シンプレクティックトーリック多様体の同変な超曲面に関する Delzant 型定理

京都大学数理解析研究所 山口 健太朗
Kentaro Yamaguchi
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

1　導入

本稿は RIMS 共同研究「変換群論の新しい展開」での [7] に基づいた講演内容に沿ったものである．

コンパクトな $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体には n 次元トーラスが Hamilton 作用していて，その Hamilton 作用についての運動量写像の像（運動量多面体）は Delzant 多面体とよばれる凸多面体になる．一方で，与えられた Delzant 多面体を運動量多面体にもつコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体をシンプレクティック商により構成できる．この構成は Delzant 構成とよばれる．このようにして次のような 1 対 1 対応があることがわかる．

定理 1.1 ([2])**.** コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体全体と Delzant 多面体全体との間には 1 対 1 対応がある．

$$\{\text{コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体}\}/\sim \;\xleftrightarrow{1:1}\; \{\text{Delzant 多面体}\}/\sim$$

本稿ではこの対応関係のことを Delzant 対応とよぶ．

Delzant 対応を起点に，シンプレクティックトーリック幾何学におけるさまざまな対象を凸多面体の言葉で特徴づけようという研究が数多くある．たとえば，Delzant 構成によりコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体は Kähler 多様体になることがわか

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

るが，このとき誘導される Kähler 計量の Kähler ポテンシャルの表示を Guillemin [4] は対応する Delzant 多面体の情報から与えている．また，Lerman–Torman [5] はラベル付き多面体を導入し，コンパクトなシンプレクティックトーリック軌道体全体とラベル付き多面体全体との間の 1 対 1 対応を示した．さらに，ラベル付き多面体の情報から対応するシンプレクティックトーリック軌道体の特異点の情報を読み取ることができる．

[8] ではシンプレクティックトーリック多様体 M の部分トーラス軌道の閉包 $\overline{C(V)}$ を調べ，$\overline{C(V)}$ が M の非特異な複素部分多様体になるときの運動量多面体を決定した．ここでは，Delzant 対応の類似の結果として，部分トーラスが余次元 1 のときに $\overline{C(V)}$ が M の非特異な複素部分多様体となる必要十分条件を凸多面体の言葉で特徴づける．

2 双対トーラス束

ここでは，[8, 7] の背景にある問題意識を述べる．

代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ に対して，写像 $\pi : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathfrak{t}^n$ を

$$\pi(w_1, \ldots, w_n) := (\log|w_1|, \ldots, \log|w_n|)$$

と定める．$(\mathbb{C}^*)^n \cong \mathfrak{t}^n \times T^n$ の同一視のもとで，写像 π はトーラス束であることがわかる．一方で，$(T^n)^*$ をトーラス T^n の双対トーラスとすると射影 $\pi^\vee : \mathfrak{t}^n \times (T^n)^* \to \mathfrak{t}^n$ はトーラス束 π に対する双対トーラス束になっている．つまり以下のような図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^*)^n \cong \mathfrak{t}^n \times T^n \arrow[dr, "\pi"] & & \mathfrak{t}^n \times (T^n)^* \arrow[dl, "\pi^\vee"'] \\
& \mathfrak{t}^n &
\end{tikzcd}$$

上の状況のもとで，$(\mathbb{C}^*)^n$ の複素幾何学的な対象と，$\mathfrak{t}^n \times (T^n)^*$ のシンプレクティック幾何学的な対象を比較したい．その指針として Leung–Yau–Zaslow [6] によるいくつかの提案やそれらに基づき拡張した Yamamoto [9] による構成がある．ここで注目したいのは $(\mathbb{C}^*)^n$ の複素部分多様体と $\mathfrak{t}^n \times (T^n)^*$ の Lagrange 部分多様体が対応しているという提案である．

具体的には，$\mathfrak{t}^n$ の有理的な傾きをもつアフィン部分空間 V に対して，V の接ベクトル束 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ と余法束 $L(V) \subset \mathfrak{t}^n \times (T^n)^*$ を比較する．

注意 2.1. いま上で述べた図式や対応関係は Yamamoto [9] による構成の特別な場合になっている．[9] では，より一般に底空間がトロピカルアフィン構造をもつ双対トーラス束の構造を考えている．さらに，複素幾何学的な対象として複素部分多様体とその上の複

素直線束の組を，シンプレクティック幾何学的な対象として余法束を Hamilton 変形したものを考え，それらの対応関係について考察している．

上で述べたことをもとに，今回の設定について述べる．

まず，シンプレクティックトーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間は $(\mathbb{C}^*)^n$ と同一視できることに注目する．$M \setminus D \cong (\mathbb{C}^*)^n$ の同一視のもとで，$(\mathbb{C}^*)^n$ の複素部分多様体 $C(V)$ を $M \setminus D$ に埋め込み M の中でコンパクト化したもの（閉包をとったもの）を $\overline{C(V)}$ と定義する．つまり以下のような図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
M & \supset & M \setminus D & \cong & (\mathbb{C}^*)^n \arrow[dddrr, "\pi"] & & & \mathfrak{t}^n \times (T^n)^* \arrow[dddl, "\pi^\vee"'] \\
\cup & & & & \cup & & & \cup \\
\overline{C(V)} & & \supset & & C(V) & & & L(V) \\
& & & & V & \subset & \mathfrak{t}^n &
\end{tikzcd}
$$

上の状況のもとで，$\overline{C(V)}$ と $L(V)$ を比較したいが，アフィン部分空間 V の傾きによって $\overline{C(V)}$ に特異点が現れることがある．そこで，まずは $\overline{C(V)}$ に特異点が現れない条件をシンプレクティックトーリック幾何学における Delzant 対応をもとに調べる．

3　複素部分多様体 $\overline{C(V)}$

3.1　シンプレクティックトーリック多様体

まずはシンプレクティックトーリック多様体について復習する．

$2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) に，n 次元トーラス T^n が効果的に Hamilton 作用しているとき，(M, ω) をシンプレクティックトーリック多様体とよぶ．コンパクトな $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体 M への n 次元トーラスの Hamilton 作用についての運動量写像 $\mu : M \to (\mathfrak{t}^n)^*$ の像（運動量多面体）には次のような特徴づけがある．

定義 3.1. 次の 3 つの条件を満たす凸多面体 $\Delta \subset (\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ を Delzant 多面体とよぶ．

- 単純であること．つまり，Δ の各頂点から n 本の辺が出ていること，
- 有理的であること．つまり，Δ の各頂点から出る n 本の辺の方向ベクトル $v_1, \ldots, v_n$ を $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}^n$ を満たすように選ぶことができること，

- 滑らかであること．つまり，上の条件にある $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底になるように選ぶことができること．

たとえば，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に Fubini–Study 計量から定まるシンプレクティック形式 ω_{FS} を入れた場合，n 次元トーラスの Hamilton 作用についての運動量多面体は標準 n 単体である．

定理 1.1で紹介した Delzant 対応により，シンプレクティックトーリック多様体は凸多面体の言葉で特徴づけられていると考えられる．また，Delzant 多面体 Δ の頂点ごとに出ている n 本の辺の方向ベクトルの情報から，Δ に対応するシンプレクティックトーリック多様体 M の複素座標近傍系を構成することができる．$M = \mathbb{C}P^n$ のとき，この複素座標近傍系は非斉次座標近傍系に一致するので，一般のシンプレクティックトーリック多様体のときもこのようにして構成できる複素座標近傍系のことを非斉次座標近傍系とよぶことにする．

本稿ではコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体の複素部分多様体について扱うので，以後コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体のことを単にトーリック多様体とよぶことにする．

3.2　複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ の構成

次に [8] における $\overline{C(V)}$ の構成を簡単に紹介する．

$V \subset \mathfrak{t}^n$ を $n-1$ 次元アフィン部分空間，$\overline{V}$ をその線形部分とする．アフィン部分空間 V の傾きが有理的であることを仮定すると，$\overline{V} \cap \mathbb{Z}^n$ が階数 $n-1$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群になるので，$p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ を $\overline{V} \cap \mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底になるように選ぶことができる．このようにして選んできた $p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ を用いて単射群準同型 $i_V : T^{n-1} \to T^n$ を

$$i_V(t_1, \ldots, t_{n-1}) := \left(\prod_{l=1}^{n-1} t_l^{\langle p_l, e_1^* \rangle}, \ldots, \prod_{l=1}^{n-1} t_l^{\langle p_l, e_n^* \rangle} \right)$$

で定義する．ここで，$e_1^*, \ldots, e_n^*$ は $(\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ の標準基底，$\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．

定義 3.2. 有理的な傾きをもつ $n-1$ 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ に対し，代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の複素部分多様体 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ を

$$C(V) := \left\{ (e^{x_1 + \sqrt{-1} y_1}, \ldots, e^{x_n + \sqrt{-1} y_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n \;\middle|\; \begin{array}{l} (x_1, \ldots, x_n) \in V, \\ (e^{\sqrt{-1} y_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1} y_n}) \in i_V(T^{n-1}) \end{array} \right\}$$

と定義する．

定義 3.3. トーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間 $M \setminus D$ と $(\mathbb{C}^*)^n$ との同一視のもとで，複素部分多様体 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ を $M \setminus D$ に埋め込み M の中でコンパクト化したものを $\overline{C(V)} \subset M$ と定義[*1]する．

このコンパクト化の操作は具体的に記述することができ，$\overline{C(V)}$ は M の非斉次座標近傍系ごとに多項式の零点集合として書くことができる．多項式の詳細は [8, 7] を参照のこと．$\overline{C(V)}$ を定義する多項式の具体例を観察すると次のことがわかる．

注意 3.4. $\overline{C(V)}$ は $\overline{C(V)} \cap D$ 上の点で特異点をもつ場合がある．

標準的に定まる T^{n-1} の $\overline{C(V)}$ への作用と写像 i_V を通じて定まる T^{n-1} のトーリック多様体 M への作用について, 包含写像 $i : \overline{C(V)} \to M$ は同変である．さらに, $\overline{C(V)} \subset M$ が特異点をもたない複素部分多様体になるとき，M 上のシンプレクティック形式 ω から誘導されるシンプレクティック形式 $i^*\omega$ が $\overline{C(V)}$ 上に定まり，T^{n-1} の $\overline{C(V)}$ への作用はシンプレクティック多様体 $(\overline{C(V)}, i^*\omega)$ に関して Hamilton 作用になることがわかる．

[8] では $\overline{C(V)} \subset M$ が特異点をもたない複素部分多様体になるとき，T^{n-1} の $\overline{C(V)}$ への Hamilton 作用についての運動量写像 $\overline{\mu} : \overline{C(V)} \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ について次のことを示した．

定理 3.5 ([8])**.** $\overline{C(V)} \subset M$ が特異点をもたない複素部分多様体になるとき，

$$\overline{\mu}(\overline{C(V)}) = (i_V^* \circ \mu)(M) = i_V^*(\Delta)$$

が成り立つ．

実はいま考えている T^{n-1} の $\overline{C(V)}$ への作用は効果的なので，$\overline{C(V)}$ が特異点をもたない複素部分多様体になるときトーリック多様体になることがわかる．このことと Delzant 対応を踏まえると次のこともわかる．

系 3.6. $\overline{C(V)} \subset M$ が特異点をもたない複素部分多様体になるとき，凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ は Delzant 多面体である．

4 $\overline{C(V)}$ の例

ここでは，複素射影空間の中で $\overline{C(V)}$ の例をいくつか挙げる．

[*1] $M \setminus D \cong (\mathbb{C}^*)^n$ のことを $(\mathbb{C}^*)^n$ の M への作用の稠密な軌道と思うと，$\overline{C(V)}$ は写像 i_V から誘導される部分トーラス $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ の M への作用の軌道 $C(V)$ の閉包と考えることもできる．

$\overline{C(V)}$ の様子を具体的に記述するために，まず複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ の T^n の Hamilton 作用についての運動量写像 $\mu : \mathbb{C}P^n \to (\mathfrak{t}^n)^*$ について述べる．T^n の $\mathbb{C}P^n$ への右作用を斉次座標を用いて

$$([z_0 : \cdots : z_n], (t_1, \ldots, t_n)) \mapsto [z_0 : t_1 z_1 : \cdots : t_n z_n]$$

で定める．この作用は写像 $\mu : \mathbb{C}P^n \to (\mathfrak{t}^n)^*$ は

$$\mu([z_0 : \cdots : z_n]) = \left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}, \ldots, \frac{|z_n|^2}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} \right)$$

を運動量写像とする Hamilton 作用である．凸性定理 [1, 3] より運動量多面体 $\mu(\mathbb{C}P^n)$ は T^n の $\mathbb{C}P^n$ への作用の固定点の μ による像の凸包に一致することが知られている．T^n の $\mathbb{C}P^n$ への作用の固定点は

$$[1 : 0 : \cdots : 0], [0 : 1 : 0 : \cdots : 0], \ldots, [0 : \cdots : 0 : 1]$$

の $n+1$ 点．よって，$\mu(\mathbb{C}P^n)$ は

$$\begin{aligned}
&\mu([1 : 0 : \cdots : 0]) = (0, \ldots, 0), \\
&\mu([0 : 1 : 0 : \cdots : 0]) = (1, 0, \ldots, 0), \\
&\vdots \\
&\mu([0 : \cdots : 0 : 1]) = (0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}$$

の凸包．つまり，$\mu(\mathbb{C}P^n)$ は標準 n 単体.

例 4.1. $V \subset \mathfrak{t}^2$ を傾き 1 の 1 次元部分空間としたとき，$\mathbb{C}P^2$ の中で $\overline{C(V)}$ は

$$\overline{C(V)} = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid z_1 - z_2 = 0\}$$

と表すことができる．このとき，$\overline{C(V)}$ は $\mathbb{C}P^2$ の特異点のない複素部分多様体になっている．

例 4.2. $V \subset \mathfrak{t}^2$ を傾き 2 の 1 次元部分空間としたとき，$\mathbb{C}P^2$ の中で $\overline{C(V)}$ は

$$\overline{C(V)} = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid (z_1)^2 - z_0 z_2 = 0\}$$

と表すことができる．このとき，$\overline{C(V)}$ は $\mathbb{C}P^2$ の特異点のない複素部分多様体になっている．

例 4.3. $V \subset \mathfrak{t}^2$ を傾き 3 の 1 次元部分空間としたとき，$\mathbb{C}P^2$ の中で $\overline{C(V)}$ は

$$\overline{C(V)} = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid (z_1)^3 - (z_0)^2 z_2 = 0\}$$

と表すことができる．このとき，$\overline{C(V)}$ の点 $[0 : 0 : 1]$ は特異点である．

例 4.4. $V \subset \mathfrak{t}^4$ を次のベクトルを基底とする 3 次元部分空間とする．

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

このとき，$\mathbb{C}P^4$ の中で $\overline{C(V)}$ は

$$\overline{C(V)} = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in \mathbb{C}P^4 \mid z_1 z_3 - z_2 z_4 = 0\}$$

と表すことができる．このとき，$\overline{C(V)}$ の点 $[1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ は特異点である．

5 $\overline{C(V)}$ の Delzant 対応

前節で見たように $\overline{C(V)}$ はトーリック多様体 M の中で一般に特異点をもつが，特異点をもたない複素部分多様体になるとき $\overline{C(V)}$ もまたトーリック多様体になっている．そこで，$\overline{C(V)}$ に Delzant 対応する凸多面体について考えたい．

5.1 観察

Delzant 対応によると，トーリック多様体の運動量多面体によってトーリック多様体は特徴づけられるであろうという指針がある．定理 3.5によりその運動量多面体は $i_V^*(\Delta)$ になることがわかっているので，凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の情報で複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ を特徴づけることを考える．

Delzant 対応と同様に，$\overline{C(V)}$ が特異点をもたない複素部分多様体になるための必要十分条件として凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ が Delzant 多面体であることが考えられるが，実は Delzant 多面体という情報だけでは不十分である．なぜなら，Δ が直角二等辺三角形のときどの 1 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^2$ に対しても凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ は $(\mathfrak{t}^1)^* \cong \mathbb{R}^1$ の線分，つまり $\mathbb{C}P^1$ に対応する Delzant 多面体になるが，例 4.3で見たように $V \subset \mathfrak{t}^2$ を傾き 3 の 1 次元部分空間としたとき，$\mathbb{C}P^2$ の中で $\overline{C(V)}$ は特異点をもっている．

このようなことから，凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ が Delzant 多面体であることの他に別の情報を考える必要がある．Lerman–Torman [5] によるトーリック軌道体への Delzant 対応の拡張を参考に，特異点をもたない複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ の凸多面体による特徴づけを与える．

5.2 主結果

[7] における主結果を紹介するために，言葉の準備をする．

定義 5.1. 引き戻し $i_V^* : (\mathfrak{t}^n)^* \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に対して，Delzant 多面体 Δ の頂点 λ が次の 2 つの条件を満たすとき λ を i_V^* に対して good という．

- 点 $i_V^*(\lambda)$ が凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の頂点になること，
- ベクトル $i_V^*(v_1), \ldots, i_V^*(v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ がすべて零ベクトルではないこと．

ここで，$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}^n$ は頂点 λ から出る辺の方向ベクトルのこと．

定義 5.2. 引き戻し $i_V^* : (\mathfrak{t}^n)^* \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に対して，Delzant 多面体 Δ の任意の good な頂点 λ が次の 2 つの条件を満たすとき Δ を i_V^* に対して good という．

- 凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の頂点 $i_V^*(\lambda)$ から $n-1$ 本の辺が出ていること，
- ある $j \in \{1, \ldots, n\}$ が存在して，頂点 $i_V^*(\lambda)$ から出る辺の方向ベクトル $i_V^*(v_1), \ldots, i_V^*(v_{j-1}), i_V^*(v_{j+1}), \ldots, i_V^*(v_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ が $\mathbb{Z}^{n-1}$ の $\mathbb{Z}$ 基底になること．

定理 5.3 ([7])**.** Δ をトーリック多様体 M に対応する Delzant 多面体と，$V \subset \mathfrak{t}^n$ を $n-1$ 次元アフィン部分空間とする．このとき，次は同値．

- $\overline{C(V)}$ がトーリック多様体 M の特異点をもたない複素部分多様体になること．
- Delzant 多面体 Δ が引き戻し $i_V^* : (\mathfrak{t}^n)^* \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に対して good になること．

5.3 例

定理 5.3をもとに例 4.1，例 4.2，例 4.3，例 4.4の結果を凸多面体の言葉で捉え直す．$\Delta_n \subset (\mathfrak{t}^n)^*$ を標準 n 単体とし，Δ_n の頂点を $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ と決めておく．

例 5.4. $V \subset \mathfrak{t}^2$ を傾き 1 の 1 次元部分空間としたとき，Δ_2 は引き戻し i_V^* に対して good である．よって，定理 5.3より $\overline{C(V)}$ は $\mathbb{C}P^2$ の特異点のない複素部分多様体である．

例 5.5. $V \subset \mathfrak{t}^2$ を傾き 2 の 1 次元部分空間としたとき，Δ_2 は引き戻し i_V^* に対して good である．よって，定理 5.3より $\overline{C(V)}$ は $\mathbb{C}P^2$ の特異点のない複素部分多様体である．

例 5.6. $V \subset \mathfrak{t}^2$ を傾き 3 の 1 次元部分空間とする．引き戻し i_V^* に対して good な Δ_2 の頂点 $(0,1)$ が定義 5.2の 2 番目の条件を満たさないため，Δ_2 は引き戻し i_V^* に対して good ではない．よって，定理 5.3より $\mathbb{C}P^2$ の中で $\overline{C(V)}$ は特異点をもつ．

例 5.7. $V \subset \mathfrak{t}^4$ を次のベクトルを基底とする 3 次元部分空間とする．

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

引き戻し i_V^* に対して good な Δ_4 の頂点 $(0,0,0,0)$ が定義 5.2の 1 番目の条件を満たさないため，Δ_4 は引き戻し i_V^* に対して good ではない．よって，定理 5.3より $\mathbb{C}P^4$ の中で $\overline{C(V)}$ は特異点をもつ．

6　今後の課題

1. k 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ に対して，定理 5.3を一般化する．
2. 特異点をもつ $\overline{C(V)}$ に対して，その特異点の情報を凸多面体の言葉で特徴づける．
3. 双対トーラス束の設定のもとで，$\overline{C(V)}$ の特異点の有無を Lagrange 部分多様体 $L(V)$ の言葉で特徴づける．

参考文献

[1] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1):1–15, 1982.

[2] Thomas Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3):315–339, 1988.

[3] V. Guillemin and S. Sternberg. Convexity properties of the moment mapping. *Invent. Math.*, 67(3):491–513, 1982.

[4] Victor Guillemin. Kaehler structures on toric varieties. *J. Differential Geom.*, 40(2):285–309, 1994.

[5] Eugene Lerman and Susan Tolman. Hamiltonian torus actions on symplectic orbifolds and toric varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(10):4201–4230, 1997.

[6] Naichung Conan Leung, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow. From special Lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 4(6):1319–1341, 2000.

[7] Kentaro Yamaguchi. Delzant type theorem for torus-equivariantly embedded toric hypersurfaces. arXiv:2411.06715.

[8] Kentaro Yamaguchi. Torus-equivariantly embedded toric manifolds associated to affine subspaces. *Osaka J. Math.*, 62(3):477–505, 2025.

[9] Hikaru Yamamoto. Special Lagrangian and deformed Hermitian Yang-Mills on tropical manifold. *Math. Z.*, 290(3-4):1023–1040, 2018.