Lie 群のアファイン表現と左対称代数

東京理科大学理学部第二部　木村　直記
Naoki Kimura
Faculty of Science Division II,
Tokyo University of Science

1　概要

多様体 M 上のアファイン接続 ∇ と Riemann 計量 g の組 (∇, g) は多様体 TM 上の概 Hermite 構造 $(J, \bar{g}, \omega)$ を誘導する．この概 Hermite 構造の構成は Dombrowski 構成と呼ばれている．Shima [13] はこの構成において次のような対応が成り立つことを示した．

定理 1.1 ([13])**.** Dombrowski 構成において以下は同値である．
(1) (∇, g) は多様体 M 上の Hesse 構造
(2) $(J, \bar{g}, \omega)$ は多様体 TM 上の Kähler 構造.

本稿の著者は中村友哉氏（工学院大学）との共同研究において，この対応を二つの意味で一般化した．一つ目の一般化は，多様体 M の計量 g 及び多様体 TM の基本 2-形式 ω の非退化性を落とすことである．定理 1.2 に登場する Koszul-Vinberg 構造と Poisson 構造は，それぞれ Hesse 計量とシンプレクティック構造から非退化性を落としたものとみなせる．多様体 M 上の幾何構造は M 上のベクトル束 TM 上の幾何構造とみなせるが，二つ目の一般化は，幾何構造を考える舞台となるベクトル束を TM から一般化することである．本研究では，左対称亜代数や Lie 亜代数と呼ばれる，微分演算を備えたベクトル束上の幾何構造を考える．

多様体 M 上の左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ に対して，A 上の対称 $(2, 0)$-テンソル場 $h \in \Gamma(S^2 A)$ は，$(A, \cdot_A, \rho_A)$ の延長 Lie 亜代数 $\mathcal{L}A$ 上の 2-ベクトル場 $\Pi \in \Gamma(\Lambda^2 \mathcal{L}A)$ を誘導する．このとき，次の対応が成立することを示した．

定理 1.2 (K.-Nakamura)**.** 以下は同値である．
(1) h は左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上の Koszul-Vinberg 構造
(2) Π は Lie 亜代数 $\mathcal{L}A$ 上の Poisson 構造.

本稿の 2 節以降では，定理 1.1 と定理 1.2 に登場する諸概念について説明する．また，3 節では，左対称代数とアファイン多様体や Lie 群のアファイン表現との関連について簡単に紹介する．

2 Hesse 構造と Kähler 構造の対応

本稿では，M を C^∞-多様体とする．
∇ を M 上のアファイン接続，g を M 上の Riemann 計量とする．

定義 2.1. ∇ の捩率と曲率が共に 0 であるとき，(M,∇) をアファイン多様体という．

定義 2.2. ∇ の捩率が 0，かつ ∇g が対称であるとき，(M,∇,g) を統計多様体という．

∇g が対称という条件を具体的に書き下すと

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z) \quad (X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)) \tag{1}$$

となるが，この式 (1) を Codazzi 方程式という．

定義 2.3. ∇ の曲率が 0 であるような統計多様体 (M,∇,g) を Hesse 多様体という．

別の言い方をすると，Codazzi 方程式 (1) を満たす Riemann 計量 g を備えたアファイン多様体が Hesse 多様体である．Hesse 多様体は双対平坦多様体とも呼ばれる．

多様体 M 上のアファイン接続 ∇ は，$u \in TM$ における TM の接空間 T_uTM の水平部分空間 H_u と垂直部分空間 V_u への分解

$$T_uTM = H_u \oplus V_u$$

を定める．$p: TM \to M$ を自然な射影とすると，$H_u \cong V_u \cong T_{p(u)}M$ である．この分解を用いて，多様体 TM 上の概複素構造 J は次の式で定義される．$X = (X^h, X^v) \in T_uTM = H_u \oplus V_u$ に対して

$$J_u(X^h, X^v) := (-X^v, X^h).$$

さらに，M 上の Riemann 計量 g が与えられたとき，多様体 TM 上の Riemann 計量 $\bar{g}$ と 2-形式 ω を，$X = (X^h, X^v)$, $Y = (Y^h, Y^v) \in T_uTM = H_u \oplus V_u$ に対して

$$\begin{aligned}
\bar{g}_u((X^h,X^v),(Y^h,Y^v)) &:= g_{p(u)}(X^h,Y^h) + g_{p(u)}(X^v,Y^v), \\
\omega_u((X^h,X^v),(Y^h,Y^v)) &:= g_{p(u)}(X^h,Y^v) - g_{p(u)}(X^v,Y^h)
\end{aligned}$$

と定めると，$(J,\bar{g},\omega)$ は概 Hermite 構造になる．

注 2.4. 多様体 TM 上の Riemann 計量 $\bar{g}$ は Sasaki [11] によって導入され，Sasaki 計量と呼ばれる．

このようにして，多様体 M 上のアファイン接続 ∇ と Riemann 計量 g の組 (∇, g) は多様体 TM 上の概 Hermite 構造 $(J,\bar{g},\omega)$ を誘導する．この概 Hermite 構造の構成は Dombrowski 構成と呼ばれている．Dombrowski [6], Shima [13] はこの構成において次のような対応が成り立つことを示した．

定理 2.5 ([6]). Dombrowski 構成において以下が成立.
∇ の捩率と曲率が共に $0 \iff J$ は可積分.

定理 2.6 ([13]). Dombrowski 構成において ∇ の捩率と曲率が共に 0 であるとき
∇g が対称 $\iff d\omega = 0$.

系 2.7 ([13]). Dombrowski 構成において以下は同値である.
(1) (∇, g) は多様体 M 上の Hesse 構造
(2) $(J, \bar{g}, \omega)$ は多様体 TM 上の Kähler 構造.

3 左対称代数

本節では，左対称代数とアファイン多様体や Lie 群のアファイン表現との関連について簡単に紹介する．左対称代数についての詳細は [5] を参照されたい.

定義 3.1. 代数 $(A, \cdot)$ が

$$(x, y, z) = (y, x, z) \quad (x, y, z \in A)$$

を満たすとき，$(A, \cdot)$ を左対称代数という．ただし，$(x, y, z) := (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$.

左対称代数は前 Lie 代数や Koszul-Vinberg 代数とも呼ばれる.

例 1. (1) 結合代数は左対称代数である.
(2) アファイン多様体 (M, ∇) に対して，$\mathfrak{X}(M)$ 上の積 $\cdot$ を

$$X \cdot Y := \nabla_X Y \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

と定義すると，$(\mathfrak{X}(M), \cdot)$ は左対称代数である.
実際，捩率 0 のアファイン接続 ∇ の曲率テンソルを R とすると

$$\begin{aligned}
&(X, Y, Z) - (Y, X, Z) \\
=&(X \cdot Y) \cdot Z - X \cdot (Y \cdot Z) - (Y \cdot X) \cdot Z + Y \cdot (X \cdot Z) \\
=&\nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z + \nabla_Y \nabla_X Z \\
=&-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} Z \\
=&-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\
=&-R(X, Y) Z
\end{aligned}$$

となるから，∇ の捩率が 0 であるとき，
　∇ の曲率が $0 \iff (\mathfrak{X}(M), \cdot)$ が左対称代数
が成り立つ.

　左対称代数 $(A, \cdot)$ に対して，$L_X, R_X \in \mathrm{End}(A)$ $(X \in A)$ をそれぞれ $L_X Y := X \cdot Y$, $R_X Y := Y \cdot X$ $(X, Y \in A)$ で定める.

注 3.2. 左対称代数 $(A, \cdot)$ に対して，A 上の bracket $[\cdot, \cdot]$ を

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x \quad (x, y \in A)$$

で定めると $(A, [\cdot, \cdot])$ は Lie 代数になる．このため，左対称代数は前 Lie 代数とも呼ばれる．

定義 3.3. Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ 上の左対称な積 $\cdot$ が

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき，$\cdot$ を $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ 上の左対称代数構造という．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が左対称代数構造 $\cdot$ を持つとき，

$$\begin{aligned}
&(X, Y, Z) - (Y, X, Z) \\
=&(X \cdot Y) \cdot Z - X \cdot (Y \cdot Z) - (Y \cdot X) \cdot Z + Y \cdot (X \cdot Z) \\
=&L_{L_X Y} Z - L_X L_Y Z - L_{L_Y X} Z + L_Y L_X Z \\
=&- L_X L_Y Z + L_Y L_X Z + L_{L_X Y - L_Y X} Z \\
=&- L_X L_Y Z + L_Y L_X Z + L_{[X,Y]} Z \\
=&(L_{[X,Y]} - [L_X, L_Y]) Z
\end{aligned}$$

となるから，$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, $X \mapsto L_X$ は Lie 代数準同型になる．すなわち，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の左対称代数構造は $\mathfrak{g}$ の表現を与える．

ここで，G を連結かつ単連結な Lie 群とし，G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする．また，アファイン変換群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ とその Lie 代数 $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n)$ は次のような集合であった．

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\},$$

$$\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

定義 3.4. 点 $v \in \mathbb{R}^n$ の固定部分群 G_v が G の離散部分群であり，かつ v の G-軌道が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるような点 $v \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき，G のアファイン表現はエタールであるという．

定義 3.5. 任意の $X \in A$ に対して $R_X \in \mathrm{End}(A)$ が冪零であるとき，左対称代数 $(A, \cdot)$ は完備であるという．

命題 3.6. 以下の同値類の集合の間に自然な 1 対 1 対応がある．
(1) { G のエタールアファイン表現 }
(2) { G 上の捩率と曲率が共に 0 な左不変アファイン接続 }
(3) { $\mathfrak{g}$ 上の左対称代数構造 }

次のような $\mathfrak{g}$ のアファイン表現

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n),\ X \mapsto \begin{pmatrix} L_X & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応する G のアファイン表現はエタールになり，命題 3.6 における (3) から (1) への対応が得られる．

命題 3.7. 以下の同値類の集合の間に自然な 1 対 1 対応がある．
(1) { G の単純推移的なアファイン作用 }
(2) { G 上の捩率と曲率が共に 0 かつ完備な左不変アファイン接続 }
(3) { $\mathfrak{g}$ 上の完備な左対称代数構造 }

注意 3.2 で述べたように，左対称代数の積を交代化することによって Lie 代数が得られる．逆に「どのような Lie 代数が左対称代数構造を持つか？」という問を考えるのは自然である．この問は未解決だが，知られていることをいくつか紹介する．

命題 3.8. 半単純な Lie 代数は左対称代数構造を持たない．

一方で，簡約 Lie 代数にまで広げると，$\mathfrak{gl}(n)$ のように左対称代数構造を持つものもある．また，Milnor [10] は「任意の可解 Lie 代数は左対称代数構造を持つ」と予想し，この予想は正しいと長らく信じられてきたが，Benoist [3] はその予想に対する反例を冪零 Lie 代数で発見した．

定理 3.9 ([3])**.** 11 次元の冪零 Lie 代数で左対称代数構造を持たないものが存在する．

命題 3.10. 以下のいずれかの条件を満たす冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は左対称代数構造を持つ．
(1) $\dim\mathfrak{g} \leq 7$　(2) p-ステップ冪零 ($p \leq 3$) [12]　(3) $\mathbb{N}$-次数付き Lie 代数

4 Poisson 構造と Lie 亜代数

定義 4.1. $2n$ 次元多様体 M 上の非退化閉 2-形式 ω，すなわち，$\omega^n \neq 0$ かつ $d\omega = 0$ を満たす 2-形式 $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ を M 上のシンプレクティック構造といい，(M, ω) をシンプレクティック多様体という．

M 上のベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ には Lie bracket $[\cdot,\cdot]$ が定まっているが，これを M 上の多重ベクトル場の空間，すなわち $\Gamma(\Lambda^* TM)$ にいくつかの条件を満たすように拡張したものを Schouten bracket と呼び，Lie bracket と同じく $[\cdot,\cdot]$ と書く．Schouten bracket は $[\cdot,\cdot] : \Gamma(\Lambda^k TM) \times \Gamma(\Lambda^l TM) \to \Gamma(\Lambda^{k+l-1} TM)$ である．Schouten bracket $[\cdot,\cdot]$ を用いて Poisson 多様体は次のように定義される．

定義 4.2. M 上の 2-ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ が

$$[\pi, \pi] = 0$$

を満たすとき，π を M 上の Poisson 構造といい，(M, π) を Poisson 多様体という．

M 上の 2-形式 $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ と 2-ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ に対して，
$\omega^\flat : TM \to T^*M,\ X \mapsto \omega^\flat(X) := \omega(X, \cdot)$,
$\pi^\sharp : T^*M \to TM,\ \alpha \mapsto \pi^\sharp(\alpha) := \pi(\alpha, \cdot)$
と定めると，
ω が非退化 $\iff$ $\omega^\flat : TM \to T^*M$ が同型射，
π が非退化 $\iff$ $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ が同型射
である．同型射 $-\omega^\flat : TM \to T^*M$ と同型射 $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ が互いに逆写像になるように ω と π をとることによって，M 上の非退化 2-形式 ω と非退化 2-ベクトル場 π は 1 対 1 対応している．また，非退化 2-形式 ω とそれに対応する非退化 2-ベクトル場 π に対して

$$d\omega = 0 \iff [\pi, \pi] = 0$$

が成り立つので，非退化 Poisson 構造とシンプレクティック構造は等価な概念である．従って，Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の一般化である．

定義 4.3. M 上のベクトル束 A の切断の空間 $\Gamma(A)$ に Lie bracket $[\cdot,\cdot]_A$ が定まっており，M 上のバンドル写像 $\rho_A : A \to TM$ があって，任意の $X, Y \in \Gamma(A)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$[X, fY]_A = f[X, Y]_A + (\rho_A(X)f)Y$$

を満たすとき，$(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ を M 上の Lie 亜代数という．また，ρ_A をアンカーと呼ぶ．

例 2. (1) Lie 代数は 1 点上の Lie 亜代数である．(M が 1 点)
(2) M の接束 $(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ は M 上の Lie 亜代数である．ここで，$[\cdot,\cdot]$ は M 上のベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ の通常の Lie bracket．$(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ を標準的な Lie 亜代数と呼ぶ．

Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ に対して，標準的な Lie 亜代数である TM の場合と同じように differential $d_A : \Gamma(\Lambda^k A^*) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} A^*)$ (TM の場合は外微分 d)，Lie 微分 $\mathcal{L}^A_X : \Gamma(\Lambda^k A^*) \to \Gamma(\Lambda^k A^*)$，Schouten bracket $[\cdot,\cdot]_A : \Gamma(\Lambda^k A) \times \Gamma(\Lambda^l A) \to \Gamma(\Lambda^{k+l-1} A)$ が定義される．

定義 4.4. M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ 上の 2-ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 A)$ が

$$[\pi, \pi]_A = 0$$

を満たすとき，π を $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ 上の Poisson 構造という．

多様体 M 上の Poisson 構造は標準的な Lie 亜代数 TM 上の Poisson 構造であるから，Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造は多様体上の Poisson 構造の一般化である．
特に，多様体 M 上のシンプレクティック構造は標準的な Lie 亜代数 TM 上の非退化 Poisson 構造と等価な概念である．

5 Koszul-Vinberg 構造と左対称亜代数

定義 5.1 ([2]). アファイン多様体 (M,∇) 上の対称 $(2,0)$-テンソル場 $h\in\Gamma(S^2TM)$ が，任意の $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega^1(M)$ に対して，

$$(\nabla_{h^\sharp\alpha}h)(\beta,\gamma)=(\nabla_{h^\sharp\beta}h)(\alpha,\gamma)$$

を満たすとき，h を (M,∇) 上の Koszul-Vinberg 構造といい，(M,∇,h) を Koszul-Vinberg 多様体という．

注 5.2. [2] では Koszul-Vinberg 多様体のことを反変擬 Hesse 多様体と呼んでいる．

同型射 $g^\flat:TM\to T^*M$ と同型射 $h^\sharp:T^*M\to TM$ が互いに逆写像になるように g と h をとることによって，M 上の非退化対称 $(0,2)$-テンソル場 (すなわち擬 Riemann 計量) $g\in\Gamma(S^2T^*M)$ と非退化対称 $(2,0)$-テンソル場 $h\in\Gamma(S^2TM)$ は 1 対 1 対応している．また，非退化対称 $(0,2)$-テンソル場 g とそれに対応する非退化対称 $(2,0)$-テンソル場 h に対して

$$\begin{aligned}&(\nabla_Xg)(Y,Z)=(\nabla_Yg)(X,Z)\quad(X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M))\\ \iff&(\nabla_{h^\sharp\alpha}h)(\beta,\gamma)=(\nabla_{h^\sharp\beta}h)(\alpha,\gamma)\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\Omega^1(M))\end{aligned}$$

が成り立つので，非退化 Koszul-Vinberg 構造と (擬)Hesse 構造は等価な概念である．従って，Koszul-Vinberg 多様体は (擬)Hesse 多様体の一般化である．

定義 5.3 ([4]). M 上のベクトル束 A の切断の空間 $\Gamma(A)$ に左対称な積 $\cdot_A$ が定まっており，M 上のバンドル写像 $\rho_A:A\to TM$ があって，任意の $X,Y\in\Gamma(A)$ と $f\in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned}&X\cdot_A(fY)=f(X\cdot_AY)+(\rho_A(X)f)Y,\\&(fX)\cdot_AY=f(X\cdot_AY)\end{aligned}$$

を満たすとき，$(A,\cdot_A,\rho_A)$ を M 上の左対称亜代数という．また，ρ_A をアンカーと呼ぶ．

注 5.4. [4] では左対称亜代数のことを Koszul-Vinberg 亜代数と呼んでいる．左対称亜代数という用語は [9] において初めて用いられた．

注 5.5. 左対称亜代数 $(A,\cdot_A,\rho_A)$ に対して，$\Gamma(A)$ 上の bracket $[\cdot,\cdot]_A$ を

$$[X,Y]_A=X\cdot_AY-Y\cdot_AX\quad(X,Y\in\Gamma(A))$$

で定めると $(A,[\cdot,\cdot]_A,\rho_A)$ は Lie 亜代数になる．$(A,[\cdot,\cdot]_A,\rho_A)$ を左対称亜代数 $(A,\cdot_A,\rho_A)$ の隣接 Lie 亜代数と呼ぶ．

例 3. アファイン多様体 (M, ∇) に対して，$TM_\nabla := (TM, \nabla, \mathrm{id}_{TM})$ は M 上の左対称亜代数である．TM_∇ の隣接 Lie 亜代数は標準的な Lie 亜代数 $(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ である．

Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ において，$\Gamma(\Lambda^* A)$ 上に Schouten bracket と呼ばれる演算 $[\cdot,\cdot]_A$ が定義されており，この Schouten bracket $[\cdot,\cdot]_A$ を用いて Lie 亜代数上の Poisson 構造は定義された．左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ に対しても，$\Gamma(\Lambda^* A \otimes A)$ 上に Schouten bracket に類似の演算 $[\![\cdot,\cdot]\!]_A : \Gamma(\Lambda^k A \otimes A) \times \Gamma(\Lambda^l A \otimes A) \to \Gamma(\Lambda^{k+l} A \otimes A)$ が定義されており [7] [8]，この bracket $[\![\cdot,\cdot]\!]_A$ を用いて左対称亜代数上の Koszul-Vinberg 構造を定義する．

定義 5.6. M 上の左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上の対称 $(2,0)$-テンソル場 $h \in \Gamma(S^2 A)$ が

$$[\![h, h]\!]_A = 0$$

を満たすとき，h を $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上の Koszul-Vinberg 構造という．

アファイン多様体 (M, ∇) から定まる左対称亜代数 TM_∇ と $h \in \Gamma(S^2 TM)$ に対して，

$$[\![h, h]\!]_{TM_\nabla} = 0 \iff (\nabla_{h^\sharp \alpha} h)(\beta, \gamma) = (\nabla_{h^\sharp \beta} h)(\alpha, \gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M))$$

が成り立つ [8] ので，アファイン多様体 (M, ∇) 上の Koszul-Vinberg 構造は左対称亜代数 TM_∇ 上の Koszul-Vinberg 構造である．従って，左対称亜代数 A 上の Koszul-Vinberg 構造はアファイン多様体上の Koszul-Vinberg 構造の一般化である．
特に，アファイン多様体 (M, ∇) 上の (擬)Hesse 計量は左対称亜代数 TM_∇ 上の非退化 Koszul-Vinberg 構造と等価な概念である．

6 Koszul-Vinberg 構造と Poisson 構造の対応

M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ に対して，A は M 上のベクトル束であるから，TA は TM 上のベクトル束である．M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ の延長 $\mathcal{L}A$ は A 上のベクトル束であり，その全空間は，ベクトル束 $TA \to TM$ のアンカー $\rho_A : A \to TM$ による引き戻し $\rho_A^* TA$ の全空間に一致する．ただし，ベクトル束 $\mathcal{L}A$ の射影はベクトル束 $\rho_A^* TA$ の射影とは異なる．Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ の延長 $\mathcal{L}A$ 上にも自然に Lie 亜代数の構造が定まる．また，M 上の左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ の延長 $\mathcal{L}A$ を，$(A, \cdot_A, \rho_A)$ の隣接 Lie 亜代数の延長と定義する．

例 4. 標準的な Lie 亜代数 $(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ の延長 $\mathcal{L}TM$ は，TM 上のベクトル束 TTM である．アファイン多様体 (M, ∇) から定まる左対称亜代数 TM_∇ について，TM_∇ の隣接 Lie 亜代数は標準的な Lie 亜代数 $(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ であるから，TM_∇ の延長もベクトル束 TTM である．

M 上の左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ は，その隣接 Lie 亜代数上の捩率と曲率が共に 0 であるようなアファイン接続 ∇^A を定める（例 1 (2) 参照）．このアファイン接続 ∇^A は，左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ の延長 $\mathcal{L}A$ に対して，$\Gamma(\mathcal{L}A)$ 及び $\Gamma((\mathcal{L}A)^*)$ の水平方向と垂直方向への分解

$$\Gamma(\mathcal{L}A) = H(\mathcal{L}A) \oplus V(\mathcal{L}A), \quad \Gamma((\mathcal{L}A)^*) = H((\mathcal{L}A)^*) \oplus V((\mathcal{L}A)^*)$$

を定める．$H(\mathcal{L}A) \cong V(\mathcal{L}A) \cong \Gamma(A)$，$H((\mathcal{L}A)^*) \cong V((\mathcal{L}A)^*) \cong \Gamma(A^*)$ である．A 上の対称 $(2,0)$-テンソル場 $h \in \Gamma(S^2A)$ が与えられたとき，$\mathcal{L}A$ 上の 2-ベクトル場 $\Pi \in \Gamma(\Lambda^2\mathcal{L}A)$ を，$\alpha = (\alpha^h, \alpha^v)$，$\beta = (\beta^h, \beta^v) \in \Gamma((\mathcal{L}A)^*) = H((\mathcal{L}A)^*) \oplus V((\mathcal{L}A)^*)$ に対して

$$\Pi((\alpha^h, \alpha^v), (\beta^h, \beta^v)) := -h(\alpha^h, \beta^v) + h(\alpha^v, \beta^h)$$

と定める．このようにして，M 上の左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上に対称 $(2,0)$-テンソル場 $h \in \Gamma(S^2A)$ が与えられると，$(A, \cdot_A, \rho_A)$ の延長 Lie 亜代数 $\mathcal{L}A$ 上の 2-ベクトル場 $\Pi \in \Gamma(\Lambda^2\mathcal{L}A)$ が定まる．

ここで，2 節の内容を簡単に振り返っておく．アファイン多様体 (M, ∇) 上に Riemann 計量 $g \in \Gamma(S^2T^*M)$ が与えられたとき，多様体 TM 上に Hermite 構造 $(J, \bar{g}, \omega)$ が定まった．この Hermite 構造の構成を Dombrowski 構成と呼んだ．Shima [13] はこの構成において次のような対応が成り立つことを示した．(定理 2.6 の再掲)

定理 6.1 ([13])**.** アファイン多様体 (M, ∇) に対する Dombrowski 構成において以下は同値である．
(1) g はアファイン多様体 (M, ∇) 上の Hesse 計量
(2) ω は多様体 TM 上のシンプレクティック構造.

本稿の著者は中村友哉氏（工学院大学）との共同研究において，この対応を以下のように一般化した.

多様体 M 上の左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上に対称 $(2,0)$-テンソル場 $h \in \Gamma(S^2A)$ が与えられたとき，$(A, \cdot_A, \rho_A)$ の延長 Lie 亜代数 $\mathcal{L}A$ 上の 2-ベクトル場 $\Pi \in \Gamma(\Lambda^2\mathcal{L}A)$ が定まる．このとき，次の対応が成立する．

定理 6.2 (K.-Nakamura)**.** 以下は同値である．
(1) h は左対称亜代数 $(A, \cdot_A, \rho_A)$ 上の Koszul-Vinberg 構造
(2) Π は Lie 亜代数 $\mathcal{L}A$ 上の Poisson 構造.

注 6.3. アファイン多様体 (M, ∇) 上の Koszul-Vinberg 構造 h と多様体 TM 上の Poisson 構造 Π の対応は Abouqateb-Boucetta-Bourzik [1] により既に示されている．

参考文献

[1] A. Abouqateb, M. Boucetta and C. Bourzik, *Contravariant pseudo-Hessian manifolds and their associated Poisson structures*, Differential Geom. Appl. **70** (2020), 101630, 26 pp.

[2] S. Benayadi and M. Boucetta, *On para-Kähler Lie algebroids and contravariant pseudo-Hessian structures*, Math. Nachr. **292** (2019), no. 7, 1418–1443.

[3] Y. Benoist, *Une nilvariété non affine*, J. Differential Geom. **41** (1995), no. 1, 21–52.

[4] M. Nguiffo Boyom, *Cohomology of Koszul-Vinberg algebroids and Poisson manifolds. I*, Lie algebroids and related topics in differential geometry. Banach Center Publ., **54** (2001), 99–110.

[5] D. Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), no. 3, 323–357.

[6] P. Dombrowski, *On the geometry of the tangent bundle*, J. Reine Angew. Math. **210** (1962), 73–88.

[7] M. Liu, J. Liu and Y. Sheng, *Deformations and cohomologies of relative Rota-Baxter operators on Lie algebroids and Koszul-Vinberg structures*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **18** (2022), Paper No. 054, 26 pp.

[8] J. Liu, Y. Sheng and C.Bai, *Left-symmetric bialgebroids and their corresponding Manin triples*, Differential Geom. Appl. **59** (2018), 91–111.

[9] J. Liu, Y. Sheng, C.Bai and Z. Chen, *Left-symmetric algebroids*, Math. Nachr. **289** (2016), no.14–15, 1893–1908.

[10] J. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Advances in Math. **25** (1977), no. 2, 178–187.

[11] S. Sasaki, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **10** (1958), 338–354.

[12] J. Scheuneman, *Affine structures on three-step nilpotent Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974), 451–454.

[13] H. Shima, *Homogeneous Hessian manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30** (1980), no. 3, 91–128.

Faculty of Science Division II
Tokyo University of Science
Tokyo 162-8601
JAPAN
E-mail address: n-kimura@rs.tus.ac.jp