閉リーマン面上の SU(2) 平坦接続のモジュライ空間の幾何学的量子化に現れるオペラッド構造 *

和歌山工業高等専門学校　高橋 雄也
Yuya Takahashi
National Institute of Tachnology,
Wakayama College

1　導入

幾何学的量子化とはシンプレクティック幾何学の言葉で量子化を定式化する数学的な試みの一つであり，まずシンプレクティック多様体 (M,ω) に対して，量子ヒルベルト空間と呼ばれる, ある種のベクトル空間 $\mathscr{H}$ を構成することが最初のステップになる．これを実行するためにはシンプレクティック形式 ω の定めるコホモロジー類 $[\omega]$ が整数係数でなければならず（このような (M,ω) を整シンプレクティック多様体という），このとき前量子化束と呼ばれる，第一 Chern 類が $[\omega]$ と一致する M 上の複素直線束 L をとることができる．前述の量子ヒルベルト空間は，大まかには，この前量子化束 L の切断全体の空間を偏極 $\mathcal{P}$ という $TM \otimes \mathbb{C}$ のある可積分な Lagrange 部分束で「半分に割った」空間 $\mathscr{H}_{\mathcal{P}}$ として構成される．

$$(M,\omega) + \mathcal{P} \quad \rightsquigarrow \quad \mathscr{H}_{\mathcal{P}} \text{：量子ヒルベルト空間}$$

このように量子ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_{\mathcal{P}}$ は構成の仕方から偏極 $\mathcal{P}$ の取り方に依っているが，物理学の観点から「量子ヒルベルト空間は同型を除いて一意である」ことが期待されている．

偏極の中でも，特に ω と整合的な M の複素構造 J から定まる**ケーラー偏極** $\mathcal{P}_J$ と，完全可積分系 $\pi : (M,\omega) \to \mathbb{R}^n$ から定まる**実偏極** $\mathcal{P}_\pi$ という二つのタイプが知られている．（ここで $\dim M = 2n$ としている．）ケーラー偏極・実偏極から定まる量子ヒルベルト空間をそれぞれ $\mathscr{H}_{\text{Käh}} := \mathscr{H}_{\mathcal{P}_J}$ および $\mathscr{H}_{\text{re}} := \mathscr{H}_{\mathcal{P}_\pi}$ で表すことにすると，先程の物理学の期待から特に

$$\dim \mathscr{H}_{\text{Käh}} = \dim \mathscr{H}_{\text{re}} \tag{1.1}$$

の成立が示唆される．そして実際この等式はケーラー偏極・実偏極を備えたいろいろな整シンプレクティック多様体の例に対して，様々な人々によって数学的な証明が与えられている．例えば非特異 Lagrange ファイバー束やトーリック多様体をはじめ，Gelfand-Cetlin 系を備えた複素旗多様体, Goldman 系を備えた閉リーマン面上の SU(2) 平坦接続のモジュライ空間，bending 系を備えた空間多角形のモジュライ空間といった「トーリックに近い」多様体などで，1990 年前後は両辺の値を別々に計算して比較するといった証明が多くなされてきた [1, 4, 9, 12, 13, 14]．さらに近年では値の一致の背後にある数学的構造の解明への取り組みが活発になっている [3, 5, 6, 10, 11, 19]．「トーリックに近い」多様体の場合は等式 (1.1) は

$$L \text{ の正則切断の空間の次元} = \text{完全可積分系 } \pi \text{ の像に含まれる格子点の個数} \tag{1.2}$$

として書き表され，発表者は以前に空間多角形のモジュライ空間の場合で，ケーラー偏極・実偏極それぞれにある**オペラッドの射**を付随させ，等式 (1.2) をこれらの射の対応関係からの帰結と捉えることで先行研究 [14] の一般化を得た [19]．今回は閉リーマン面上の SU(2) 平坦接続のモジュラ

* 本研究は科研費（課題番号：22K20334）の助成および日本数学会奨励研究生制度の支援を受けたものである．

イ空間の場合において，モジュラーオペラッドと呼ばれる「種数をもったオペラッド」を考えることによって，等式 (1.2) の背後にオペラッド構造が見出せることを報告する．

以降はレベルと呼ばれる $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定し，等式 (1.2) の左辺の量を A, 右辺の量を B とおく．Riem, Pants をそれぞれ，点付き閉リーマン面のなすモジュラーオペラッド，パンツ分解を備えた点付き閉リーマン面のなすモジュラーオペラッドとし, V_k を点の重みの集合上の整数値関数のなすモジュラーオペラッドとする．（詳細は第 3 節を参照．）このとき以下の結果を得た．

主定理 (M, ω) が点付き閉リーマン面上の SU(2) 平坦接続のモジュライ空間のとき，

A および B はその漸化構造を込めて，それぞれ非自明なモジュラーオペラッドの射

$$\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}} : \mathsf{Riem} \to \mathsf{V}_k\,, \qquad \mathsf{F}_{\mathsf{re}} : \mathsf{Pants} \to \mathsf{V}_k$$

として記述できる．さらに F_{re} は自然な射 forget : Pants → Riem による $\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}$ の引き戻しと一致する．つまり以下の可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Pants} \arrow[r, "\mathsf{F}_{\mathsf{re}}"] \arrow[d, "\mathsf{forget}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathsf{V}_k \\
\mathsf{Riem} \arrow[ur, "\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}"'] &
\end{tikzcd}$$

この主定理から直ちに次が得られる．

系（Jeffrey-Weitsman [12, 13]） (M, ω) が点付き閉リーマン面上の SU(2) 平坦接続のモジュライ空間のとき，$A = B$ つまり等式 (1.2) が成り立つ．

2　点付き閉リーマン面上の SU(2) 平坦接続のモジュライ空間

まず点付き閉リーマン面上の SU(2) 平坦接続のモジュライ空間の定義を述べ, それがケーラー偏極・実偏極の両方を備えた整シンプレクティック多様体となることを説明する．これ以降は

$$2(g-1) + \#I > 0 \tag{2.1}$$

を満たす非負整数 g および有限集合 I を固定する．（この条件は安定性条件と呼ばれる．）

定義 以下の 3 つ組のことを**（局所座標付きの）点付き閉リーマン面**と呼ぶ：

$$\mathcal{X}_{g,\,I} \;=\; (\Sigma,\, \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{z})$$

ここで

- Σ：種数 g の閉リーマン面,
- $\boldsymbol{p} = \{p_i\}_{i \in I}$：$\Sigma$ 上の相異なる $\#I$ 個の点,
- $\boldsymbol{z} = \{z_i$: 各点 p_iの周りでの正則局所座標 $\}_{i \in I}$

（局所座標付きの）点付き閉リーマン面 $\mathcal{X}_{g,\,I} \;=\; (\Sigma,\, \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{z})$ に対して穴空き曲面 $\Sigma^0 := \Sigma - \boldsymbol{p}$ を考え，その上の自明な主 SU(2) 束の接続全体を $\mathcal{A}_{\Sigma^0} \cong \Omega^1(\Sigma^0,\, \mathfrak{su}(2))$ とし，$\mathcal{G}_{\Sigma^0} \cong C^\infty(\Sigma^0,\, \mathrm{SU}(2))$ をゲージ変換群とする．また $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ を各点 $\boldsymbol{p} = \{p_i\}_{i \in I}$ の重みとして固定する．（ただし $\alpha_i \in [0,\, 1] \cap \mathbb{Q}$ とする．後ほど $\alpha_i \in P_k := (0,\, 1) \cap \frac{1}{k}\,\mathbb{Z}$ で考える．）

定義 次の商空間を**点付き閉リーマン面** $\mathcal{X}_{g,I}$ **上の** SU(2) **平坦接続のモジュライ空間**と呼ぶ:

$$\mathcal{M}(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha}) = \left\{ A \in \mathcal{A}_{\Sigma^0} \,\middle|\, A : \text{平坦},\ \mathrm{hol}_A(C_i) \sim_{conj.} diag\left(e^{\pi\sqrt{-1}\alpha_i},\, e^{-\pi\sqrt{-1}\alpha_i}\right) \right\} \Big/ \mathcal{G}_{\Sigma^0}.$$

ここで $\mathrm{hol}_A(C_i)$ は点 p_i の周りのループ C_i の接続 A に関するホロノミーとしている.

このモジュライ空間 $\mathcal{M}(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ については以下が知られている.

事実 各 $i \in I$ で $\alpha_i \neq 0,\ 1$ とする.

(1) 既約な接続全体 $\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ は実 $6g-6+2(\#I)$ 次元の多様体となる.また接空間は $T_{[A]}\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{Im}(H^1_c(\Sigma^0,\, d_A) \to H^1(\Sigma^0,\, d_A))$ と表示され,以下の 2-形式 ω_{AB} によって $\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ はシンプレクティック多様体となる [2]:

$$\omega_{AB}(a,\, b) \ = \ \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma^0} \mathrm{Tr}(a \wedge b)\ .$$

(2) $k\alpha_i \in \mathbb{Z}$(つまり $\alpha_i \in P_k$)かつ $\displaystyle\sum_{i\in I} k\alpha_i \in 2\,\mathbb{Z}$ のとき,$(\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha}),\, k\,\omega_{AB})$ は整シンプレクティック多様体となる,つまり前量子化束 $\mathcal{L}_k \to \mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ が構成できる [15, 18].

(3) モジュライ空間 $\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ は $(\Sigma,\, \boldsymbol{p})$ 上の階数 2,自明な行列式束を持つ安定な放物的正則ベクトル束のモジュライ空間 $\mathcal{B}^s(\Sigma,\, \boldsymbol{\alpha})$ と微分同相になる [16, 17].これにより $\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ に ω_{AB} と整合的な複素構造が入る.(つまり $\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ はケーラー多様体となる.)

(4) 点付き閉リーマン面 $\mathcal{X}_{g,I}$ のパンツ分解 $\mathcal{C}$ を固定する(図 1).各ループ $C \in \mathcal{C}$ に対して

$$\mu_C : \mathcal{M}(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha}) \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ \ [A] \longmapsto \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathrm{hol}_A(C))\right)$$

と定め,これらを並べた写像

$$\mu_{\mathcal{C}} : \mathcal{M}(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{C}}\ ;\ \ [A] \longmapsto (\,\mu_C[A]\,)_{C\in\mathcal{C}}$$

を考える(これは Goldman 系と呼ばれる).この $\mu_{\mathcal{C}}$ は稠密な $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha}) \subset \mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ 上で完全可積分系となり,さらに半分次元のトーラス $\mathbb{T}^{\mathcal{C}}$ のハミルトン作用を誘導する [7, 12].

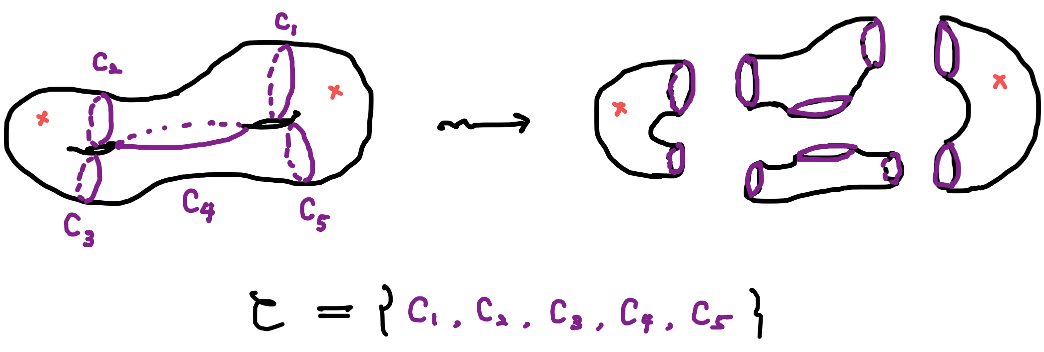

図 1. 点付き閉リーマン面 $\mathcal{X}_{g,I}$ のパンツ分解 $\mathcal{C}$

以降は $\alpha_i \in P_k$ かつ $k\alpha_i \in 2\,\mathbb{Z}$ を仮定し,$k\,\omega_{AB}$ により $\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ を整シンプレクティック多様体とみなす.さらにケーラー偏極,実偏極として上記 (3), (4) で与えられるものを考える.(完全可積分系としては k 倍の $k\mu_{\mathcal{C}}$ を考える.)

3 モジュラーオペラッド

この節ではモジュラーオペラッドとその間の射の定義を紹介し，主定理に現れた 3 つのモジュラーオペラッド Riem, Pants, V_k および射 forget : Pants $\to$ Riem について説明する．モジュラーオペラッドは Getzler-Kapranov[8] によって導入された「種数をもったオペラッド」である．

定義(Getzler-Kapranov[8]) 以下の 2 種類の操作を備えた集合の族 $\mathsf{M} = \{\mathsf{M}_g(I)\}_{g\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\ I:\ \text{有限集合}}$ を (集合の圏における) **モジュラーオペラッド**という．(添字 g, I の動く範囲は安定性条件 (2.1) を満たすとする．)

(合成) $\quad {}_i\circ_j : \mathsf{M}_g(I) \times \mathsf{M}_h(J) \longrightarrow \mathsf{M}_{g+h}\big((I-\{i\}) \sqcup (J-\{j\})\big), \quad i \in I, j \in J$

(縮約) $\quad \xi_{i,\,j} : \mathsf{M}_g(I) \longrightarrow \mathsf{M}_{g+1}(I - \{i,\,j\}), \quad i,\,j \in J$

ここで合成および縮約は互いに整合的で結合法則を満たしていなければならない．

<u>**例** (Riem)</u> 集合の族 Riem $= \{\mathrm{Riem}_g(I)\}_{g,\,I}$ を次で定める:

$$\mathrm{Riem}_g(I) \ = \ \{\mathcal{X}_{g,\,I} = (\Sigma,\, \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{z})\}\,/\sim$$

ここで

- $(\Sigma,\, \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{z}) \sim (\Delta,\, \boldsymbol{q},\, \boldsymbol{w})$ $:\Longleftrightarrow \exists$ 双正則写像 $f : \Sigma \to \Delta$ s.t. $\forall i \in I\ f(p_i) = q_i,\ z_i = f^* w_i$.

合成 ${}_i\circ_j$ や縮約 $\xi_{i,\,j}$ は添字 $i,\,j$ に対応する点の周りでのリーマン面の接着を考えることで自然に定まり，Riem にモジュラーオペラッドの構造が入る．

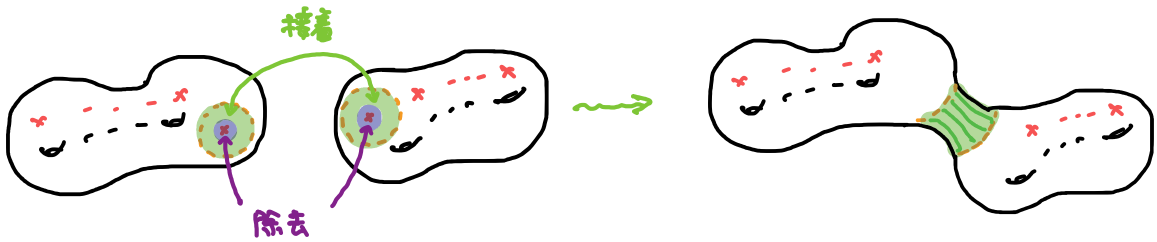

図 2. 点付きリーマン面同士の接着

<u>**例** (Pants)</u> 集合の族 Pants $= \{\mathrm{Pants}_g(I)\}_{g,\,I}$ を次で定める:

$$\mathrm{Pants}_g(I) \ = \ \{(\mathcal{X}_{g,\,I},\, \mathcal{C}) = (\Sigma,\, \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{z},\, \mathcal{C})\}\,/\sim$$

ここで

- $\mathcal{C}$: 点付き閉リーマン面 $\mathcal{X}_{g,\,I}$ のパンツ分解,
- $(\Sigma,\, \boldsymbol{p},\, \boldsymbol{z},\, \mathcal{C}) \sim (\Delta,\, \boldsymbol{q},\, \boldsymbol{w},\, \mathcal{D})$
  $:\Longleftrightarrow \exists$ 双正則写像 $f : \Sigma \to \Delta$ s.t. $\forall i \in I\ f(p_i) = q_i,\ z_i = f^* w_i,\ \{f(C)\,|\,C \in \mathcal{C}\} = \mathcal{D}$.

先程の例と同様に点付き閉リーマン面の接着を考えると合成 ${}_i\circ_j$ や縮約 $\xi_{i,\,j}$ が自然に定まり，Pants にモジュラーオペラッドの構造が入る．

<u>**例** (V_k)</u> $\overline{P}_k := P_k \cup \{0,\, 1\} = [0,\, 1] \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}$ とおいて，集合の族 $\mathsf{V}_k = \{(\mathsf{V}_k)_g(I)\}_{g,\,I}$ を次で定める[1]:

$$(\mathsf{V}_k)_g(I) = \big\{\varphi : \overline{P}_k{}^I \to \mathbb{Z}\big\}.$$

合成 ${}_i\circ_j$ や縮約 $\xi_{i,\,j}$ を

$$\varphi\,{}_i\circ_j\,\psi : \overline{P}_k^{(I-\{i\})\sqcup(J-\{j\})} \longrightarrow \mathbb{Z};\quad \boldsymbol{\alpha} \longmapsto \sum_{l \in \overline{P}_k} \varphi(\boldsymbol{\alpha}_{i;\,l}) \cdot \psi(\boldsymbol{\alpha}_{j;\,l})\ ,$$

[1] A や B の漸化構造の記述のためには，P_k ではなく $\overline{P}_k$ で考える必要がある．

$$\xi_{i,\,j}(\varphi):\ \overline{P}_k^{\,I-\{i,\,j\}} \longrightarrow \mathbb{Z};\quad \boldsymbol{\alpha} \longmapsto \sum_{l\in\overline{P}_k} \varphi(\boldsymbol{\alpha}_{i,\,j;\,l})$$

により定めれば，V_k はモジュラーオペラッドになる．
ここで $\boldsymbol{\alpha}_{i;\,l}$ は次で定まる ${\overline{P}_k}^{I}$ の元とする：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i;\,l}(m) \,=\, \begin{cases} l & ;\ m=i \\ \alpha_m & ;\ m\neq i \end{cases}.$$

同様に $\boldsymbol{\alpha}_{j;\,l}$ は次で定まる ${\overline{P}_k}^{J}$ の元とする：

$$\boldsymbol{\alpha}_{j;\,l}(n) \,=\, \begin{cases} l & ;\ n=j \\ \alpha_n & ;\ n\neq j \end{cases}.$$

また $\boldsymbol{\alpha}_{i,\,j;\,l}$ は次で定まる ${\overline{P}_k}^{I}$ の元とする：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i,\,j;\,l}(m) \,=\, \begin{cases} l & ;\ m=i,\,j \\ \alpha_m & ;\ m\neq i,\,j \end{cases}.$$

定義 $\mathsf{M}=\{\mathsf{M}_g(I)\}_{g,\,I}$ と $\mathsf{N}=\{\mathsf{N}_g(I)\}_{g,\,I}$ をモジュラーオペラッドとする．このとき **M から N へのモジュラーオペラッドの射**とは, 写像の族

$$\mathsf{F}=\{\mathsf{F}_{g,\,I}:\mathsf{M}_g(I)\to\mathsf{N}_g(I)\}_{g,\,I}$$

であって各々の合成 ${}_i\circ_j$ や縮約 $\xi_{i,\,j}$ と整合的なもの，つまり以下の条件を満たすものを指す.

(i) 各 $i\in I,\,j\in J$ および $X\in\mathsf{M}_g(I),\,Y\in\mathsf{M}_h(J)$ に対して

$$\mathsf{F}_{g+h,\,(I-\{i\})\sqcup(J-\{j\})}(X_i\circ_j Y) \,=\, \mathsf{F}_{g,\,I}(X)\,{}_i\circ_j\,\mathsf{F}_{h,\,J}(Y)\,,$$

(ii) 各 $i,\,j\in I$ および $X\in\mathsf{M}_g(I)$, に対して

$$\mathsf{F}_{g+1,\,I-\{i,\,j\}}\left(\xi_{i,\,j}(X)\right) \,=\, \xi_{i,\,j}\left(\mathsf{F}_{g,\,I}(X)\right).$$

このとき F を $\mathsf{F}:\mathsf{M}\longrightarrow\mathsf{N}$ で表す.

<u>例 (forget)</u> 写像の族 $\mathsf{forget}=\{\mathsf{forget}_{g,\,I}:\mathsf{Pants}_g(I)\to\mathsf{Riem}_g(I)\}_{g,\,I}$ を

$$\mathsf{forget}_{g,\,I}:\,[\,\mathcal{X}_{g,\,I},\,\mathcal{C}\,]\longmapsto[\,\mathcal{X}_{g,\,I}\,]$$

と定めると, forget は Pants から Riem へのモジュラーオペラッドの射となる.

4 補足（主定理とその証明について）

第 2 節の準備のもと，第 1 節での系は正確に述べると以下の形になる：

系（Jeffrey-Weitsman [12, 13]） 各点での重みが $k\alpha_i\in 2\mathbb{Z}$ を満たすとき，次が成り立つ:

$$\dim H^0\big(\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,\,I}\,;\boldsymbol{\alpha}),\,\mathcal{L}_k\big) \,=\, \#\,\mathrm{Im}\big(k\mu_{\mathcal{C}}\big)\cap{\Lambda_{\mathcal{C}}}^{*}. \tag{4.1}$$

右辺について，$\Lambda_{\mathcal{C}}$ は稠密部分 $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}_{g,\,I}\,;\boldsymbol{\alpha})\subset\mathcal{M}^s(\mathcal{X}_{g,\,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ 上の半分次元トーラス作用に付随した格子とし，${\Lambda_{\mathcal{C}}}^{*}$ をその双対格子としている．また Goldman 系 $\mu_{\mathcal{C}}$ の k 倍 $k\mu_{\mathcal{C}}$ の定義域としては $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}_{g,\,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ ではなく，モジュライ空間全体の $\mathcal{M}(\mathcal{X}_{g,\,I}\,;\boldsymbol{\alpha})$ を考える.

等式 (4.1) をみると，左辺は点付き閉リーマン面 $\mathcal{X}=\mathcal{X}_{g,I}$ および点の重み $\boldsymbol{\alpha}$，右辺はパンツ分解を備えた点付き閉リーマン面 $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ および $\boldsymbol{\alpha}$ をパラメータとして持っている．第 1 節では単に左辺の正則切断の空間の次元を A，右辺の格子点の個数を B で表していたが，ここからはパラメータを明示してそれぞれ $A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha}), B(\mathcal{X},\mathcal{C};\boldsymbol{\alpha})$ で表すことにする．主定理ではこれらのパラメータを固定するのではなく，$\mathcal{X},(\mathcal{X},\mathcal{C}),\boldsymbol{\alpha}$ を動かしたときの $A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})$ および $B(\mathcal{X},\mathcal{C};\boldsymbol{\alpha})$ の関係に注目している．特に主定理の中で述べている $A=A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})$ の漸化構造とは，点付き閉リーマン面 $\mathcal{X}$ の分解 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}_i\circ_j\mathcal{Z}$，$\mathcal{X}=\xi_{i,j}(\mathcal{W})$ を考えた際に出てくる $A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})$ の関係式のことを指している．（同様に $B=B(\mathcal{X},\mathcal{C};\boldsymbol{\alpha})$ の漸化構造とは，パンツ分解を備えた点付き閉リーマン面 $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ の分解 $(\mathcal{X},\mathcal{C})=(\mathcal{Y},\mathcal{D})_i\circ_j(\mathcal{Z},\mathcal{E})$，$(\mathcal{X},\mathcal{C})=\xi_{i,j}(\mathcal{W},\mathcal{F})$ から出てくる関係式のことを指す．）

射 $\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}:\mathsf{Pants}\to\mathsf{V}_k$ および $\mathsf{F}_{\mathsf{re}}:\mathsf{Pants}\to\mathsf{V}_k$ の構成は，大雑把に言えば以下のようになる：

$$(\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}})_{g,I}:[\mathcal{X}]\longmapsto\big(\boldsymbol{\alpha}\mapsto A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})\big),\qquad(\mathsf{F}_{\mathsf{re}})_{g,I}:[\mathcal{X},\mathcal{C}]\longmapsto\big(\boldsymbol{\alpha}\mapsto B(\mathcal{X},\mathcal{C};\boldsymbol{\alpha})\big).$$

これらがモジュラーオペラッドの射になる（特に合成 ${}_i\circ_j$ や縮約 $\xi_{i,j}$ を保つ）という部分が，$A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})$ や $B(\mathcal{X},\mathcal{C};\boldsymbol{\alpha})$ の漸化構造を表現している．ただし上記のままだと $\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}$ および F_{re} はモジュラーオペラッドの射にはならず，正確には $A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})$ や $B(\mathcal{X},\mathcal{C};\boldsymbol{\alpha})$ に適当な読み替えや修正を行って $\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}$ と F_{re} を構成する．例えば $A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})$ はそのままだと $\boldsymbol{\alpha}\in\overline{P}_k-P_k$ では定義されないが，これを土屋-上野-山田 [5] の共形ブロックの空間の次元に読み替えることで全ての $\boldsymbol{\alpha}\in\overline{P}_k$ に対して統一的に定義でき，さらに共形ブロックの空間の分解定理を用いて $\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}$ がモジュラーオペラッドの射になることが導かれる．（漸化構造の記述には全ての $\boldsymbol{\alpha}\in\overline{P}_k$ に対して $A(\mathcal{X};\boldsymbol{\alpha})$ を考える必要がある．）$B(\mathcal{X},\mathcal{C};\boldsymbol{\alpha})$ については $\boldsymbol{\alpha}\in\overline{P}_k-P_k$ でも定義はできるが，対応する分解定理の記述にあたってパンツ分解 $\mathcal{C}$ の代わりに，各点 p_i 周りのループ C_i も対等に考慮に入れた $\overline{\mathcal{C}}=\mathcal{C}\sqcup\{C_i\}$ を使って修正する必要がある．

主定理の後半部（図式の可換性）の証明は以下の補題が鍵となる．

補題 モジュラーオペラッド M と N の間の 2 つの射 $\mathsf{F},\mathsf{G}:\mathsf{M}\to\mathsf{N}$ を考える．

> 射 F,G の定義域 M は以下を満たしているとする：安定性条件 (2.1) を満たす (g,I) について
> (i) $g=0$ かつ $\#I>3$ のとき，どんな $X\in\mathsf{M}_0(I)$ も非自明な分解 $X=Y_i\circ_j Z$ をもつ，
> (ii) $g>0$ のとき，どんな $X\in\mathsf{M}_g(I)$ も非自明な分解 $X=\xi_{i,j}(W)$ をもつ．
>
> このとき，$\#I=3$ なる I に対して $\mathsf{F}_{0,I}=\mathsf{G}_{0,I}$ ならば，$\mathsf{F}=\mathsf{G}$ が成り立つ．

この補題は 2 つのモジュラーオペラッドの射が一致するための条件を述べており，これを $\mathsf{M}=\mathsf{Pants}$, $\mathsf{N}=\mathsf{V}_k$, $\mathsf{F}=\mathsf{F}_{\mathsf{re}}$, $\mathsf{G}=\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}\circ\mathsf{forget}$ の場合に適用することで，$\mathsf{F}_{\mathsf{re}}=\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}}\circ\mathsf{forget}$ つまり主定理の図式の可換性が証明される．実際，Pants は補題の条件 (i) と (ii) を満たしており，さらに以下が成り立つことから補題が適用できる．

命題 $I=\{1,2,3\}$ とする．このとき $[\mathcal{X},\mathcal{C}]\in\mathsf{Pants}_g(I)$ および $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in(\overline{P}_k)^I$

> に対して，次が成り立つ．（$\mathcal{X}$ は 3 点付き $\mathbb{P}^1$，$\mathcal{C}=\emptyset$ に決まることに注意．）
>
> $$((\mathsf{F}_{\mathsf{re}})_{g,I}([\mathcal{X},\mathcal{C}]))(\boldsymbol{\alpha})=\begin{cases}1 & ;\ \boldsymbol{\alpha}\text{ は条件 }(k\text{-qCG})\text{ を満たす}\\ 0 & ;\ \text{その他}\end{cases}=((\mathsf{F}_{\mathsf{K\ddot{a}h}})_{g,I}([\mathcal{X}]))(\boldsymbol{\alpha})$$
>
> ここで条件 (k-qCG) とは以下の不等式のことを指す:
>
> $$\begin{aligned}|\alpha_1-\alpha_2|\le\alpha_3\le\alpha_1+\alpha_2\,,\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\le 2\,,\\ k(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\in 2\,\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$
>
> これは SU(2) におけるレベル k の量子 Clebsch-Gordan 条件と呼ばれる．

References

[1] J. E. Andersen, *Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations*, Comm. Math. Phys. **183** (2) (1997), 401-421.

[2] M. F. Atiyah, R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 308 (1983) 523-615.

[3] T. Baier, C. Florentino, J. M. Mourão, and J. P. Nunes, *Toric Kähler metrics seen from infinity, quantization and compact tropical amoebas*, J. Differential Geom. **89** (3) (2011), 411-454.

[4] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Mathematical Surveys, **33** (2) (1978), 97-154.

[5] H. Fujita, M. Furuta, T. Yoshida, *Torus Fibrations and Localization of Index I – Polarization and Acyclic Fibrations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **17** (1) (2010), 1-26.

[6] H. Fujita, M. Furuta, T. Yoshida, *Torus Fibrations and Localization of Index II – Local Index for Acyclic Compatible System*, Comm. Math. Phys. **326** (2014), 585-633.

[7] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. math.85 (1986), 263-302.

[8] E. Getzler and M. M. Kapranov, *Modular operads*, In: Compositio Math. 110.1 (1998), 65-126.

[9] V. Guillemin and S. Sternberg, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal., **52** (1983), 106-128.

[10] M. Hamilton and H. Konno, *Convergence of Kähler to real polarizations on flag manifolds via toric degenerations*, Journal of Symplectic Geometry, **12** (3) (2014), 473-509.

[11] K. Hattori and M. Yamashita, *Spectral convergence in geometric quantization — the case of non-singular Lagrangian fibrations*, Journal of Symplectic Geometry, **21** (6) (2024), 1191-1237.

[12] L. C. Jeffrey and J. Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys., **150** (1992), 593-630.

[13] L. C. Jeffrey and J. Weitsman, *Toric structures on the moduli space of flat connections on a Riemann surface: volumes and the moment map*, Adv. Math., **106**(1994), 151-168.

[14] Y. Kamiyama, *The cohomology of spatial polygon spaces with anticanonical sheaf*, Int. J. Appl. Math., **3** (2000) 339-343.

[15] H. Konno, *On the natural line bundle on the moduli space of stable parabolic bundles*, Comm. Math. Phys. 155 (2) (1993) 311-324.

[16] V. B. Mehta, C.S. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. 248 (3) (1980) 205-239.

[17] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and Unitary Vector Bundles on a Compact Riemann Surface*, Annals of Mathematics 82, no. 3 (1965) 540-67.

[18] T. R. Ramadas, I. M. Singer, J. Weitsman, *Some comments on Chern-Simons gauge theory*, Comm. Math. Phys. 126 (2) (1989) 409-420.

[19] Y. Takahashi, *Operad structures in geometric quantization of the moduli space of spatial polygons*, J. Math. Soc. Japan., **75** (2023), 857-880.

[20] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Advanced Studies in Pure Math., **19**(1989), 459-566.