$$\|u^\varepsilon - \bar{v}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \left\|u^\varepsilon - \overline{\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon}\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le c\varepsilon\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.10}$$

が成り立ち, $\varepsilon \to 0$ のとき十分小さくなることが分かる．一方, $|u^\varepsilon|^2$ と $|\bar{v}^\varepsilon|^2$ については「なるべく大きくならない」ことを示すしかない．一般に, 非線形項を評価する方法として考えられるのは, ソボレフの不等式や補間不等式を用いることである．しかし, そのためには u^ε に対する高い正則性が必要であり, 弱解の枠組みでは相性が悪い．また, ソボレフの不等式や補間不等式を用いる場合は領域の次元を制限する必要が生じてしまう．そこで, 今回は (3.1) の弱解 u^ε に対して (弱) 最大値原理

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon\times(0,\infty))} \le \max\{1, \|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}\}$$

が成り立つ ([33, Lemma 4.6] を参照) ことを念頭に置き, $|u^\varepsilon|^2$ と $|\bar{v}^\varepsilon|^2$ は L^∞ ノルムで評価する方針を取る．以上のアイデアと変数変換公式 (3.4) を基に計算することで, R_ε^2 は

$$|R_2^\varepsilon| \le c\varepsilon^{3/2}\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}^2\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\|\eta\|_{L^2(\Gamma)}$$

と評価できる ([33, Lemma 5.5] を参照, ただし実際の証明では計算過程が若干異なる)．したがって, 上式の右辺に u^ε に対する最大値原理とエネルギー評価を適用し, さらに定理 3.1 の条件 (a) を用いることで, やはり $\varepsilon \to 0$ のときに R_ε^2 が十分小さくなることが確認できる．

3.3 定理 3.3 の証明の概略

次に, Ω_ε における解の差分評価 (3.8) の証明の概略を述べる．すでに Γ における差分評価 (3.7) が得られているため, これに u^ε と $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の差分評価を組み合わせればすぐに (3.8) が得られるように見えるかもしれない．しかし, (3.10) のように, u^ε と $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ の差分を評価するためには u^ε の正則性を消費する必要があるため, (3.7) から (3.8) を導出することはできない．

Γ での差分評価では, $\mathcal{M}_\varepsilon u^\varepsilon$ を極限問題 (3.6) の近似解, v を (3.6) の真の解として, (3.6) の弱形式を用いてエネルギー評価を行った．そこで, 今度は u^ε を薄膜問題 (3.1) の真の解, v を (3.1) の近似解として, (3.1) の弱形式を基にエネルギー評価を行うことで Ω_ε での差分評価を示す．

Γ 上の関数 v を薄膜問題 (3.1) の近似解とみなすためには, v が満たす (3.6) の弱形式を Ω_ε 上の積分等式に変換する必要がある．そこで, 今度は (3.1) の試験関数 $\varphi\colon \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^N$ の積分平均 $\mathcal{M}_\varepsilon\varphi$ を (3.6) の弱形式に代入し, 積分平均を展開する．つまり, 定理 3.1 および 3.2 の証明とは逆に,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \int_\Gamma g(y)v(y)\cdot \mathcal{M}_\varepsilon\varphi(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) &= \int_\Gamma v(y)\cdot\left(\int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} \varphi(y+r\nu(y))J(y,r)\,dr\right)d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \bar{v}(x)\cdot\varphi(x)\,dx
\end{aligned}
$$

と変形するのである．ただし, $\bar{v}$ は Γ の法線方向への v の定数拡張である．これにより, $\bar{v}$ は薄膜問題 (3.1) の弱形式に誤差項を加えた積分等式を満たすことが分かる．ところが, 極限問題 (3.6) の弱形式は試験関数に関する非線形項を含まないため, $\bar{v}$ の満たす弱形式には φ についての $\mathcal{M}_\varepsilon$ と ∇ の交換に由来する誤差項しか含まない．したがって, この誤差項は v のエネルギー評価だけで処理することができ, 最終的に (3.8) の最後の項 $\varepsilon\|v_0\|_{L^2(\Gamma)}$ で置き換えられる．また, u^ε の弱形式と $\bar{v}$ の弱形式との差分を取り, $u^\varepsilon - \bar{v}$ 自身を試験関数に取った際, 非線形項は一般的な不等式 (3.9) により無視できる．よって, 線形方程式の場合と同様に, グロンウォールの不等式を適用するだけで Ω_ε における解の差分評価 (3.8) を導出でき, 薄膜問題 (3.1) の初期値 u_0^ε は L^2 クラスで十分になるのである．

展開 (unfolding) という言葉は, 最近, 均質化問題の研究によく現れる言葉であり ([9] などを参照), 荒い境界を持つ薄膜領域上の偏微分方程式の研究でも使われている ([4, 3] などを参照)．また, エネルギー汎関数の特異極限の研究 [16] でも何かを展開するという手法が活用されている．一方, 薄膜極限の研究で, 弱形式に代入した積分平均を展開する, というアイデアは [33] が初めてであるように思う．この「展開する」というアイデアは, 今後も様々な形で活用されそうである．

参考文献

[1] M. Abounouh, *The Cahn-Hilliard equation on thin domains*, Appl. Anal., 60 (1996), pp. 23–36.

[2] S. Alama, L. Bronsard, and B. Galvão Sousa, *Thin film limits for Ginzburg-Landau with strong applied magnetic fields*, SIAM J. Math. Anal., 42 (2010), pp. 97–124.

[3] J. M. Arrieta, J. C. Nakasato, and M. C. Pereira, *The p-Laplacian equation in thin domains: the unfolding approach*, J. Differential Equations, 274 (2021), pp. 1–34.

[4] J. M. Arrieta and M. Villanueva-Pesqueira, *Unfolding operator method for thin domains with a locally periodic highly oscillatory boundary*, SIAM J. Math. Anal., 48 (2016), pp. 1634–1671.

[5] M. Arroyo and A. DeSimone, *Relaxation dynamics of fluid membranes*, Phys. Rev. E (3), 79 (2009), pp. 031915, 17.

[6] S. J. Chapman, Q. Du, and M. D. Gunzburger, *A model for variable thickness superconducting thin films*, Z. Angew. Math. Phys., 47 (1996), pp. 410–431.

[7] Z. Chen, C. M. Elliott, and T. Qi, *Justification of a two-dimensional evolutionary Ginzburg-Landau superconductivity model*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 32 (1998), pp. 25–50.

[8] P. G. Ciarlet, *Mathematical elasticity. Vol. III*, vol. 29 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000. Theory of shells.

[9] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso, *The periodic unfolding method*, vol. 3 of Series in Contemporary Mathematics, Springer, Singapore, 2018. Theory and applications to partial differential problems.

[10] A. Contreras, *On the first critical field in Ginzburg-Landau theory for thin shells and manifolds*, Arch. Ration. Mech. Anal., 200 (2011), pp. 563–611.

[11] A. Contreras and P. Sternberg, *Gamma-convergence and the emergence of vortices for Ginzburg-Landau on thin shells and manifolds*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 38 (2010), pp. 243–274.

[12] Q. Du and M. D. Gunzburger, *A model for superconducting thin films having variable thickness*, Phys. D, 69 (1993), pp. 215–231.

[13] C. M. Elliott and B. Stinner, *Analysis of a diffuse interface approach to an advection diffusion equation on a moving surface*, Math. Models Methods Appl. Sci., 19 (2009), pp. 787–802.

[14] J. L. Ericksen, *Hydrostatic theory of liquid crystals*, Arch. Rational Mech. Anal., 9 (1962), pp. 371–378.

[15] F. Ferraresso and L. Provenzano, *On the eigenvalues of the biharmonic operator with Neumann boundary conditions on a thin set*, Bull. Lond. Math. Soc., 55 (2023), pp. 1154–1177.

[16] Y. Giga, J. Okamoto, and M. Uesaka, *A finer singular limit of a single-well Modica-Mortola functional and its applications to the Kobayashi-Warren-Carter energy*, Adv. Calc. Var., 16 (2023), pp. 163–182.

[17] D. Glotov, *Vortices in the three-dimensional thin-film Ginzburg-Landau model of superconductivity*, Z. Angew. Math. Phys., 62 (2011), pp. 891–907.

[18] D. Golovaty, J. A. Montero, and P. Sternberg, *Dimension reduction for the Landau–de Gennes model on curved nematic thin films*, J. Nonlinear Sci., 27 (2017), pp. 1905–1932.

[19] J. K. Hale and G. Raugel, *A damped hyperbolic equation on thin domains*, Trans. Amer. Math. Soc., 329 (1992), pp. 185–219.

[20] ——, *Reaction-diffusion equation on thin domains*, J. Math. Pures Appl. (9), 71 (1992), pp. 33–95.

[21] S. Jimbo and K. Kurata, *Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition*, Indiana Univ. Math. J., 65 (2016), pp. 867–898.

[22] S. Jimbo and Y. Morita, *Ginzburg-Landau equation with magnetic effect in a thin domain*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 15 (2002), pp. 325–352.

[23] D. Krejčiřík, *Spectrum of the Laplacian in narrow tubular neighbourhoods of hypersurfaces with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions*, Math. Bohem., 139 (2014), pp. 185–193.

[24] F. M. Leslie, *Some constitutive equations for liquid crystals*, Arch. Rational Mech. Anal., 28 (1968), pp. 265–283.

[25] F.-H. Lin, *Nonlinear theory of defects in nematic liquid crystals; phase transition and flow phenomena*, Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), pp. 789–814.

[26] F.-H. Lin and C. Liu, *Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals*, Comm. Pure Appl. Math., 48 (1995), pp. 501–537.

[27] T.-H. Miura, *Zero width limit of the heat equation on moving thin domains*, Interfaces Free Bound., 19 (2017), pp. 31–77.

[28] ——, *On singular limit equations for incompressible fluids in moving thin domains*, Quart. Appl. Math., 76 (2018), pp. 215–251.

[29] ——, *Navier-Stokes equations in a curved thin domain, Part III: thin-film limit*, Adv. Differential Equations, 25 (2020), pp. 457–626.

[30] ——, *Error estimate for classical solutions to the heat equation in a moving thin domain and its limit equation*, Interfaces Free Bound., 25 (2023), pp. 633–670.

[31] ——, *Approximation of a solution to the stationary Navier-Stokes equations in a curved thin domain by a solution to thin-film limit equations*, J. Math. Fluid Mech., 26 (2024), pp. Paper No. 33, 35.

[32] ——, *Thin-film limit of the Cahn–Hilliard equation in a curved thin domain*, preprint, arXiv:2502.00327 (2025).

[33] ——, *Thin-film limit of the Ginzburg–Landau heat flow in a curved thin domain*, J. Differential Equations, 422 (2025), pp. 1–56.

[34] T.-H. Miura, Y. Giga, and C. Liu, *An energetic variational approach for nonlinear diffusion equations in moving thin domains*, Adv. Math. Sci. Appl., 27 (2018), pp. 115–141.

[35] Y. Morita, *Stable solutions to the Ginzburg-Landau equation with magnetic effect in a thin domain*, Japan J. Indust. Appl. Math., 21 (2004), pp. 129–147.

[36] I. Nitschke, M. Nestler, S. Praetorius, H. Löwen, and A. Voigt, *Nematic liquid*

crystals on curved surfaces: a thin film limit, Proc. A., 474 (2018), pp. 20170686, 20.

[37] I. Nitschke, S. Reuther, and A. Voigt, *Hydrodynamic interactions in polar liquid crystals on evolving surfaces*, Phys. Rev. Fluids, 4 (2019), p. 044002.

[38] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer New York, NY, second ed., 1987.

[39] M. Prizzi, M. Rinaldi, and K. P. Rybakowski, *Curved thin domains and parabolic equations*, Studia Math., 151 (2002), pp. 109–140.

[40] M. Prizzi and K. P. Rybakowski, *On inertial manifolds for reaction-diffusion equations on genuinely high-dimensional thin domains*, Studia Math., 154 (2003), pp. 253–275.

[41] G. Richardson and J. Rubinstein, *The mixed boundary condition for the Ginzburg Landau model in thin films*, Appl. Math. Lett., 13 (2000), pp. 97–99.

[42] J. Rubinstein and M. Schatzman, *Asymptotics for thin superconducting rings*, J. Math. Pures Appl. (9), 77 (1998), pp. 801–820.

[43] M. Schatzman, *On the eigenvalues of the Laplace operator on a thin set with Neumann boundary conditions*, Appl. Anal., 61 (1996), pp. 293–306.

[44] R. Temam and M. Ziane, *Navier-Stokes equations in thin spherical domains*, in Optimization methods in partial differential equations (South Hadley, MA, 1996), vol. 209 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 281–314.

[45] A. Torres-Sánchez, D. Millán, and M. Arroyo, *Modelling fluid deformable surfaces with an emphasis on biological interfaces*, J. Fluid Mech., 872 (2019), pp. 218–271.

[46] T. Yachimura, *Two-phase eigenvalue problem on thin domains with Neumann boundary condition*, Differential Integral Equations, 31 (2018), pp. 735–760.

[47] E. Yanagida, *Existence of stable stationary solutions of scalar reaction-diffusion equations in thin tubular domains*, Appl. Anal., 36 (1990), pp. 171–188.