defect d のいくつかの計算例

清水 達郎　(慶應義塾大学 総合政策学部)*

Tatsuro Shimizu
Faculty of Policy Management,
Keio University

1 Introduction

タイトルにある d は閉多様体 M とその基本群の非輪状な表現 ρ の組に対する不変量で，defect と呼ばれる．defect は Chern-Simons 摂動論を背景に持ち，その出自から，Reidemeister torsion と関連があることが期待される ([4], [5])．実際にいくつかの場合でその関係が示されている：

- 多様体の次元が 3 次元かつ 1st Betti 数が 1 以上，さらに表現が可換なときは defect と Reidemeister torsion は本質的に一致する ([2],[3])
- defect は境界付き多様体に対しても拡張される．拡張された defect と Reidemeister torsion の 3 次元多様体の torus に沿った切り貼りに関する振る舞いは本質的に一致する．([1])

本稿では，defect と Reidemeister torsion の関係を調べるため，$S^1 \times Y$ の直積の形をした多様体について defect の計算方法を述べる．なお，ほぼ同様の議論で一般に $X \times Y$ の形の多様体について計算ができるが，本稿では，$X = S^1$ の場合に，より具合性が高い証明を与える．

謝辞． RIMS 共同研究 (公開型)『変換群論の新しい展開』の世話人である 川上 智博先生，田村 俊輔先生に感謝を申し上げます．

2 不変量 d

この章では defect d の定義を与える．より詳しくは [1] 等を参照．

まずは準備として，局所系係数チェインについて言葉を用意する．

2.1 局所係数チェイン

X を多様体，$\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(V)$ を表現とする．V は有限次元線形空間．コンパクト k 次元多様体 N から X への連続写像 $c : N \to X$ と，N の基点 $b \in N$ が与えられ，以下

* 〒252-0882 神奈川県藤沢市遠藤 5322
e-mail: tshimizu@sfc.keio.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号: 25K07016) の助成を受けたものである。
キーワード：Chern-Simons 摂動論, Reidemeister torsion

の (条件) を満たす $e \in V_{c(b)}$ がとれたとする：

(条件) 任意の $\gamma \in c_*(\pi_1(N)) \subset \pi_1(X)$ に対し $\rho(\gamma)(e) = e.$

このとき N を, b がひとつの頂点となるように適当に単体分割し，$c(b)$ に係数 e を与えれば，c は X の (特異)k チェインとなる．このチェインを単に $N \otimes e$ と表すことにする：

$$N \otimes e \in C_k(X; V_\rho).$$

たとえば N が可縮なときは上記 (条件) は自動的に満たされる．

2.2 defect d

M を閉多様体, $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(V)$ を有限次元線形表現とする．ただし V は有限次元線形空間．また，$\rho^* = {}^t\rho^{-1} : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(V^*)$ を ρ の双対表現とする．ρ は acyclic(非輪状) と仮定する．すなわち,

$$H_i(M; V_\rho) = 0 \quad , i = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

このとき ρ^* も acyclic であることに注意する．

M の non-vanishing vector field $s \in \Gamma TM$ をひとつとる．ここで TM は M の接束で，ΓTM は $TM \to M$ の切断全体を表す．d は $(M, \rho; s)$ の三つ組みに対して定義される位相不変量で, $H_1(M; V_{\rho^*} \otimes V_\rho)$ に値をとる．

2.3 d の構成

Δ を対角線集合

$$M \times M \supset \Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$$

とする．Δ の $M \times M$ における法束 ν_Δ を以下の束同型 ι によって接束 TM と同一視する：

$$\iota : TM \overset{\cong}{\to} \nu_\Delta, (x, u) \mapsto ((x, x), (-u, u)).$$

ここで $x \in M, u \in T_xM$ である．よって TM の切断 s は ν_Δ の切断を与える．

d を定義するため，ホモロジー群の間の同型を 3 つ用意する：

<u>同型 (1) ∂^{-1}</u>

多様体対 $(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$ に対するホモロジー完全列

$$\cdots \to H_{n+1}(M \times M) \to H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \xrightarrow{\partial} H_n(M \times M \setminus \Delta) \to H_n(M \times M) \to \cdots$$

を考える．ホモロジー群の係数は

$$V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho = \pi_1^* V_{\rho^*} \otimes \pi_2^* V_\rho$$

である．ここで $\pi_i : M \times M \ni (x_1, x_2) \mapsto x_i \in M$ は射影である $(i = 1, 2)$．また $\boxtimes$ は外部テンソル積を表す．ρ, ρ^* が acyclic なので Künneth の公式から

$$H_i(M \times M; V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho) = 0 \quad , i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

である．よって特に完全列中の境界準同型 $\partial : H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \to H_n(M \times M \setminus \Delta)$ は同型である．したがって逆写像

$$\partial^{-1} : H_n(M \times M \setminus \Delta) \to \partial : H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$$

が存在する．

<u>同型 (2) E</u>

次に切除同型

$$E : H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \to H_{n+1}(N(\Delta), N(\Delta) \setminus \Delta)$$

をとる．ここで $N(\Delta)$ は $M \times M$ における Δ の管状近傍.

<u>同型 (3) τ</u>

最後に Thom 同型：

$$\tau : H_{n+1}(N(\Delta), N(\Delta) \setminus \Delta) \to H_1(\Delta)(= H_1(M)).$$

右辺の $H_1(\Delta) = H_1(M)$ は ι が誘導する同型によって同一視している．

以上 3 つの同型写像を合成することで，以下の同型が得られる：

$$\Phi := \tau \circ E \circ \partial^{-1} : H_n(M \times M \setminus \Delta; V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho) \overset{\cong}{\to} H_1(M; V_{\rho^*} \otimes V_\rho).$$

ここで $V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho|_\Delta = V_{\rho^*} \otimes V_\rho$ であることに注意.

次に s を用いて $H_n(M \times M \setminus \Delta)$ のホモロジークラスを構成する．s を用いて Δ を摂動したものを $s(\Delta)$ とする．$s(\Delta)$ は Δ のごく近傍にあるので，$V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho|_{s(\Delta)} \cong V_{\rho^*} \otimes V_\rho$ とみなせる．$V^* \otimes V = \mathrm{Hom}(V, V) \ni 1$ は $\pi_1(M)$ の対角作用で不変であるから，ホモロジー類

$$[s(\Delta) \otimes 1] \in H_n(M \times M \setminus \Delta; V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho)$$

を得る．

定義 2.1.

$$d(M, \rho; s) = \Phi([s(\Delta) \otimes 1]) \in H_1(M; V_{\rho^*} \otimes V_\rho).$$

$d(M, \rho; s)$ は s に依存するが，その差は $H_1(M; \mathbb{Z})$ に入っていることが確かめられる：s_1, s_2 を non-vanishing vector field とするとき，

$$d(M, \rho, s_1) - d(M, \rho; s_2) \in H_1(M; \mathbb{Z}).$$

そこで s のよらない不変量 $d(M, \rho)$ を，$d(M, \rho; s)$ を up to $H_1(M; \mathbb{Z})$ で考えたものとして定義する：

定義 2.2.

$$d(M, \rho) := [d(M, \rho; s)] \in H_1(M; V_{\rho^*} \otimes V_\rho)/H_1(M; \mathbb{Z}).$$

注意 2.3. d は Morse 理論を用いて記述することができ，それを用いると境界付き多様体に拡張することができる．詳細は [1] を参照.

3 d の図形的意味

Φ を与える同型を追っていくことで d の図形的な解釈を与える．特異チェイン $\Sigma \in C_{n+1}(M \times M, V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho)$ であって

$$\partial\Sigma = s(\Delta) \otimes 1$$

を満たすものをとる．このチェイン Σ を **propagator** とよぶ [*1]．Σ は $\partial^{-1}(s(\Delta) \otimes 1)$ を代表する．切除同型と Thom 同型を経由することで

$$[\Sigma \cap \Delta] = d(M, \rho; s)$$

が分かる. すなわち Δ を摂動した $s(\Delta)$ が $M \times M$ 内で bound するチェイン Σ (propagator) の Δ との交差が d を代表する．この意味で d は，framing s つきの Δ の self-linking number ととらえることができる.

4 S^1 の defect の計算

多様体が S^1 の場合に具体的に propagator を構成することで defect を計算する．$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とみなし θ を座標とする．$\alpha \neq 1$ を長さ 1 の複素数とするとき，表現 $\pi_1(S^1) = \langle t \rangle \mapsto \rho(t) = \alpha \in GL(\mathbb{C})$ は acyclic である．non-vanishing section s の取り方は up to homotopy で 2 つあるが，ここでは $s = \frac{d}{d\theta}$ ととる．このとき s による Δ の摂動は

$$\{(\theta, \theta + \varepsilon) \mid \theta \in S^1\} \subset S^1 \times S^1$$

とみなすことができる．ここで $0 < \varepsilon$ は十分小さな正定数である．$S^1 \times S^1$ の部分多様体

$$\{(\theta, \theta + x) \mid \varepsilon \leq x \leq \varepsilon + 2\pi\} \subset S^1 \times S^1$$

は $\{x = 0\}$ 上の点を base point として，係数 $\frac{1}{\alpha - 1} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_\rho$ を与えることで $C_2(S^1 \times S^1, \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_\rho)$ のチェインを与える：

$$\Sigma = \{(\theta, \theta + x) \mid \varepsilon \leq x \leq \varepsilon + 2\pi\} \otimes \frac{1}{\alpha - 1} \in C_2(S^1 \times S^1, \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_\rho).$$

構成から

$$\partial\Sigma = \alpha s(\Delta) \otimes \frac{1}{\alpha - 1} - s(\Delta) \otimes \frac{1}{\alpha - 1} = s(\Delta) \otimes 1$$

であり，Σ は propagator．よって

$$d(S^1, \rho; s) = [\Sigma \cap \Delta] = \frac{-\alpha}{\alpha - 1}[\Delta \otimes 1] \in H_1(\Delta; \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_\rho).$$

[*1] Σ は Chern-Simons 摂動論で用いられる propagator の仮定を緩めた一般化とみることができるため.

$\mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_\rho = \mathbb{C}$ なので $H_1(\Delta; \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_\rho) = \mathbb{C}$. この同一視の元,

$$d(S^1, \rho; s) = \frac{-\alpha}{\alpha - 1}.$$

注意 4.1. Reidemeister-Turaev torsion は Reidemeister torsion の精密化で，三つ組み $M, \rho; s$ に対する不変量である．上記 S^1, ρ, s に対しての値 $\mathrm{Tor}(S^1, \alpha; s)$ は $\mathrm{Tor}(S^1, \alpha; s) = \frac{1}{\alpha - 1}$ である．t をパラメータとし，$f(t) = \frac{1}{t-1}$ とおくと,

$$\mathrm{Tor}(S^1, \alpha; s) = f(\alpha),$$

$$d(S^1, \alpha; s) = t\frac{d}{dt} \log f(t)|_{t=\alpha}$$

が成り立つ．より一般的に，M が 3 次元多様体で 1st Betti 数が 1 以上，表現がアーベルのときには Tor と d の間に同様の関係が成り立つ．([2],[3])

5 $S^1 \times Y$ の defect の計算

S^1 に関する notation は前の章を引き継ぐ. Y を $n-1$ 次元閉多様体, ρ_Y を (acyclic とは限らない) 任意の表現とする．このとき ρ が acyclic であることから $\rho \boxtimes \rho_Y$ は acyclic である. 射影 $S^1 \times Y \to S^1$ によって s を引き戻した $\widetilde{s}$ は $S^1 \times Y$ の non-vanishing vector field であり,

$$d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y; \widetilde{s})$$

が定義される．defect は $H_1((S^1 \times Y) \times (S^1 \times Y); (\mathbb{C}_{\rho^*} \boxtimes V_{\rho_Y^*}) \otimes (\mathbb{C}_\rho \boxtimes V_{\rho_Y}))$ に値をとるが，$(\mathbb{C}_{\rho^*} \boxtimes V_{\rho_Y^*}) \otimes (\mathbb{C}_\rho \boxtimes V_{\rho_Y}) = \mathbb{C} \boxtimes \mathrm{Hom}(V, V)_{\rho_Y}$ であり，$1 \in \mathrm{Hom}(V, V)$ により $(\mathbb{C} \boxtimes \mathbb{C} =)\mathbb{C} \subset \mathbb{C} \boxtimes \mathrm{Hom}(V, V)_{\rho_Y}$．よって

$$\mathbb{C} \subset H_1((S^1 \times Y) \times (S^1 \times Y); (\mathbb{C}_{\rho^*} \boxtimes V_{\rho_Y^*}) \otimes (\mathbb{C}_\rho \boxtimes V_{\rho_Y})).$$

defect $d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y; \widetilde{s})$ はこの $\mathbb{C}$ に属していて，次の命題のように計算される：

命題 5.1.

$$d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y; \widetilde{s}) = \frac{-\alpha}{\alpha - 1}\chi(Y).$$

ここで $\chi(Y)$ は Y の Euler 数である.

証明 $(S^1 \times Y) \times (S^1 \times Y) = (S^1 \times S^1) \times (Y \times Y)$ であり，この対応の元 $\Delta = \Delta_{S^1} \times \Delta_Y$ である．$(S^1 \times S^1) \times (Y \times Y)$ の $n+1$ チェイン Σ' を以下で定める.

$$\Sigma' = \{((\theta, \theta + \varepsilon + x), (p, \varphi_x(p)) \mid 0 \leq x \leq 2\pi\} \otimes \frac{1}{\alpha - 1}.$$

ただし base point は $\{\varepsilon = 0\}$ 上の点とする．また，$\varphi = \{\varphi_t : Y \overset{\cong}{\to} Y\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ は diffeomorphism の族で $\varphi_0 = \varphi_{2\pi} = \mathrm{id}$ かつ φ_ε が 0 と横断的であるものをとる．構成

から,

$$\begin{aligned}\partial\Sigma' &= (-\{((\theta,\theta+\varepsilon),(p,\varphi_0(p)))\} + \alpha\{((\theta,\theta+2\pi+\varepsilon),(p,\varphi_{2\pi}(p)))\}) \otimes \frac{1}{\alpha-1} \\ &= (-\{((\theta,\theta+\varepsilon),(p,p))\} + \alpha\{((\theta,\theta+2\pi+\varepsilon),(p,p))\}) \otimes \frac{1}{\alpha-1} \\ &= (s(\Delta_{S^1}) \times \Delta_Y) \otimes \frac{1}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

よって Σ' は propagator である．したがって

$$\begin{aligned}&d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y) \\ &= [\Sigma' \cap (\Delta_{S^1} \times \Delta_Y)] \\ &= \{((\theta,\theta+\varepsilon+(2\pi-\varepsilon)),(p,\varphi_{2\pi-\varepsilon}(p)))\} \otimes \frac{1}{\alpha-1} \\ &= (\Delta_{S^1} \otimes \frac{1}{\alpha-1})\chi(Y).\end{aligned}$$

□

注意 5.2. 同様の議論でより一般に閉多様体 A, B と $\pi_1(A)$ の acyclic な表現 ρ_A, $\pi_1(B)$ の任意の表現 ρ_B に対し $d(A \times B, \rho_A \boxtimes \rho_B) = d(A, \rho_A)\chi(B)$ が示される．

参考文献

[1] T. Kitano and T.Shimizu, Gluing formula for an invariant related to the Chern-Simons perturbation theory, arXiv, 2023

[2] C. Lescop, On the cube of the equivariant linking pairing for knots and 3–manifolds of rank one, arXiv, 2010.

[3] Schwarz, A. The partition function of degenerate quadratic functional and Ray-Singer invariants. Lett. Math. Phys. 2, 247, 1978

[4] T. Shimizu, A geometric description of the Reidemeister-Turaev torsion of 3-manifolds, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 179, Issue 2, pp. 233 - 258, 2025

[5] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121, 1989