

# 量子ネックレス LIE 代数と HOMFLY-PT スケイン代数

辻俊輔 (明治大学総合数理学部)

SHUNSUKE TSUJI (MEIJI UNIVERSITY SCHOOL OF INTERDISCIPLINARY MATHEMATICAL SCIENCES)

ABSTRACT. 本稿では、量子ネックレス Lie 代数と HOMFLY-PT スケイン代数という二つの代数構造の定義を確認し、それらを結びつける重要な定理を紹介する。さらに、具体的な計算例を通して、これらの理論がどのように機能するかを明らかにし、今後の研究に向けた理解を深めることを目指す。最後に、曲面の埋め込みに対応する量子ネックレス Lie 代数の準同型を計算する方法についても紹介する。この研究は軽尾浩晃氏との共同研究である。

## 1. 導入

本稿では、HOMFLY-PT スケイン代数と量子ネックレス Lie 代数の関係について述べる。スケイン代数は、曲面の理論と結び目理論の考え方から自然に現れる代数構造である。量子不変量は本来、量子群に基づいて定義される結び目・絡み目の不変量であるが、Lickorish [3] が示したように、局所的なスケイン関係式だけで定義できる。3次元多様体における絡み目のイソトピー類を基底とする加群を考え、この加群をスケイン関係式で割ったものをスケイン加群と呼ぶ。特に曲面と閉区間の積多様体の場合、この加群は代数の構造を持ち、これをスケイン代数という。

スケイン代数は、曲面の表現空間や Poisson 構造の量子化と密接に関連している。Turaev [7] は、HOMFLY-PT スケイン代数が Goldman Lie 代数 [1, 2] の量子化となることを示唆した。さらに、Schedler [4] は、ネックレス Lie 代数とその量子化である量子ネックレス Lie 代数を純粋代数的に構成した。本稿では証明の詳細には立ち入らず、構造の概要と計算例を通して確認することを目的とし、特に次の二点を目標とする。

- (1) HOMFLY-PT スケイン代数と量子ネックレス Lie 代数を結びつける新しい結果を報告すること。
- (2) さらに、具体的な計算例を通じて理論の直感的理解を補強すること。

第1の目標を達成するために、HOMFLY-PT スケイン代数に自然なフィルトレーションを導入し、その次数商環が量子ネックレス Lie 代数と同型であること (Theorem 3.2) を解説する。第2の目標として、本稿では以下の例を扱う。これらの例は、スケイン代数のフィルトレーションの理解や非可換 Poisson ブラケットへの理解、量子ネックレス Lie 代数の関係式の構造を確認するのに役立つ。最後の例は量子ネックレス Lie 代数の幾何学的な直感を与える。

- (1) HOMFLY-PT スケイン代数のフィルトレーションの具体例 (Example 2.3)。
- (2) HOMFLY-PT スケイン代数における Lie ブラケット (Example 2.5, Example 2.6)。
- (3) HOMFLY-PT スケイン代数の次数商環が量子ネックレス Lie 代数と同型の対応例 (Example 3.4)。
- (4) 曲面の埋め込みに対応する量子ネックレス Lie 代数の挙動 (Example 5.2)。

## 2. HOMFLY-PT スケイン代数

本稿では、一般の3次元多様体では説明せずに曲面と閉区間の積多様体の中の絡み目を考える。この場合は絡み目は曲面に描かれたリンク・ダイアグラムで表すことができる。これは、交点に上下の情報を付加した曲面に埋め込まれた4-valent グラフである。上下の情報は、 $\nearrow$  または  $\searrow$  で表す。以下で、スケイン加群を定義する。

**Definition 2.1.** 環  $R$  を

$$\mathbb{Q}[[\rho\hbar, \hbar]][\rho, \hbar, h]$$

とする（ここで  $R$  は形式級数環であり、後の議論で自然な直和分解を得るためこの形を採用する）。 $S$  をコンパクトな向きづけられた曲面とする。リンク・ダイアグラムのイソトピー類の集合を  $\mathcal{D}(S)$  とする。 $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  を  $RD(S)$  の次の関係式で割った商加群とする。

- (1) 以下の関係式は Reidemeister move と呼ばれ、3次元空間内のイソトピー変形に対応する。

$$\bigcirc = \bigcirc, \quad \updownarrow = \downuparrow, \quad \updownarrow = \downuparrow, \quad \updownarrow = \downuparrow$$

- (2) 以下の関係式が、スケイン関係式と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array} - \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} = h \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}, \\ \text{(B)} \quad & \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} - \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array} = h \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}, \\ \text{(C)} \quad & \bigcirc = \frac{2 \sinh(\rho\hbar)}{\hbar} \square, \quad \text{(D)} \quad \updownarrow = \exp(\rho\hbar) \uparrow. \end{aligned}$$

ただし、これらは曲面の中の局所的な関係式であり、式の中は曲面の中の閉円盤の中の違いを表し、それ以外はすべて同じダイアグラムである。

$\tilde{\mathcal{A}}(S)$  はダイアグラムを重ねることにより積の構造を入れる。ただし、二つのダイアグラム  $L_1, L_2$  は vertex は異なる位置にして edge は横断的な2重点で交わるようにする。そして、交点は新しい vertex として扱い、上下の情報は、 $L_1$  が上、 $L_2$  が下になるように新しいダイアグラム  $L_1 L_2$  を定義する。空のダイアグラム  $\emptyset$  は単位元である。

Lickorish [3] の主定理は、次のように言い換えることができる。

**Theorem 2.2** ([3]).  $D^2$  を閉円盤として、 $\tilde{\mathcal{A}}(D^2)$  は、 $\emptyset \mapsto 1$  により、係数環  $R$  と同型になる。

この定理は、スケイン関係式のみから絡み目不変量を構成できることを意味する。実際、HOMFLY-PT 多項式など主要な絡み目不変量が得られる。

本稿で扱うスケイン代数  $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  には、二種類の自然な次数構造が存在する。一つはリンクの成分数に基づく *component degree* であり、もう一つは有限型不変量に対応する

*finite type filtration* である。これらは異なる概念であり、以降では混乱を避けるために明確な記号を用いる。

$k$  次の component degree による部分加群を  $\tilde{\mathcal{A}}^{(k)}(S)$  とし、 $n$  次の finite type filtration を  $F^n \tilde{\mathcal{A}}(S)$  で表す。また、両方の条件を満たす部分加群を

$$F^n \tilde{\mathcal{A}}^{(k)}(S) := \tilde{\mathcal{A}}^{(k)}(S) \cap F^n \tilde{\mathcal{A}}(S)$$

と書く。

まず、component degree の定義を与える。 $d \in \mathcal{D}(S)$  について、 $|d|$  を  $d$  が表す絡み目のコンポーネント数とする。例えば、 $d$  がコンポーネントが一つの結び目を表すときは  $|d| = 1$  で、 $d$  が 2-コンポーネント絡み目のときは、 $|d| = 2$  である。さらに、 $\rho, h$  の冪指数を正の寄与、 $\bar{h}$  の冪指数を負の寄与として加えたものを component degree とする。

具体的には、以下のように component degree を定義する。 $RD(S)$  について、 $\mathbb{Q}[\rho\bar{h}, h\bar{h}]$  加群として

$$\{\rho^{k_1} h^{k_2} \bar{h}^{k_3} d \mid k_1 + k_2 - k_3 + |d| = k\}$$

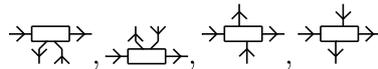
で生成される部分加群を  $(RD)^{(k)}(S)$  とかく。ス테인関係式はこの次数を保つため、商加群  $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  も次のように直和分解を持つ：

$$\tilde{\mathcal{A}}(S) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{A}}^{(k)}(S).$$

ただし、 $\tilde{\mathcal{A}}^{(k)}(S)$  は  $(RD)^{(k)}(S)$  が代表する元の集合（自然な像）である。この直和分解により、component degree が定まる。例として、 $\rho^2 h \bar{h}^3 d$  ( $|d| = 2$ ) の component degree は  $2 + 1 - 3 + 2 = 2$  となる。

次に、finite type filtration を定義するが、通常の  $S^3$  内の finite type filtration の定義と違って、交点の交代和で定義するわけではない。以下のように寄り道の交代和で finite type filtration で定義する。これは、基本群の augmentation ideal による完備化で群の表示の長さを評価するものと類似している。

detour つきリンク・ダイアグラム  $D_d$  とは、通常の height vertex  $\bowtie, \bowtie$  に加えて、4 種類の局所図 (detour vertex)



を許したものである。 $V_d(D_d)$  を detour vertex の集合とする。

$D_d$  を detour 付きリンク・ダイアグラムとする。 $S \subset V_d(D_d)$  に対し、 $D_d(S)$  とは、 $S$  に含まれる detour vertex で寄り道を採用し、それ以外の detour vertex ではスムージングを適用したリンク・ダイアグラムである。寄り道を使うスムージングは以下のようにスムージングする。

- から .
- から .
- から .
- から .

寄り道リンク・ダイアグラム  $D_d$  が次のスケイン代数  $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  の元

$$\sum_{S \subset V_d(D_d)} (-1)^{|V_d(D_d)| - |S|} D_d(S)$$

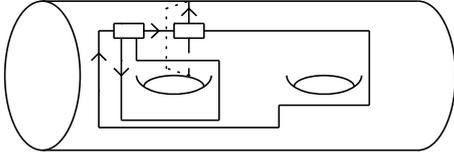
を表すことにする。後述する Example 2.3 を参照。

この記号を使って、 $n$  次の有限型フィルトレーションを  $F^n \tilde{\mathcal{A}}(S)$  が

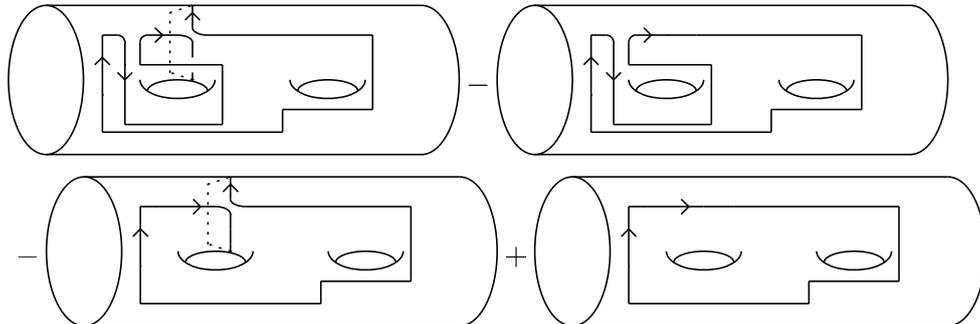
$$\{h^{n_1} \hbar^{n_2} D_d \mid 2n_1 + 2n_2 + |V_d(D_d)| \geq n\}$$

から生成される  $R$  部分加群として定義する。このフィルトレーション  $\{F^n \tilde{\mathcal{A}}(S)\}_{n \geq 0}$  を finite type filtration というにすることにする。

**Example 2.3.** 例えば、次の detour リンク・ダイアグラムは detour vertex が二つある。



このダイアグラムは  $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  の元として、以下の 4 つのダイアグラムの和の交代和を表す。



本研究では、スケイン代数の代数構造より Lie 代数の構造が重要である。その意味では、スケイン Lie 代数の構造の研究をしているとみなせる。つまり、積の構造が重要ではなくて Lie ブラケットの構造が研究のメインである。以下では Lie ブラケットを定義する手続きを紹介する。Turaev [7] で示唆されたことは、スケイン代数の積に基づいた  $h \rightarrow 0$  の極限で Poisson 構造が Goldman Lie ブラケットに対応することである。ここでは、[7] では明示されなかった対応するスケイン代数の非可換 Poisson ブラケットを明示する。言い方を変えると、このブラケットは、 $h$  を形式パラメータとした量子化に対応し、 $h \rightarrow 0$  の極限では Poisson 代数 (Goldman Lie bracket) を再現する。Turaev の観察をスケイン関係式から見ると、スケイン関係式により、交差の符号を反転させた差分を  $h$  倍のスムージングで表せるため、 $h$  係数を抽出することで Poisson 極限を定義できる。

リンク・ダイアグラム二つ  $d_1, d_2$  をとり、それらの vertex が一致しないようにまた edge は横断的な 2 重点で交わるようにとる。  $d_1$  と  $d_2$  の交点に順番をつけて、  $P_1, \dots, P_m$  とする。  $\epsilon'_i = \{-1, 0, 1\}$  として、  $(d_1 \cup d_2)(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m)$  を  $d_1 \cup d_2$  で  $P_i$  の近傍を

- $\epsilon'_i = 0$  のとき、 $\searrow$
- $\epsilon'_i = 1$  のとき、 $\swarrow$
- $\epsilon'_i = -1$  のとき、 $\swarrow$

と書いた図とする。スケイン関係式  $A$  を使って、

$$\begin{aligned} & (d_1 \cup d_2)(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{i-1}, \epsilon'_i, \epsilon'_{i+1}, \dots, \epsilon'_m) - (d_1 \cup d_2)(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{i-1}, -\epsilon'_i, \epsilon'_{i+1}, \dots, \epsilon'_m) \\ &= h \epsilon'_i (d_1 \cup d_2)(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{i-1}, 0, \epsilon'_{i+1}, \dots, \epsilon'_m) \end{aligned}$$

となる。

$\epsilon_i$  を  $P_i$  での  $d_1$  と  $d_2$  の局所交差数として固定する。つまり、 $\swarrow_{d_2}^{d_1}$  のとき  $\epsilon_i = 1$ 、 $\swarrow_{d_1}^{d_2}$  のとき  $\epsilon_i = -1$  となる。このとき、 $d_1 d_2 = (d_1 \cup d_2)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  となり、 $d_2 d_1 = (d_1 \cup d_2)(-\epsilon_1, \dots, -\epsilon_m)$  となる。さらに、

$$\begin{aligned} & d_1 d_2 - d_2 d_1 \\ &= (d_1 \cup d_2)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) - (d_1 \cup d_2)(-\epsilon_1, \dots, -\epsilon_m) \\ &= h \sum_{i=1}^m \epsilon_i (d_1 \cup d_2)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, 0, -\epsilon_{i+1}, \dots, -\epsilon_m) \end{aligned}$$

とわかる。この、 $d_1 d_2 - d_2 d_1$  を計算したあまりに  $h$  倍すればなる式

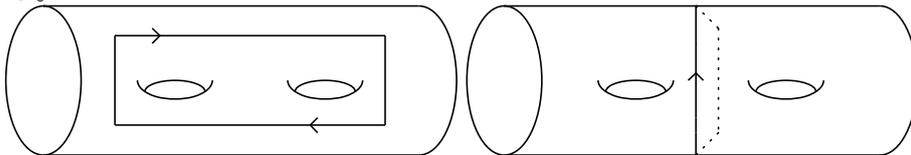
$$\sum_{i=1}^m \epsilon_i (d_1 \cup d_2)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, 0, -\epsilon_{i+1}, \dots, -\epsilon_m)$$

を  $[d_1, d_2]$  とかく。 $[d_1, d_2]$  は、交差の一つを順番にスムージングした和で表されるこのブラケットが以下の命題で示すように非可換 Poisson 代数を定める。

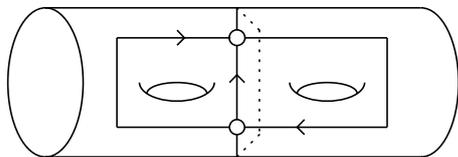
- Proposition 2.4** ([5]). (1) 上記の  $[d_1, d_2] \in \tilde{\mathcal{A}}(S)$  は交点の順番によらない。  
 (2) 上記の  $[d_1, d_2]$  により、 $[\cdot, \cdot]: \tilde{\mathcal{A}}(S) \times \tilde{\mathcal{A}}(S) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(S)$  が定義できる。  
 (3)  $[\cdot, \cdot]: \tilde{\mathcal{A}}(S) \times \tilde{\mathcal{A}}(S) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(S)$  は Lie ブラケットになる。さらに、 $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  は非可換ポアソン代数になる。  
 (4)  $[F^n \tilde{\mathcal{A}}(S), F^m \tilde{\mathcal{A}}(S)] \subset F^{n+m-2} \tilde{\mathcal{A}}(S)$  となる。

この非可換 Poisson ブラケットは、ネックレス Lie 代数に現れる括弧と形式的に類似しており、§4 でその対応を詳しく説明する。

**Example 2.5.** 以下の二つのリンク・ダイアグラム  $d_1, d_2$  の Lie ブラケット  $[d_1, d_2]$  を考える。



以下の図のように  $d_1 \cap d_2$  には、二つ交点がある。



上の交点、下の交点と順番を考えた場合は

$$[d_1, d_2] = \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2}$$

The diagram shows the Lie bracket calculation for the first case. It is the difference between two diagrams. The first diagram is the original cylinder with paths and a vertical dashed line. The second diagram is the same cylinder, but the vertical dashed line is now a solid line that has crossed the paths, with a gap between the paths where the line passes through.

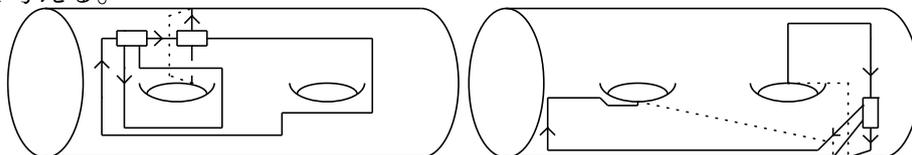
となる。一方、下の交点、上の交点と順番を考えた場合は、

$$[d_1, d_2] = -\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}$$

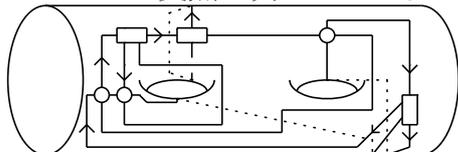
The diagram shows the Lie bracket calculation for the second case. It is the negative of the first diagram plus the second diagram. The diagrams are identical to those in the previous equation block.

となる。この二つ和は、 $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  の元として同じ元になる。

**Example 2.6.** ここでは、detour リンク・ダイアグラム同士のブラケットの計算方法を説明する。以下の二つの detour リンク・ダイアグラム  $d_1, d_2$  の Lie ブラケット  $[d_1, d_2]$  を考える。



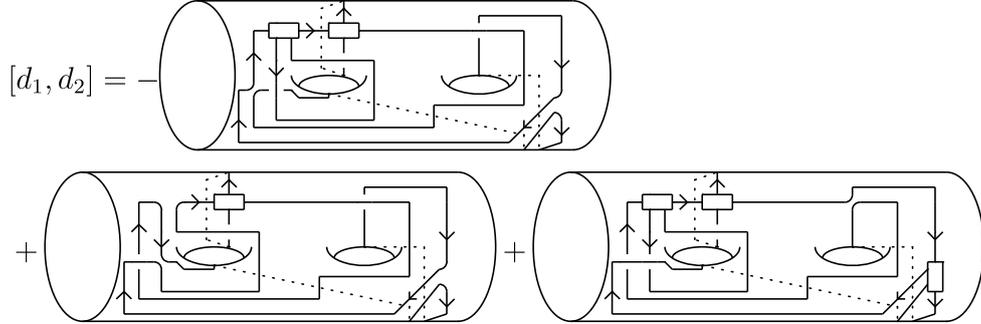
この二つの交点は次の3つである。



これらを左から順番に  $P_1, P_2, P_3$  とする。同じように交点のスムージングをして交点の上下を入れ替えて  $[d_1, d_2]$  を計算するが、交点の種類によって計算処理が変わる。

- direc パスと detour パスの交点の場合、detour パスにつながる一つの detour vertex でスムージングし、detour vertex を一つ減らす。この場合は  $P_1$  が例となる。
- detour パスと detour パスの交点の場合、detour パスにつながる二つの detour vertex でスムージングし、detour vertex を二つ減らす。この場合は  $P_2$  が例となる。
- direct パスと direct パスの交点の場合、detour vertex は何も変えない。このとき detour vertex は減らない。この場合は  $P_3$  が例となる。

これらの計算をして  $[d_1, d_2]$  は以下ようになる。



この計算方法を見ると、detour vertex は多くても二つ減る。この計算方法から

$$[F^{n_1} \tilde{\mathcal{A}}(S), F^{n_2} \tilde{\mathcal{A}}(S)] \subset F^{n_1+n_2-2} \tilde{\mathcal{A}}(S)$$

が示せる。

### 3. 量子ネックレス Lie 代数

このセクションでは Schedler [4] が定義した量子ネックレス Lie 代数を紹介する。しかし、一般の quiver を使ったオリジナルの定義ではなく、quiver がブーケの場合で、さらに  $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  に対応した係数環と関係式で定義する。

曲面  $S$  をとり、 $H$  を  $H_1(S, \mathbb{Q})$  として、 $\mu(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{Q}$  を inter section form とする。 $S$  の境界のコンポーネントが  $\emptyset$  または連結であるときに以下で定義する量子ネックレスリー代数は quiver がブーケの時に対応する。

有限個の点 (0 個の可能性あり) が指定された向きづけられた円周  $S^1$  をネックレス、指定された各点をビーズと呼ぶ。ただし、ビーズを持たない空のネックレスもネックレスとみなす。ス테인代数の文脈からネックレスが曲面に埋め込まれていると勘違いする読者もいるかもしれないが、この  $S^1$  は曲面の座標的な構造は持たないことを注意しておく。

ネックレスの書くビーズに  $H$  の元を割り当て、 $H$  付きネックレスと呼ぶ。絵で表すときは、指定された点を白丸で書き、その中に割り当てられた  $H$  の元を書くことにする。

$H$  付きのネックレスの非交和を考える。そのビーズの個数の合計を  $n$  としたとき、ビーズに  $1, \dots, n$  の番号を割り当て、この番号を高さと呼び  $i < j$  ならば  $i$  に対応するビーズは  $j$  に対応するビーズより低いとみなす。これを高さと  $H$  付きネックレス・アンサンブルと呼ぶ。

**Definition 3.1.** 高さと  $H$  付きネックレス・アンサンブルを基底とする  $R = \mathbb{Q}[[\rho\hbar, \hbar]][\rho, \hbar, \hbar]$  自由加群を以下の関係式で割った商加群を  $\tilde{\mathcal{N}}(S)$  とし、これを量子ネックレス Lie 代数と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
\text{(H)} \quad & \text{bead}(ax+by) = a \text{bead}(x) + b \text{bead}(y), \\
\text{(A')} \quad & \text{bead}(x, y)_{i+1, i} - \text{bead}(x, y)_{i, i+1} = \mu(x, y)h \text{necklace}, \\
\text{(B')} \quad & \text{bead}(x, y)_{i+1, i} - \text{bead}(x, y)_{i, i+1} = \mu(x, y)\hbar \text{necklace}, \\
\text{(C')} \quad & \text{necklace} = 2\rho
\end{aligned}$$

ただし、(C')の左辺はビーズを持たないネックレスである。特に、これらの関係式は描かれていないビーズの高さの順序を変えないこととする。

さらに、 $\tilde{\mathcal{N}}(S)$ にはネックレス・アンサンブルの非交和、さらに、左のビーズが高く右が低くなるように高さを決める。

量子ネックレス Lie 代数は、高さの平均をとることで  $R$  自由加群となることに注意して、 $x, y \in \tilde{\mathcal{N}}(S)$  として、

$$[x, y] = \frac{1}{\hbar}(xy - yx)$$

となる。

ス테인代数  $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  と同じように、component degree と finite type filtration を定義する。 $\tilde{\mathcal{N}}(S)$  には関係式を保つ二つの線形独立な degree が定義できる。一つを component degree として、もう一つを finite type filtration とする。

$m \in \mathbb{Z}$  として、 $\tilde{\mathcal{N}}^{(m)}(S)$  を

$$\{\rho^{m_1} \hbar^{m_2} \hbar^{m_3} (\text{necklace ensemble}) \mid m_1 + m_2 - m_3 + \#(\text{necklaces}) = m\}$$

から生成される  $\mathbb{Q}[[\rho\hbar, \hbar\hbar]]$  部分加群とする。これにより、component degree を定義する。 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  として、 $F^n \tilde{\mathcal{N}}(S)$  を

$$\{\hbar^{n_1} \hbar^{n_2} (\text{necklace ensemble}) \mid 2n_1 + 2n_2 + \#(\text{beads}) = n\}$$

から生成される  $R$  部分加群とする。これにより、finite type filtration を定義する。本来はこれも degree と呼ぶべきものであるが、あえて、 $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  と対応させるために filtration と呼んでいる。また、 $F^n \tilde{\mathcal{N}}(S) \cap \tilde{\mathcal{N}}^{(m)}(S)$  を  $F^n \tilde{\mathcal{N}}^{(m)}(S)$  と書くことにする。

$\text{Gr} \tilde{\mathcal{A}}(S)$  を  $\bigoplus_{k=0}^{\infty} F^k \tilde{\mathcal{A}}(S) / F^{k+1} \tilde{\mathcal{A}}(S)$  とする。 $\phi_k : F^k \tilde{\mathcal{N}}(S) \rightarrow F^k \tilde{\mathcal{A}}(S) / F^{k+1} \tilde{\mathcal{A}}(S)$  を次のように定義する。

- (1) ネックレスの個数  $m_1$  と同じ数の連結成分 (コンポーネント) を持つリンク・ダイアグラムを取る。
- (2) ビーズの個数とネックレスのつながり方に応じて detour vertex を加える。

- (3) ビーズに対応するホモロジー群  $H$  の元を代表するように detour パスを配置する
- (4) detour 同士の交点の高さの情報は、ビーズの高さに対応させる。

この  $\phi_k$  の構成には、リンク・ダイアグラムやパスの取り方などに曖昧さがあるが、それらの違いは  $\text{mod } F^{k+1}\tilde{\mathcal{A}}(S)$  で消える。

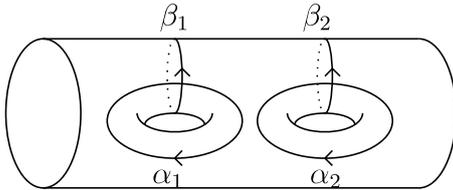
**Theorem 3.2.**  $\phi_k : F^k\tilde{\mathcal{N}}(S) \rightarrow F^k\tilde{\mathcal{A}}(S)/F^{k+1}\tilde{\mathcal{A}}(S)$  により定められる写像

$$\phi : \tilde{\mathcal{N}}(S) \rightarrow \text{Gr}\tilde{\mathcal{A}}(S)$$

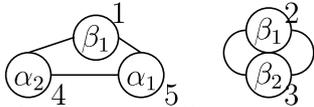
は well-defined となり、全射である。さらに単射でもあるため、同型が成り立つ。

**Remark 3.3.** 本稿では component degree の役割は表面的には目立たないが、定理の証明は component degree に関する帰納法を用いて進められる。その意味で、Turaev [7] が  $h$  と  $\hbar$  を使い分けを本稿で採用した理由は、本論文では本質的である。

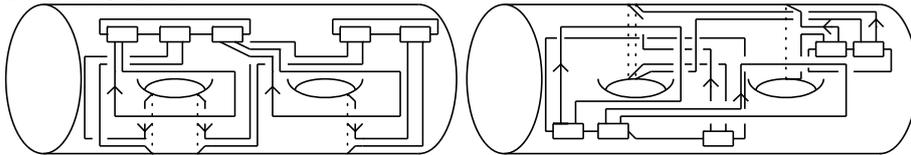
**Example 3.4.** 図のようにホモロジー群  $H = H_1(S, \mathbb{Q})$  のシンプレクティック基底をとる。



次の高さとネックレス付きネックレス・アンサンブルを考える。



定理 3.2 の写像  $\phi$  による、このネックレス・アンサンブルの像は次のようになる。例を挙げると



などが考えられる。これらは  $\text{mod } F^5\tilde{\mathcal{A}}(S)$  で同じ元となる。

#### 4. TURAEV の量子化

Turaev[7] の量子化について、説明する。ここで紹介する定義は、オリジナルの定義よりやや強い主張になっている。 $A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} A^{(m)}$  は  $\hbar$  を含む係数環の非可換 Poisson 代数とし  $h[x, y] = xy - yx$  を満たすとする。さらに、 $A^{(m_1)}A^{(m_2)} \subset A^{(m_1+m_2)}$ ,  $[A^{(m_1)}, A^{(m_2)}] \subset A^{(m_1+m_2-1)}$  を満たすとする。このとき、 $A^{(1)}$  は  $A$  の部分 Lie 代数となる。ある Lie 代数  $\mathfrak{g}$  へ全射 Lie 代数準同型  $A^{(1)} \rightarrow \mathfrak{g}$  があるとき、 $A$  は  $\mathfrak{g}$  の量子化になっているという。つまり、非可換積と Poisson ブラケットの関係を表す  $h[x, y] = xy - yx$  と  $\hbar \rightarrow 0$  の極限 (正確に代入) により、古典的な Lie 代数  $\mathfrak{g}$  のブラケットが復元されているという意味である。

ここでは、紙面の都合上 Goldman Lie 代数とネックレス Lie 代数の定義は省略するが詳しくは、例えば、[1, 2] や [4] に書いてある。ここでは、 $\tilde{\mathcal{A}}^{(1)}(S)/h\tilde{\mathcal{A}}^{(3)}(S)$  を Goldman Lie 代数  $\mathfrak{g}_G(S)$ ,  $\tilde{\mathcal{N}}^{(1)}(S)/h\tilde{\mathcal{N}}^{(3)}(S)$  をネックレス Lie 代数  $\mathfrak{g}_N(S)$  の別定義とみなすことができる。  $\text{Gr}\mathfrak{g}_G(S) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} F^k \mathfrak{g}_G(S) / F^{k+1} \mathfrak{g}_G(S)$  とする。

改めて本稿のテーマである Goldman Lie 代数とネックレス Lie 代数と HOMFLY-PT スケイン代数と量子ネックレス Lie 代数の直感的なつながりを説明する。

- Goldman Lie 代数のブラケットはスケイン関係式を用いてほどく時に出てくる計算により復元される。
- ネックレス Lie 代数のブラケットは関係式を用いて量子ネックレス Lie 代数の高さの補正により復元される。
- これら二つの量子化が次数商では同じ計算である。

**Theorem 4.1** ([7],[4]). 以下の組は、Turaev の意味で量子化になっている：

$$\begin{aligned} &(\tilde{\mathcal{A}}(S), \mathfrak{g}_G(S)), \\ &(\tilde{\mathcal{N}}(S), \mathfrak{g}_N(S)), \\ &(\text{Gr}\tilde{\mathcal{A}}(S), \text{Gr}\mathfrak{g}_G(S)). \end{aligned}$$

**Remark 4.2.** これらの量子化は双代数の構造としても量子化になる。ただし、 $\tilde{\mathcal{A}}(S)$  はそのままと positive twist に対応する関係式が余積で安定しないため well-defined ならず、余代数の定義はできない、代わりに  $\tilde{\mathcal{A}}(S)/\rho\tilde{\mathcal{A}}(S)$  で余代数の定義をする。

## 5. 曲面の埋め込み

埋め込み写像  $e : S_1 \times I \rightarrow S_2 \times I$  は  $e_* : \tilde{\mathcal{A}}(S_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(S_2)$  を誘導する。さらに、 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  として  $e_*(F^n \tilde{\mathcal{A}}(S_1)) \subset F^n \tilde{\mathcal{A}}(S_2)$  より、

$$e_* : \text{Gr}\tilde{\mathcal{A}}(S_1) \rightarrow \text{Gr}\tilde{\mathcal{A}}(S_2)$$

を得る。つまり、Theorem 3.2 より、

$$e_* : \tilde{\mathcal{N}}(S_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}(S_2)$$

が得られる。このセクションではこの誘導された量子ネックレス Lie 代数の記述を観察する。

以下では、一般の場合（特に代数準同型でない場合）に対応する計算手順を示す。これらの計算は、スケイン代数に値を持つホモロジーシリンダーの不変量 ([6] ( $\hbar = 0$  の場合) 一般の場合は準備中) の計算で必要になる。

ここでは、

$$e_* : \tilde{\mathcal{N}}(S_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}(S_2)$$

の計算方法を紹介する。ただし、埋め込み  $e' : S_2 \times I \rightarrow S_1 \times I$  が存在して  $e \circ e'$  が恒等写像とイソトピー同値と仮定する。 $\eta_0 : S_1 \simeq S_1 \times \{0\} \rightarrow S_2 \times I \setminus e(S_1 \times I)$  と  $\eta_1 : S_1 \simeq S_1 \times \{1\} \rightarrow S_2 \times I \setminus e(S_1 \times I)$  が誘導するホモロジー群準同型  $\eta_{0*}, \eta_{1*}$  を考えたとき

$$\ker(e_* : H_1(S_1, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S_2, \mathbb{Q})) = \ker \eta_{0*} + \ker \eta_{1*}$$

となる。また、 $H_1(S_1, \mathbb{Q})$  は  $\text{Im}(e'_* : H_1(S_2, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S_1, \mathbb{Q}))$  と  $\text{ker}(e_* : H_1(S_1, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S_2, \mathbb{Q})) = \text{ker } \eta_{0*} + \text{ker } \eta_{1*}$  の直和分解となる。

**Proposition 5.1** (埋め込みに誘導される量子ネックス Lie 代数の準同型の代数的計算手順). 上記の仮定で以下の計算手順は

$$e_* : \tilde{\mathcal{N}}(S_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}(S_2)$$

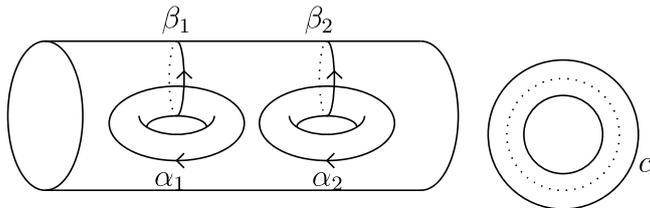
を代数的に実行するための計算手順である。

- (1) 全てのビーズが  $\text{Im}(e'_* : H_1(S_2, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S_1, \mathbb{Q}))$  のラベルになるように以下(2),(3),(4)を続ける。
- (2)  $\tilde{\mathcal{N}}(S_1)$  の元のビーズのラベルを  $\text{Im}(e'_* : H_1(S_2, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S_1, \mathbb{Q})) \oplus (\text{ker } \eta_{0*} + \text{ker } \eta_{1*})$  と分ける。
- (3)  $\text{ker } \eta_{1*}$  のラベルがついているビーズを一番高いところに関係式を使って移動してその項は  $\text{ker } e_*$  の元であり 0 とする。
- (4)  $\text{ker } \eta_{0*}$  のラベルがついているビーズを一番低いところに関係式を使って移動してその項は  $\text{ker } e_*$  の元であり 0 とする。
- (5) (1) が終われば全てのホモロジーのラベルを  $e_* : H_1(S_1, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S_2, \mathbb{Q})$  でおくる。

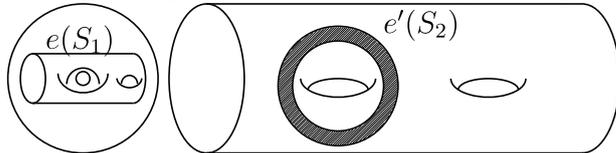
簡単にこの命題の計算手順が成り立つ理由を概説する。手順(3)および(4)で行う高さの変更は、Definition 3.1 の量子ネックス関係式  $(A'), (B')$  を繰り返し適用することによって実現する。また、この計算手順が止まる理由は、(2),(3),(4)を繰り返すたびに  $\text{ker } \eta_{0*}, \text{ker } \eta_{1*}$  のラベルがついたビーズの数が減るため最終的に計算手順が止まる。

最後にこの命題の具体的な計算例を示す。

**Example 5.2.**  $S_1, S_2$  を次のような曲面とする。またホモロジー群の基底も図のようにとる。



埋め込み  $e$  を次のようにとると上記の仮定の埋め込み  $e'$  は次のようにとれる。



高さ  $H$  付きネックス・アンサンブルを式で表す。例えば、次の高さ  $H$  付きネックス・アンサンブルは

$$\begin{array}{c} \textcircled{\beta_1} \\ \textcircled{\alpha_2} \text{---} \textcircled{\alpha_1} \\ \text{4} \quad \text{5} \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{\beta_1} \\ \textcircled{\beta_2} \\ \text{2} \quad \text{3} \end{array} = [(\beta_1, 1), (\alpha_1, 5), (\alpha_2, 4)][(\beta_1, 2), (\beta_2, 3)]$$

と書くことにする。この例だと  $e_*$  で送ると 0 になるので、別の例を使う。

上記の  $\text{Im}(e'_*)$ ,  $\ker \eta_{0*}$ ,  $\ker \eta_{1*}$  は

$$\begin{aligned}\text{Im}(e'_*) &= \mathbb{Q}\alpha_1, \\ \ker \eta_{0*} &= \mathbb{Q}\beta_1 \oplus \mathbb{Q}\beta_2, \\ \ker \eta_{1*} &= \mathbb{Q}\alpha_2\end{aligned}$$

となる。

$e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 5]][[\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 6]]$  を上記の計算手順で計算の具体例を説明する。

ここで、 $\alpha_2$  のラベルをもつビーズは最も高い位置にないので、 $(A')$  の関係式を使い、

$$\begin{aligned}& e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 5]][[\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 6]]) \\ &= e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 6]][[\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 5]]) \\ &+ \hbar\mu(\alpha_2, \beta_2)e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3]]) \\ &= e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 6]][[\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 5]]) \\ &+ \hbar e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3]])\end{aligned}$$

となる。今、 $e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 6]][[\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 5]]) = 0$  なので、

$$\begin{aligned}& e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 5]][[\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 6]]) \\ &= \hbar e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3]])\end{aligned}$$

となる。

次に、 $\beta_1$  のラベルがついているビーズを一番低くして計算を進める。関係式  $(B')$  を使って、

$$\begin{aligned}& \hbar e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3]]) \\ &= \hbar e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 3], [\alpha_1, 2], [\alpha_1, 4]]) \\ &+ \hbar\hbar\mu(\alpha_1, \beta_1)e_*([\alpha_1, 1]][[\alpha_1, 2]]) \\ &= \hbar e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 2], [\alpha_1, 3], [\alpha_1, 4]]) \\ &+ \hbar\hbar\mu(\alpha_1, \beta_1)e_*([\alpha_1, 1]][[\alpha_1, 2]]) + \hbar\hbar\mu(\alpha_1, \beta_1)e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]][ ] ) \\ &= \hbar e_*([\alpha_1, 2], [\beta_1, 1], [\alpha_1, 3], [\alpha_1, 4]]) \\ &+ \hbar\hbar\mu(\alpha_1, \beta_1)e_*([\alpha_1, 1]][[\alpha_1, 2]]) + \hbar\hbar\mu(\alpha_1, \beta_1)e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]][ ] ) \\ &+ \hbar\hbar\mu(\alpha_1, \beta_1)e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]][ ] ) \\ &= \hbar e_*([\alpha_1, 2], [\beta_1, 1], [\alpha_1, 3], [\alpha_1, 4]]) \\ &+ \hbar\hbar e_*([\alpha_1, 1]][[\alpha_1, 2]]) + 2\hbar\hbar e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]][ ] )\end{aligned}$$

となる。さらに  $(C'')$  を使って、

$$\begin{aligned} &= he_*([\alpha_1, 2], [\beta_1, 1], [\alpha_1, 3], [\alpha_1, 4]) \\ &+ h\hbar e_*([\alpha_1, 1][\alpha_1, 2]) + 2h\hbar e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]) \\ &= he_*([\alpha_1, 2], [\beta_1, 1], [\alpha_1, 3], [\alpha_1, 4]) \\ &+ h\hbar e_*([\alpha_1, 1][\alpha_1, 2]) + 4\rho h\hbar e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]) \end{aligned}$$

いま、 $e_*([\alpha_1, 2], [\beta_1, 1], [\alpha_1, 3], [\alpha_1, 4])$  は 0 なので、

$$\begin{aligned} &e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 5][\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 6]) \\ &= h\hbar e_*([\alpha_1, 1][\alpha_1, 2]) + 4\rho h\hbar e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]) \end{aligned}$$

となる。

最後に、

$$\begin{aligned} &h\hbar e_*([\alpha_1, 1][\alpha_1, 2]) + 4\rho h\hbar e_*([\alpha_1, 1], [\alpha_1, 2]) \\ &= h\hbar e_*(e'_*([(c, 1)][(c, 2)])) + 4\rho h\hbar e_*(e'_*([(c, 1), (c, 2)])) \\ &= h\hbar[(c, 1)][(c, 2)] + 4\rho h\hbar[(c, 1), (c, 2)] \end{aligned}$$

と計算できる。

以上の計算手順から

$$\begin{aligned} &e_*([\alpha_1, 1], [\beta_1, 4], [\alpha_2, 5][\alpha_1, 2], [\alpha_1, 3], [\beta_2, 6]) \\ &= h\hbar[(c, 1)][(c, 2)] + 4\rho h\hbar[(c, 1), (c, 2)] \end{aligned}$$

と計算できた。

## REFERENCES

- [1] W. M. Goldman, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Adv. Math. 54 (1984), no. 2, pp. 200-225.
- [2] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. Math. 85 (1986), pp. 263-302.
- [3] W. B. R. Lickorish, *Polynomials for Links*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), pp. 558-588.
- [4] T. Schedler, *A Hopf algebra quantizing a necklace Lie algebra canonically associated to a quiver*, Int. Math. Res. Not. 2005 (12), pp. 725-760. DOI: 10.1155/IMRN.2005.725.
- [5] S. Tsuji, *A formula for the action of Dehn twists on HOMFLY-PT skein modules and its applications*, preprint (arXiv:1801.00580).
- [6] S. Tsuji, *The total Johnson homomorphism on the homology cylinder and the bracket-quantization HOMFLY-PT skein algebra*, preprint (arXiv:2010.03764).
- [7] V. G. Turaev, *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 24 (1991), no. 6, pp. 635-704.