Connections in Non-commutative Geometry and the Kashiwara–Vergne Groups

東京大学数理科学研究科　谷口 東曜
Toyo Taniguchi
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

本稿は, 筆者の論文 [Tan25] およびそれに基づいた, RIMS 共同研究集会「変換群論の新しい展開」での発表の要約である．曲面上の閉曲線のなす Goldman–Turaev Lie 双代数の自己同型群として定まる高種数の柏原–Vergne 群が, 非可換幾何の枠組みで特定の接続を「保つ」群として解釈できることをみる．

1　背景

1.1　Duflo 同型と柏原–Vergne 問題

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし, $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．このとき, $\mathbb{K}$-代数の同型

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$$

が存在することが知られており, Duflo 同型と呼ばれる [Duf77]．ここで, $S(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ 上の対称代数, $U(\mathfrak{g})$ は普遍包絡代数であり, 上付きの $\mathfrak{g}$ は随伴作用による不変部分を表す．柏原と Vergne は [KV78] において超関数の空間への拡張を試みた．すなわち, $S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の原点での微分作用素の環とみなし, $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随する Lie 群の単位元での微分作用素の環とみなした上で同様の同型を構成しようとした．その結果, 今では柏原–Vergne (KV) 問題と呼ばれる, 次の連立方程式の解が存在すれば十分であることになった．

$$\begin{cases} x + y - \log(e^y e^x) = (1 - \exp(\mathrm{ad}_x))f_1 + (\exp(\mathrm{ad}_y) - 1)f_2 \\ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_x \circ \partial_x f_1 + \mathrm{ad}_y \circ \partial_y f_2) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}\left(\dfrac{\mathrm{ad}_x}{e^{\mathrm{ad}_x} - 1} + \dfrac{\mathrm{ad}_y}{e^{\mathrm{ad}_y} - 1} - \dfrac{\mathrm{ad}_z}{e^{\mathrm{ad}_z} - 1} - 1\right) \end{cases}$$

ここで $f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ は 2 変数の Lie 級数であり, $z = \log(e^x e^y)$ とおいた．解の存在自体については, 同じ論文で $\mathfrak{g}$ が可解のときに示されており, いくつかの進展 (Rouvière [Rou81], Vergne [Ver99]) の後に Alekseev と Meinrenken [AM06] により一般の場合に肯定的に解決された．

その後, Alekseev と Torossian [AT12] により, KV 問題の普遍的な解 (つまりどの $\mathfrak{g}$ に対しても解を与えるような級数の組 (f_1, f_2)) が Drinfeld 結合子 [Dri90] から構成できることを示した．Drinfeld

結合子は E_2-オペラドの formality (あるいは, 等価なものだが組み紐群の元の「級数展開」) を与えるものとして理解されるので, これは KV 問題の低次元トポロジーとの繋がりを示唆するものである.

KV 問題の普遍的な解の集合 SolKV には KV 群と呼ばれる 2 つの群 KV, KRV が自然に作用しており, bi-torsor になっていることが [AM06] での定式化でわかる.

1.2 Goldman–Turaev Lie 双代数とその formality

上で述べた「示唆」はのちに現実となる. Alekseev, 河澄, 久野と Naef の論文 [AKKN23] では, KV 問題が Goldman–Turaev Lie 双代数の formality の解と等価であることが示されている. 以降しばらくこの Lie 双代数の説明をする.

$g, n \geq 0$ に対して $\Sigma = \Sigma_{g,n+1}$ を連結でコンパクトな種数 g, 境界成分が $(n+1)$ 個の有向曲面とし, $\mathfrak{g}(\Sigma)$ を Σ 上の閉曲線の自由ホモトピー類の生成する $\mathbb{K}$-線型空間とする. また fr を Σ 上の framing (すなわち特異点を持たないベクトル場) とする. このとき, $\mathfrak{g}(\Sigma)$ には Goldman–Turaev Lie 双代数と呼ばれる構造が入る ([Gol86], [Tur91], [AKKN23]). 具体的には, Goldman 括弧積 $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}$ と Turaev 余括弧積 $\delta^{\mathsf{fr}}_{\mathrm{T}}$ が次の式で定まる.

$$[\alpha,\beta]_{\mathrm{G}} = \sum_{p\in\alpha\cap\beta} \mathrm{sign}(p;\alpha,\beta)\,\alpha *_p \beta,$$

$$\delta^{\mathsf{fr}}_{\mathrm{T}}(\alpha) = \sum_{\substack{t_1\neq t_2\in[0,1]\\ \alpha(t_1)=\alpha(t_2)}} \mathrm{sign}(\alpha;t_1,t_2)\,\alpha|_{[t_1,t_2]}\otimes\alpha|_{[t_2,t_1]}\,,$$

ここで α,β は Σ 上の閉曲線であって滑らかにはめ込まれていて, 一般の位置にあるものである. また $\mathrm{sign}(p;\alpha,\beta)$ は交点 p での速度ベクトル $\dot\alpha_p$ と $\dot\beta_p$ の局所交点数 ($+1$ または -1), $\alpha *_p \beta$ は p から出発して α, β の順にたどった曲線のホモトピー類である. $\mathrm{sign}(\alpha;t_1,t_2)$ も同様に定義される. すると, $(\mathfrak{g}(\Sigma), [\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}, \delta^{\mathsf{fr}}_{\mathrm{T}})$ は Lie 双代数の公理を満たすことがわかる.

Goldman 括弧積は, Atiyah–Bott-Goldman シンプレクティック構造の位相的な部分を抽出したものであり, それ自身複雑なものになっている. Formality とは, 下の定理で述べられる, ある種の構造定理である.

定理 1 ([Mas18],[AKKN23])**.** 適切な (下降) フィルトレーションのもとで, 完備化 $\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma)$ はその次数商 $\mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma)$ に Lie 双代数として同型である.

次数商 $\mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma)$ は 1 次ホモロジー群 $H = H_1(\Sigma;\mathbb{K})$ 上の (完備な) 巡回語のなす $\mathbb{K}$-線型空間

$$|\hat{T}(H)| = \hat{T}(H)/[\hat{T}(H),\hat{T}(H)]$$

と同一視できる. その上には自然に Lie 双代数の構造が誘導され, (余) 括弧積は組み合わせ的に書くことができる (例えば河澄, 久野による概説 [KK16] の第 6 節を見よ). しかし, このような同型射自体は非常に複雑であり, その取り方も標準的なものはないようである. そこで, (しかるべき) 同型射全体の空間 $\mathrm{Isom}^{+}_{\mathrm{Liebi}}(\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma), \mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$ を次のような写像全体の集合とする.

- 完備 Hopf 代数の同型 $\theta\colon \widehat{\mathbb{K}\pi_1(\Sigma)} \to \hat{T}(H)$ である.
- Lie 双代数としての同型 $|\theta|\colon \hat{\mathfrak{g}}(\Sigma) \to \mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma)$ を誘導する.

- $\mathrm{gr}\,\theta = \mathrm{id}$ を満たす.

同様の条件を満たすものとして, それぞれの自己同型群

$$\mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Liebi}}(\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma)), \quad \mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Liebi}}(\mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$$

も考えると, $\mathrm{Isom}^+_{\mathrm{Liebi}}(\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma), \mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$ は明らかにこれらの群の上の bi-torsor である. すると, 上の「複雑である」という言明は次の意味で正当化される.

定理 2 ([AKKN23])**.** $\Sigma = \Sigma_{0,3}$ とし, framing fr を適切にとると, 同一視

- $\mathrm{KV} \cong \mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Liebi}}(\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$,
- $\mathrm{KRV} \cong \mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Liebi}}(\mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$,
- $\mathrm{SolKV} \cong \mathrm{Isom}^+_{\mathrm{Liebi}}(\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma), \mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$

が存在する. 最初の 2 つは群の同型であり, 最後は bi-torsor の同型である.

これを逆手にとって, 高種数の KV 群および解の空間を次で定義する.

定義 3. $g, n \geq 0$ と framing fr に対し,

- $\mathrm{KV}^{\mathsf{fr}}_{g,n+1} = \mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Liebi}}(\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$,
- $\mathrm{KRV}^{\mathsf{fr}}_{g,n+1} = \mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Liebi}}(\mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$,
- $\mathrm{SolKV}^{\mathsf{fr}}_{g,n+1} = \mathrm{Isom}^+_{\mathrm{Liebi}}(\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma), \mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma))$

とおく.

これらの空間の明示的な定義式も [AKKN23] で得られており, 例えば KV の方は

$$\mathrm{KV}^{\mathsf{fr}}_{g,n+1} \cong \left\{ G \in \mathrm{tAut}^+(\hat{L}(H)) : G(\xi) = \xi, \, \mathsf{j}^{\mathsf{fr}}(G) \in \left| \sum_j z_j \mathbb{K}[[z_j]] + \xi^2 \mathbb{K}[[\xi]] \right| \right\}$$

となる. ここでは記号の説明を割愛するが, 主要項に登場するのは発散写像の「積分」として得られる群の 1-コサイクル j^{fr} であり, その解釈をすることが本稿の主題である.

2 道具立て

ここでは, 筆者の主結果を説明するためにいくつかの道具や記号を準備する.

2.1 曲面の基本亜群

$\Sigma = \Sigma_{g,n+1}$ の各境界成分に 1 つずつ基点 $*_j$ をとり, $\mathcal{G} = \pi_1(\Sigma, \{*_j\}_{0 \leq j \leq n})$ を Σ の基本亜群とする. これは自由亜群であり, 自由生成系の 1 つは図 1 のように取れる. すると $\mathbb{K}$-linear category $\mathbb{K}\mathcal{G}$ を得るが, これの trace space

$$|\mathbb{K}\mathcal{G}| = \mathrm{HH}_0(\mathbb{K}\mathcal{G}) = \mathbb{K}\mathcal{G}/[\mathbb{K}\mathcal{G}, \mathbb{K}\mathcal{G}]$$

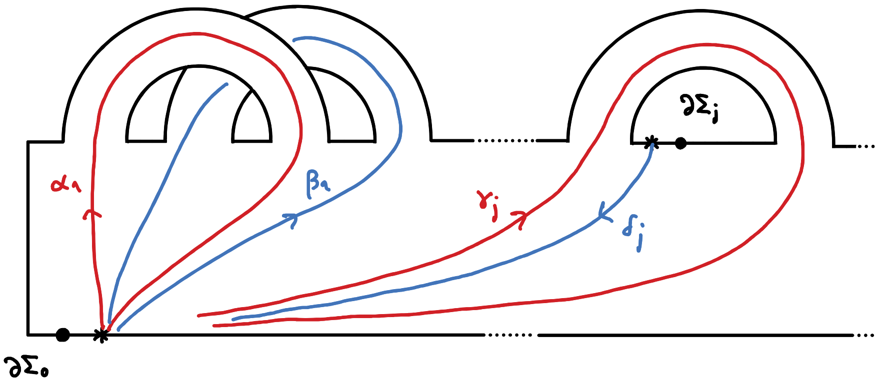

図 1: 基本亜群 $\mathcal{G}$ の自由生成系 $\mathcal{C}$.

は上で述べた $\mathfrak{g}(\Sigma)$ と同じものであるので, 以降これを用いることにする. $\mathbb{K}\mathcal{G}$ は Hopf groupoid の構造を持ち, それぞれの構造射は $x \in \mathcal{G}(*_j, *_k)$ に対して具体的に

$$\Delta(x) = x \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 1, \quad S(x) = x^{-1}$$

で与えられる. これの Hopf subgroupoid として境界成分を代表する単純閉曲線 $\partial_j\Sigma \in \mathcal{G}(*_j, *_j)$ の生成するものを $\partial\mathbb{K}\mathcal{G}$ とおく.

ここで, $\mathbb{K}\mathcal{G}$ 上の (非負の整数で添字付けられた) 乗法的なフィルトレーション $F^\bullet\mathbb{K}\mathcal{G}$ を次のように定める. 基点 $*_j$ での恒等写像を 1_j とおいて, 図 1 にある生成元に対して

$$\alpha_i - 1_0, \beta_i - 1_0 \in F^1\mathbb{K}\mathcal{G}, \quad \gamma_j - 1_0 \in F^2\mathbb{K}\mathcal{G}$$

とする. (このようなもののうち普遍的なものをとる.) これが定理 1 に現れる適切なフィルトレーションである. これについての完備化 $\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}$ も自然に (完備) Hopf groupoid の構造を持つ. そこで, これらの構造を保つ自己同型の空間として

$$\mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Hopf},\partial}(\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}) = \{G\colon \widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}} \to \widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}} : \text{完備 Hopf groupoid の同型}, \ \mathrm{gr}(G) = \mathrm{id}, \ G|_{\partial\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}} = \mathrm{id}\}$$

を考える. すると, $\mathrm{KV}^{\mathrm{fr}}_{g,n+1}$ に現れる $\mathrm{tAut}^+(\hat{L}(H))$ はちょうど $\mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Hopf},\partial}(\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}})$ に等しい.

さて, $\hat{\mathfrak{T}} = \mathrm{gr}(\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}})$ とおくと, 標準的な同一視

$$\hat{\mathfrak{T}} \cong \hat{T}(H)\langle \delta_j, \delta_j^{-1}\rangle_{1\le j\le n}$$

がある. 右辺は曲面の 1 次ホモロジー群 $H = H_1(\Sigma; \mathbb{K})$ 上の完備テンソル代数に形式的な生成元 $\delta_j\colon *_j \to *_0$ たちを加えて Hopf groupoid にしたものである. やはり $|\hat{\mathfrak{T}}| = \mathrm{gr}\,\hat{\mathfrak{g}}(\Sigma)$ が成り立つ. 同様に Hopf subgroupoid が

$$\partial\hat{\mathfrak{T}} = \mathrm{Im}(\mathrm{gr}\,\partial\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}} \to \mathrm{gr}\,\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}})$$

により定まる. そこで, しかるべき同型の空間を

$$\mathrm{Aut}^+_{\mathrm{Hopf},\partial}(\hat{\mathfrak{T}}) = \{G\colon \hat{\mathfrak{T}} \to \hat{\mathfrak{T}} : \text{完備 Hopf groupoid の同型}, \ \mathrm{gr}(G) = \mathrm{id}, \ G|_{\partial\hat{\mathfrak{T}}} = \mathrm{id}\}$$

$$\mathrm{Isom}^+_{\mathrm{Hopf},\partial}(\hat{\mathfrak{T}}, \widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}) = \{G\colon \hat{\mathfrak{T}} \to \widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}} : \text{完備 Hopf groupoid の同型}, \ \mathrm{gr}(G) = \mathrm{id}, \ \partial\hat{\mathfrak{T}} \xrightarrow{\cong} \partial\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}\text{を誘導する}\}$$

と定める.

2.2 非可換幾何と接続

$\mathcal{A}$ を $\mathbb{K}$-linear category とする．すなわち, 小さい圏であって, 射の空間は $\mathbb{K}$-線型空間の構造を持ち, 射の合成は双線型であるものとする．$\mathcal{A} = \mathbb{K}\mathcal{G}$ を念頭においているが, しばらく一般論を進める．射の合成は通常の結合代数の積と整合的にするために図式順で読み，例えば $a\colon u \to v$ と $b\colon v \to w$ の合成は ab と書く．

定義 4. $\mathcal{A}$ 上の 1-形式の空間は, $\mathcal{A}$-両側加群として

$$\Omega^1\mathcal{A} = \mathcal{A}^e\{da : a \in \mathcal{A}\}/\{d \text{ は } \mathbb{K}\text{-線型}, d(ab) = da\, b + adb\}$$

と定める．また, 左 $\mathcal{A}$-加群 $\mathcal{M}$ 上の接続とは $\mathbb{K}$-線型写像 $\nabla\colon \mathcal{M} \to \Omega^1\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ であって Leibniz 則

$$\nabla(am) = da \otimes m + a\nabla(m)$$

を満たすものとする．

さらに $\mathcal{A}$ は augmentation ε を持つものとする．

定義 5. $\mathbb{K}\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を, $\mathcal{A}$ の object の生成する $\mathbb{K}$-線型空間とする．

- $\mathbb{K}\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 上の左 $\mathcal{A}$-加群の構造を, $u, v \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ と $x \in \mathcal{A}(u, v)$ に対して次で定める．

$$(u \xrightarrow{x} v) \cdot v = \varepsilon(x)u$$

- また, $\mathbb{K}$-線型写像 $s\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を次で定める．

$$s(u \xrightarrow{x} v) = \varepsilon(x)u$$

- $\mathcal{M} = \mathrm{Ker}(s)$ とおく．これは $\mathcal{A}$ の乗法を用いて自然に左 $\mathcal{A}$-加群である．
- $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を augmentation を保つ $\mathbb{K}$-linear category の同型とする．このとき, 制限により $G\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を得る．そこで, ∇ への共役作用を

$$\mathrm{Ad}_G\nabla\colon \mathcal{M} \xrightarrow{G^{-1}} \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \xrightarrow{G\otimes G} \Omega^1\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

  により定める．これは再び接続になる．

さて, $\mathcal{M}$ は $\mathcal{A}$-加群として有限生成かつ射影的としよう．すると, 通常の線型代数と同様に $\mathcal{M}$ 上の自己準同型のトレースなどが取れるようになる．とくに, 2 つの $\mathcal{M}$ 上の接続 ∇_1, ∇_2 が与えられると, それらの差は $\mathcal{A}$-加群の準同型なので $\mathrm{Tr}(\nabla_1 - \nabla_2) \in \mathrm{DR}^1\mathcal{A}$ が定まる．ここで

$$\mathrm{DR}^1\mathcal{A} = \mathrm{H}_0(\mathcal{A}, \Omega^1\mathcal{A}) = \Omega^1\mathcal{A}/[\mathcal{A}, \Omega^1\mathcal{A}]$$

は (非可換) de Rham 1-形式の空間である．外微分により写像 $d\colon |\mathcal{A}| \to \mathrm{DR}^1\mathcal{A}$ が誘導される．

3 主結果

上の道具を曲面の基本亜群の場合に適用しよう．

補題 6. $\mathcal{A} = \mathbb{K}\mathcal{G}$ のとき, $\mathcal{M}$ は有限生成かつ射影的である．より詳しく, 次の同型がわかる．

$$\mathcal{M} \cong \bigoplus_{c=\alpha_i,\beta_i,\gamma_j} \mathbb{K}\mathcal{G}(\,\cdot\,, *_0)(1_0 - c) \oplus \bigoplus_{1\le j\le n} \mathbb{K}\mathcal{G}(\,\cdot\,, *_j)(1_j - \delta_j)$$

そこで, Σ 上の framing fr に対して $\mathcal{M}$ 上の接続 $\nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}$ を, 加群の生成元の上で

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}(1_0 - \alpha_i) &= a_i(d\beta_i)\beta_i^{-1} \otimes (1_0 - \alpha_i),\\
\nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}(1_0 - \beta_i) &= -b_i(d\alpha_i)\alpha_i^{-1} \otimes (1_0 - \beta_i),\\
\nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}(1_0 - \gamma_j) &= 0,\\
\nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}(1_j - \delta_j) &= c_j(d\delta_j)\delta_j^{-1} \otimes (1_j - \delta_j)
\end{aligned}$$

で定める．ここで

$$a_i = \mathsf{rot}^{\mathsf{fr}}(\alpha_i), \quad b_i = \mathsf{rot}^{\mathsf{fr}}(\beta_i), \quad c_j = \mathsf{rot}^{\mathsf{fr}}(\gamma_j)$$

は与えられた framing についての回転数である．素朴には, この接続は生成元たちの回転数の情報をすべて覚えているものとして理解される．$\mathcal{M}$ には自然にフィルトレーションが誘導されるので, 左 $\hat{\mathcal{T}}$-加群 $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ 上の接続 $\nabla_{H,\mathsf{fr}} = \mathrm{gr}\,\nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}$ も得る．

これで主定理を述べることができる．

定理 7 ([Tan25])**.** KV 群ならびに KV 問題の解の集合は次のように書ける．

$$\begin{aligned}
\mathrm{KV}^{\mathsf{fr}}_{(g,n+1)} &= \left\{G \in \mathrm{Aut}^{+}_{\mathrm{Hopf},\partial}(\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}) : \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}_G \nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}} - \nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}) \in d|\partial\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}|\right\}\\
\mathrm{KRV}^{\mathsf{fr}}_{(g,n+1)} &= \left\{G \in \mathrm{Aut}^{+}_{\mathrm{Hopf},\partial}(\hat{\mathcal{T}}) : \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}_G \nabla_{H,\mathsf{fr}} - \nabla_{H,\mathsf{fr}}) \in d|\partial\hat{\mathcal{T}}|\right\}\\
\mathrm{SolKV}^{\mathsf{fr}}_{(g,n+1)} &= \left\{G \in \mathrm{Isom}^{+}_{\mathrm{Hopf},\partial}(\hat{\mathcal{T}}, \widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}) : \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}_G \nabla_{H,\mathsf{fr}} - \nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}) \in d|\partial\widehat{\mathbb{K}\mathcal{G}}|\right\}
\end{aligned}$$

とくに, [AKKN23] で発散写像の「積分」として定まっていた群の 1-コサイクル j^{fr} は, 接続の差として自然に現れることになる．定理の証明は, 筆者の論文 [Tan24] で発散写像が接続とトレースを用いて再定式化されたことを使う．上でトレースを考えているのはそのためである．

最後に, なぜ接続とトレースが出てくるのかを説明しよう．まず, KV 群たちの表示式を得るための足掛かりは, [AKKN23] で与えられた Turaev 余括弧積の分解である．そこには発散写像

$$\mathrm{Div}^{\mathcal{C}}\colon\ \mathrm{Der}(\mathbb{K}\pi_1(\Sigma)) \to |\mathbb{K}\pi_1(\Sigma)|^{\otimes 2}$$

が登場し, 筆者の論文 [Tan24] の目的の 1 つはこの発散写像を見通しよく理解することであった．

そこで通常の微分幾何での発散を思い出す．X を向きづけられたリーマン多様体とし, μ を X 上の体積形式とする．このとき, ベクトル場 $\xi \in \Gamma(TX) = \mathrm{Der}(C^\infty(X))$ の発散 $\mathrm{div}_\mu(\xi)$ とは

$$\mathrm{div}_\mu(\xi)\mu = L_\xi(\mu) \ \text{ in } \Omega^{\mathrm{top}}(X)$$

によって特徴づけられる関数であった．これの類似を非可換幾何の枠組みで導入できないだろうか．すなわち, $C^\infty(X)$ の代わりに $\mathbb{K}\pi_1(\Sigma)$ あるいは $\mathbb{K}\mathcal{G}$ を考え, 平行に議論ができないだろうかと考える．しかし, 非可換環の上では外積がうまく定義されないので, 次の回避策を考える．T^*X の局所枠 $e_1, \ldots, e_r$ を

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_r = \mu$$

を満たすように取って, $L_\xi(e_i) = f_i^j e_j$ とおくと,

$$L_\xi(\mu) = \sum_i e_1 \wedge \cdots \wedge f_i^i e_i \wedge \cdots \wedge e_r = \sum_i f_i^i \mu$$

となる．そこで, この枠についての微分を考えたくなるので, T^*X 上の (局所的な) 平坦接続を $\nabla(e_i) = 0$ で定義し, 接続に付随する発散を

$$\mathrm{Div}^\nabla(\xi) = \mathrm{Tr}(L_\xi - \nabla_\xi)$$

と定義するのである．こうすると, 非可換幾何でも扱える接続, Lie 微分, トレースの組み合わせで書けるので都合がよい．(同様の発散写像の定式化は Lie algebroid の理論でも見かける.) このような経緯で, 平坦 (に近い) 接続 ∇ に対して, $\mathrm{Tr}(\nabla)$ を非可換幾何における体積形式の類似と思うことにする．もちろんこのままでは意味を持たないので, 接続の同値関係を

$$\nabla_1 \sim \nabla_2 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(\nabla_1 - \nabla_2) = 0$$

で定めて, その同値類を $\mathrm{Tr}(\nabla)$ と書くことにする．Div^∇ はこの同値類のみに依存する．

それでは, KV 群たちはなぜ「体積形式」を保つ群のように見えるのだろうか．その 1 つの解釈は, Alekseev, Naef, Pulmann, Ševera [ANPŠ24] が Batalin–Vilkovisky (BV) 代数の写像

$$\wedge^\bullet \mathfrak{g}(\Sigma) \to \mathcal{O}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{grpd}}(\mathcal{G}, Q(N))/Q(N))$$

を構成したことにより与えられる．BV 代数の詳細は省略するが, 左側の $\mathfrak{g}(\Sigma)$ 上の Turaev 余括弧積は, 右側の character variety の関数環上の適切な体積形式のもとでの発散写像で書けることがわかる．その体積形式とはユニモジュラーな超 Lie 群 $Q(N)$ の両側不変な体積形式 $\wedge(dg_i\, g_i^{-1})$ である．つまり, Turaev 余括弧積が保たれることは, character variety 上の体積形式が保たれることに対応し, それは上で述べた視点に立てば $\mathrm{Tr}(\nabla)$ が保たれることに呼応する．また, $\nabla_{\mathcal{C},\mathsf{fr}}$ の定義に出てきた $(d\alpha_i)\alpha_i^{-1}$ などは, この両側不変な体積形式の, 非可換幾何での「見た目」だと思える．

謝辞. 本稿の執筆にあたって, 研究集会を企画してくださいました世話人の皆様には深く感謝申し上げます．また, この研究発表は京都大学内の国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所からの支援を受けています．

参考文献

[AKKN23] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera. 2023. arXiv:1804.09566v3.

[AM06] Anton Alekseev and Eckhard Meinrenken. On the Kashiwara–Vergne conjecture. *Inventiones mathematicae*, 164(3):615–634, 2006. arXiv:math/0506499, doi:10.1007/s00222-005-0486-4.

[ANPŠ24] Anton Alekseev, Florian Naef, Ján Pulmann, and Pavol Ševera. Batalin-Vilkovisky structures on moduli spaces of flat connections. *Advances in Mathematics*, 443:109580, 2024. arXiv:2210.08944, doi:10.1016/j.aim.2024.109580.

[AT12] Anton Alekseev and Charles Torossian. The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators. *Annals of Mathematics*, 175(2):415–463, 2012. arXiv:0802.4300, doi:10.4007/annals.2012.175.2.1.

[Dri90] Vladimir Gershonovich Drinfeld. On quasitriangular quasi-hopf algebras and on group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Algebra i Analiz*, 2(4):149–181, 1990.

[Duf77] Michel Duflo. Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 10(2):265–288, 1977. doi:10.24033/asens.1327.

[Gol86] William M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Inventiones mathematicae*, 85(2):263–302, 1986. doi:10.1007/BF01389091.

[KK16] Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno. *The Goldman–Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms*, volume V of *Handbook of Teichmüller Theory*, pages 97–165. EMS Press, 2016. arXiv:1304.1885, doi:10.4171/160.

[KV78] Masaki Kashiwara and Michèle Vergne. The Campbell–Hausdorff formula and invariant hyperfunctions. *Inventiones mathematicae*, 47(3):249–272, 1978. doi:10.1007/BF01579213.

[Mas18] Gwénaël Massuyeau. Formal descriptions of Turaev's loop operations. *Quantum Topology*, 9(1):39–117, 2018. arXiv:1511.03974.

[Rou81] François Rouvière. Démonstration de la conjecture de Kashiwara-Vergne pour l'algèbre $\mathfrak{sl}(2)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 292:657–660, 1981.

[Tan24] Toyo Taniguchi. Non-commutative divergence and the Turaev cobracket. *To appear in Algebraic & Geometric Topology*, 2024. arXiv:2403.16566.

[Tan25] Toyo Taniguchi. The formality of the Goldman–Turaev Lie bialgebra on a closed surface. 2025. arXiv:2502.06154.

[Tur91] Vladimir G. Turaev. Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 24(6):635–704, 1991. doi:10.24033/asens.1639.

[Ver99] Michèle Vergne. Le centre de l'algébre enveloppante et la formule de Campbell-Hausdorff. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 329(9):767–772, 1999. doi:10.1016/S0764-4442(99)90004-6.