高次群論とその幾何学 III　交点理論と退化理論

高村茂　京都大学理学研究科数学教室

2025 年 5 月 14 日

概 要

トポロジーや代数幾何では、交点理論や退化理論（レフシェッツ束など）が展開され、さまざまな結果が花開いています。広い意味では、代数幾何の「代数的」化身である可換環論もこういう理論を持ち合わせています（スキーム論）。一方、可換環論と並ぶ “代数の柱” 群論には、こういった理論はありません。**この非対称性は、数学的に「不自然」です。高次群論はこれを解消します**—群を「幾何的な対象」として扱うことができて、“交点理論” や “退化理論” が展開できます。本稿では、著者がこれらに辿り着いた動機や経緯を含めて概説します。

1　序　群の二項演算から n 項演算へ、そして新たな幾何へ

高次群論は、群のミクロ積とマクロ積をつなぐ架け橋である。
一見すると無秩序に見えるミクロとマクロの相互作用から
“秩序ある構造” として高次群論の幾何学が発現する。

「高次群論」は、著者が長年に渡って構想し、創り上げてきましたが、public に話したのは、2 年前の変換群論の研究集会での講演が初めてでした。それが、いわば “事始め” です [高村 3], [高村 5]。そのとき人前で話すために、概念・用語・記号の体系を一気に整備し、理論に生命を吹き込んで “鼓動が脈打ち始めた感触” を味わったことをはっきり覚えています。それから 2 年経って再び変換群論の研究集会で講演する機会を頂いて、感慨深いものがあります。まずは、講演のあとの質疑応答を記して、序の導入としたいと思います。

質問 A.「リーマン面やモジュライ空間の研究をやっておられたのに、なぜこういうまったく違う分野の理論 “高次群論” を創り始めたのでしょうか。動機は何でしょうか」

動機１.　そもそもの動機は、大学生のときに群論の教科書と代数幾何の教科書を読んでいて、似た形の公式があるのに気づいたことです（群論の両側コセットの位数公式と代数幾何のベズーの公式の特別な場合）。**私には偶然に思えず、群論の背後に「未知の幾何」が潜んでいるのではないかと思いました。**特に、ベズーの公式の一般的な場合に対応する、群論の “未知の公式” があるはず、と思いました。

動機 2.　これも大学生のときに遡る話です。有限群の部分群に対するラグランジェの定理（部分群の位数は群の位数を割り切る）から、真部分群の位数は群の位数の半分以下であることがわかります。**この結果を習った際に、群論は「群の位数の半分以上の部分」をカバーしていないことに違和感を抱き、群論は『未完成の理論』のように思われました。**「群の位数の半分以上の部分」をカバーする “高次の群論” があるはずと、それ以降（暗中）模索をつづけた次第です。

動機 2′. 群は二項演算 $(g_1, g_2) \in G \times G \mapsto g_1 g_2 \in G$ により定義されますが、n 項演算 $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G \times G \times \cdots \times G \mapsto g_1 g_2 \cdots g_n \in G$ も定まります。**これら n 項演算 ($n = 2, 3, 4, \ldots$) を一斉にすべて考えると、G の深い性質（高次の性質）が捉えられるのではないか**、と学生の頃、漠然と思っていました—関数のテーラー展開 $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$ やジェット束[1]を念頭に置いて。また当時、『力学系以前』[齋籐] を読んで「n 体問題」の研究の歴史を知り[2]、**n 項演算 ($n \geq 3$) の場合も、$n = 2$ のときの定量的（計算的）なアプローチとは全く異なる定性的（幾何的）なアプローチがあるのではないか**と思いました。のちに、それが高次群論の中心的概念「シナジー」の幾何として結実しました。

なお、高次群論には直接的にリーマン面（代数曲線）は出てきませんが、それらを “感じさせるもの” が現れます。たとえば、代数曲線の交点に関するベズーの定理の類似物 [Ta10]。また、リーマン面のレフシェッツ束（退化族）に相当するようなものも現れます [Ta12]。これらの理論を “指導原理として” 横目で見ながら高次群論の研究を進めている、と言ったところです。なお、整数論の類体論は、指導原理として「代数曲線のアーベル被覆」とのアナロジーを念頭に置いています。

	類体論	高次群論
指導原理	代数曲線の「アーベル被覆」	代数曲線の「交点理論」および「退化理論」

質問 B. 「高次群論から、（既存の）群論に関して何か新しいことがわかるのでしょうか」

• 古典的な群論（つまり、既存の群論）では主として部分群、コセット、両側コセットしか扱わないので、そこに現れる公式は、部分群、コセット、両側コセットを含むものにほぼ限られます。**一方、高次群論は群の任意の部分集合をも扱う理論なので、はるかに広い射程を持ち、導かれる公式も部分群、コセット、両側コセットに限らず、群の任意の部分集合をも含む形になっています**—古典的な群論の公式（両側コセットの位数公式など）がこういう形で一般化されます [Ta10], [Ta11], [Ta9]。

なお、高次群論は文字通り、群の高次の対象[3]を扱いますが、その記述では「二次」の部分（両側コセット）が本質的な役割を果たします—群の高次対象の上部構造である “シナジー”（代数幾何の層に相当）は、「二次」の部分で構造が決定されます。**これは “モース関数的” です**（多様体上のモース関数の臨界点での「二次」の部分（ヘッセ行列）が多様体の位相型を決定）。このように、高次群論には既存の幾何とのさまざまなアナロジーが現れます—とりわけ、上で述べたリーマン面（代数曲線）の交点理論や退化理論とのアナロジーが顕著です。**これらは、高次群論の「普遍性」を強く示唆しているように思われます。**

	代数幾何	高次群論	モース理論
基盤的な道具	層	シナジー	モース関数

[1]志賀浩二『多様体論 II』（岩波書店）p.187, §3.7 ジェット・バンドル参照。

[2]n 個の天体の動きの「n 体問題」は、$n = 2$ のときは定量的（計算的）なアプローチでうまくいったが、$n \geq 3$ のときはうまくいかず、ポアンカレが全く違った方向、つまり定性的（幾何的）方向で、新しい研究分野を切り拓いた。

[3]たとえば、部分群積 $H_1 H_2 \cdots H_n$, コセット積 $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$、ずっと一般に群の部分集合の積 $S_1 S_2 \cdots S_n$.

二項演算から n 項演算へ、そして "高次対象の幾何学" へ

高次群論の観点では、群 G の元 a はスカラー、つまり次数 0、部分群 H は次数 1。すると、そのスカラー倍であるコセット aH も次数 1、両側コセット KaH は次数 2 です。古典的な群論で扱うのはここまでです。一方、高次群論で扱う対象は、より一般に n 次 $(n=2,3,4,\dots)$ のものまで扱います。たとえば、n 個の部分群の積 $H_1H_2\cdots H_n=\{h_1h_2\cdots h_n : h_i\in H_i\,(i=1,2,\dots,n)\}$ や n 個のコセットの積 $a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n=\{a_1h_1a_2h_2\cdots a_nh_n : h_i\in H_i\,(i=1,2,\dots,n)\}$, もっと一般に n 個の（G の）部分集合の積 $S_1S_2\cdots S_n=\{s_1s_2\cdots s_n : s_i\in S_i\,(i=1,2,\dots,n)\}$. これらは G の複雑な部分集合で、一般には部分群でもコセットでもありません。

古典的な群論では、なぜ "2 次" までしか考えないのでしょうか？

つらつら考えてみると、群演算

$$\underbrace{G\times G}_{2\,\text{つ}}\to G,\quad (g_1,g_2)\mapsto g_1g_2$$

がそもそも "2 つ" のあいだに定義されたもの（二項演算）、というのが大きな理由と思われます—「ちゃんとした」理論化ができるのは "2 次まで"、という先入観をもたらしたと推測されます。ちなみに、数学に限らず物理でも "2 つ" のあいだの相互作用が基本です。一般に、3 つ以上のあいだの相互作用の記述は困難ですが (n 体問題)、群では 3 つ以上の元の相互作用 (掛け算) を "機械的に" 自在に考えることができます：

$$n\text{ 項演算：}\quad \underbrace{G\times G\times\cdots\times G}_{n}\longrightarrow G,\qquad (g_1,g_2,\dots,g_n)\longmapsto g_1g_2\cdots g_n.$$

物理	数学
一つの粒子 (相互作用なし)	集合の元 (演算なし)
二つの粒子 (相互作用)	群の二つの元 (二項演算)
n 個の粒子 (n 体問題)	群の n 個の元 (n 項演算)

すべての $n=2,3,4,\dots$ にわたって、n 項演算を洞察することにより、今までの群論では捉えきれなかった群の性質を導こう、というのが高次群論の基本哲学です（解析関数 $f(x)$ のテーラー展開 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots$ から $f(x)$ のさまざまな性質を読み取ることのアナロジー）。後述するように、**高次群論では、n 項演算 ($n=2,3,4,\dots$) から一連の概念装置を組み立てていきます。**

補足 1.1. 群作用に関しては「2 つまで」で打ち止めです。片側作用（左 or 右作用）$H\curvearrowright X$ or $X\curvearrowleft K$ と両側作用（左右作用）$H\curvearrowright X\curvearrowleft K$ の二種類だけです—高次群論の立場からは前者は 1 次の作用、後者は 2 次の作用です。なお、1 次作用の「軌道」と 2 次作用の「軌道」は同じ名称ですが、実態は異なります。とくに X が G の場合、$H\curvearrowright G$ (resp. $G\curvearrowleft K$) の軌道はコセット Ha (resp. bK) であり、すべてのコセットは同じサイズです（実際、H (resp. K) に bijective です）。一方、$H\curvearrowright G\curvearrowleft K$ の軌道は両側コセット HaK で、そのサイズは a に依存します。それゆえ、1 次作用よりも 2 次作用のほうが "細かい" 情報を与えます（これは、関数の 1 次微分より 2 次微分のほうが細かい情報を与えることと似ています）。
注： 両側作用（左右作用）$H\curvearrowright X\curvearrowleft K$ を直積群 $H\times K$ の左作用とみなし、左作用の一般論を適用することもできます。しかし、このアプローチは左右を対等に扱っていないので、「両側性に根ざした幾何」へつながりにくいように思われます。

先に進む前に、他分野（解析学の n 体問題）についての、「2」から「n」へ辿った研究史を少し振り返っておきます—「群論」から「高次群論」への展開と “思想的に” 通底する部分があります。歴史的には、n 体問題は n 個の “天体” の動きを記述する問題として提出されました。しかし、3 体問題の場合ですら数学的には超複雑です—18 個の微分方程式からなる連立方程式を解く問題（[齋籐] p.14 参照）。工夫すると、8 個の微分方程式まで減らせますが、それでも途方もない難問です。実際、この問題は 18 世紀から 19 世紀にかけて多くの数学者の挑戦を跳ね返してきました。このため、連立微分方程式を “具体的に解く” という伝統的アプローチでは、にっちもさっちも行かないことが次第にあきらかになってきました。このアプローチを棄て去り、新しい研究方向へと舵を切ったのが、かのポアンカレです。連立微分方程式の積分関数を具体的に求めようとするのではなく、「解曲線の幾何的性質」を調べ、解曲線の概形（正確な形ではなく大ざっぱな形）を把握する、というのが彼の採った方針です。

教訓 (舵切アプローチ) 「2」から「3（以上）」へ移行して超難壁にぶち当たった場合、質的に違う発想を持ち込み、定性的な方向へ舵を切る必要がある。[4]

高次群論の構築においても、この教訓を強く意識してきました。部分群積（**セクト**）$H_1H_2\cdots H_n$ は $h_1h_2\cdots h_n$ $(h_i \in H_i)$ からなるので n が大きくなると爆発的に複雑になります。そもそも $h_1h_2\cdots h_n$ たちは異なっているとは限らないのでややこしいのです（一見異なって見える 2 つの元が（群 G の関係式によって）実は等しいことが起こりえます）。**n が大きくなるにつれ、セクト $H_1H_2\cdots H_n$ の爆発的複雑さのため、計算してこれを具体的に決定する、という研究ではなく、定性的 (幾何的) 方向の研究へと舵を切る必要があります。このときに n 項演算を使うのです。**具体的に言うと、n 項演算

$$\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n} \longrightarrow G, \qquad (g_1, g_2, \ldots, g_n) \longmapsto g_1g_2\cdots g_n \tag{1.1}$$

を直積 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ へ制限したものを考えます：

$$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \longrightarrow H_1H_2\cdots H_n. \tag{1.2}$$

これが高次群論の土台となる概念 “シナジー” のひな形です。

	n 体問題	高次群論
対象	連立微分方程式	群の高次対象（セクトなど）
初期アプローチ	連立微分方程式を具体的に解く	群の高次対象を具体的に計算する
舵切アプローチ	連立微分方程式の解曲線の概形を求める	シナジーを幾何的に描写する

[4] n 体問題とは異なる分野 “不変式論” においても、同時代に同じようなムーブメント (定量から定性へ) が起きました。それまで、不変式論はもっぱら腕力に頼った計算的結果を追求していましたが（ゴルドンが著名）、ヒルベルトが登場し、不変式論の研究を「定性的」方向へと一新しました。これが抽象代数学（可換環論）の嚆矢です。**「計算に頼るだけの数学」がある程度煮詰まると、「計算によらない定性的な方向」への探究が始まります。**多項式の解の公式の「計算的探求」を、群による「定性的研究」へと一新したガロアも “計算によらない” 数学を目指していました。多変数関数論の岡潔はもっと過激に “論理も計算もない” 数学を目指していました（三高時代、岡は友人に対し「僕は論理も計算もない数学をやってみたい」と言ったエピソードが残っています）。

(1.2) では、部分群 $H_1, H_2, \dots, H_n$ を取りましたが、より一般にコセット $a_1H_1, a_2H_2, \dots, a_nH_n$ を取り、その直積 $a_1H_1 \times a_2H_2 \times \cdots \times a_nH_n$ への n 項演算 (1.1) の制限を考えることもできます：

$$a_1H_1 \times a_2H_2 \times \cdots \times a_nH_n \longrightarrow a_1H_1a_2H_2 \cdots a_nH_n. \tag{1.3}$$

これもシナジーです。もっと一般に、G の任意の部分集合 $S_1, S_2, \dots, S_n$ の直積 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ への n 項演算 (1.1) の制限もシナジーです：

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \longrightarrow S_1S_2 \cdots S_n. \tag{1.4}$$

補足 1.2. 正確に言うと、シナジー (1.4) は**普遍シナジー**です。これは直積 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ を "一気に" 縮約して $S_1S_2 \cdots S_n$ にしますが、**一般のシナジー**は直積を "次々に" 縮約することにより得られます。たとえば、次の縮約列の α, β, γ は（非普遍）シナジーです：

$$S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \xrightarrow{\alpha} S_1S_2 \times S_3 \times S_4 \xrightarrow{\beta} S_1S_2 \times S_3S_4 \xrightarrow{\gamma} S_1S_2S_3S_4. \tag{1.5}$$

「n 項演算たちのあいだの演算」から「シナジーたちを "くっつける操作"」へ

高次群論では個々のシナジーを考えるのみならず、シナジーたちを「くっつける」ことも考えます。これは、代数的に言うと "メタ演算"、つまり n **項演算たち** ($n = 2, 3, 4, \dots$) **のあいだの演算**です。ここで、

$$n \text{ 項演算}\quad \eta_n : \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n} \longrightarrow G, \qquad (g_1, g_2, \dots, g_n) \longmapsto g_1g_2 \cdots g_n$$

と

$$m \text{ 項演算}\quad \eta_m : \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{m} \longrightarrow G, \qquad (h_1, h_2, \dots, h_m) \longmapsto h_1h_2 \cdots h_m$$

の「積」は

$$\begin{aligned} n+m \text{ 項演算}\quad \eta_{n+m} : &\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n} \times \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{m} \longrightarrow G, \\ &\big((g_1, g_2, \dots, g_n), (h_1, h_2, \dots, h_m)\big) \longmapsto g_1g_2 \cdots g_nh_1h_2 \cdots h_m. \end{aligned} \tag{1.6}$$

この積により、「n 項演算たち ($n = 2, 3, 4, \dots$)」は半群をなします。この半群演算から、シナジーたちを「くっつける」操作が定まります。たとえば、シナジー $\eta_n : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \longrightarrow S_1S_2 \cdots S_n$ とシナジー $\eta_m : T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_m \longrightarrow T_1T_2 \cdots T_m$ を「くっつけた」シナジーは

$$\eta_{n+m} : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \times T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_m \longrightarrow S_1S_2 \cdots S_nT_1T_2 \cdots T_m.$$

この「くっつける」操作により、群 G のシナジー全体はモノイド構造をもつことがわかります (G の単位部分群を E とすると、このモノイドの単位元は "自明シナジー"$E \to E$ です[5])。

[5]正確には、"up to E-equivalence (E 同値を除いて)" での単位元。E-equivalence については [Ta11] 参照。

「n 項演算の幾何」への心理的障壁

直積 $G \times G \times \cdots \times G$ の部分集合 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ （ここで S_i は G の部分集合）への n 項演算の制限は（普遍）シナジーです：

$$\eta = \eta_n : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \longrightarrow S_1 S_2 \cdots S_n, \qquad (s_1, s_2, \ldots, s_n) \longmapsto s_1 s_2 \cdots s_n. \tag{1.7}$$

これを見てどう思われるでしょうか？ おおかたの反応は次のようなものでしょう。

> 「n 項演算は、単に機械的に n 個の元の積を取るだけ。考察する価値はまったくない。」

あるいは

> 「n 項演算は昔からあるので、わざわざ『シナジー』という名称をつける必要はないし、わかりきったことを考察するのは時間のムダ。」

振り返ってみると、高次群論の研究史において最大の難所がここです。つまり、この先入観です。 今までなぜ高次群論が興（おこ）らなかったかの理由がわかります—昔からずっとあるよく知られたものなので、“すでにわかったもの” として思考停止してしまい、それ以上、突き詰めて洞察しなかったことです。

> 今までの見方で見るのではなく、新たな見方で見ることにより、「よく知られたもの」はよく知られたものではなくなる—**同じものを見ていても、違った切り口で見れば、それは同じものではない。**そこで敢えて違う名称（シナジー）を付けて “人心を一新する”。これは先入観を一掃するためでもあります。

“研究の死角” は、思い込みや先入観により生じる—「基本概念」は、先駆者が思い込みや先入観の壁を乗り越え、さらに試行錯誤という “濾過（ろか）のプロセス” を経て到達したものである。濾過のあとの最終形態だけ見ていると見過ごしてしまいがちだが、“濾過のプロセス” こそが研究の真髄。

2　高次群論における “交点理論”

トポロジーと代数幾何の両分野にまたがる重要な理論として、交点理論と退化理論があります。交点理論は、代数幾何ではベズーの定理を端緒として発展しました。また、退化理論のレフシェッツ束は、“発祥の地” 代数幾何のみならず、4 次元トポロジーでも大活躍します。著者は高次群論の起ち上げにあたって、**交点理論と退化理論の類似物が高次群論の幾何学にもあるはずと推測し、それらを構築することが高次群論が成立するかどうかの試金石**、と考えていました。幸いなことに、両理論の “類似物” を構築できました。以下では、これらのさわりの部分を解説します。この節では、まずは交点理論に対する準備から始めます。

ベズーの定理の特別な場合と群論の両側コセットの位数公式の対照

両側コセット HaK の位数公式 $|HaK| = |H||K|/|H \cap K^a|$ を書き換えたものと、複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の代数曲線 C と D の交点に関するベズーの定理の特別な場合 (C と D が同じ tangency

で交わるとき—つまり、どの交点も同じ交差重複度を持つとき) の類似性に注意します：

代数幾何	群論
ベズーの定理の特別な場合	両側コセットの位数公式
$\deg C \deg D = n\lvert C\cap D\rvert$	$\lvert H\rvert\lvert K\rvert = m\lvert H\cap K^a\rvert$
ここで n は共通の交差重複度、	ここで $m := \lvert HaK\rvert$,
$\deg C$, $\deg D$ は C, D の次数	$K^a := aKa^{-1}$（共役）

ベズーの定理の一般の場合と高次群論の位数公式の対照

一般のベズーの定理に対応する群論サイドの公式は何でしょうか？これを述べる前に、まずベズーの定理を復習しておきます。複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の中の代数曲線 C と D の交点たちの交差重複度の集合を $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ とし、交差重複度が n_j である交点の個数を $|C\cap D|_j$ と書くことにします。このとき、ベズーの定理は次の等式です：

$$\deg C \deg D = \sum_{j=1}^{k} n_j |C\cap D|_j. \tag{2.1}$$

これに対応する公式は（既存の）群論には存在しません。高次群論で初めて定式化されて示されます。まず、ベズーの定理の特別な場合が両側コセット HaK の位数公式に対応しているので、HaK を一般化したものを考えます。具体的には、a を G の（任意の）部分集合 A で置き換えた $HAK = \{hak : h\in H, a\in A, k\in K\}$ を考えます。これは古典的な群論の範疇には入っておらず、高次群論で初めて現れる対象です。また、HAK は単なる集合ではなく、“両側作用” を持ちます—H と K の左右からの掛け算：

$$\begin{aligned} &H \curvearrowright HAK \curvearrowleft K, \\ &hak \longmapsto (uh)a(kv) \quad (u\in H,\, v\in K). \end{aligned} \tag{2.2}$$

この両側作用の軌道分解として、両側コセット分解 $HAK = \coprod_{i\in I} Ha^{(i)}K$ が得られます。このとき、各 $Ha^{(i)}K$ の**重複度** $m^{(i)}$（自然数）が定義されます—これは普遍シナジー $\pi : H\times A\times K \to HAK$, $\pi(h,a,k) = hak$ を経由して定めます（詳しくは [Ta10] 参照)。さて、HAK が有限の場合（たとえば、G が有限群のとき)、両側コセット分解は有限和です。このとき、$|H||A||K| = \sum_{i\in I} m^{(i)}|H\cap K^{a^{(i)}}|$ が成り立ちます（**ベズー型定理** [Ta10])。

代数幾何	高次群論
ベズーの定理	ベズー型定理 [Ta10]
$\deg C \deg D = \sum_{j=1}^{k} n_j \lvert C\cap D\rvert_j$	$\lvert H\rvert\lvert A\rvert\lvert K\rvert = \sum_{i\in I} m^{(i)}\lvert H\cap K^{a^{(i)}}\rvert$

相乗位数公式 (synergic order formula)

[Ta11] ではさらに、ベズー型定理の一般化であるさまざまな公式を導出しました。たとえば、上の HAK の A を G の（任意の）部分集合の積 $A_1A_2\cdots A_l$ で置き換えた $HA_1A_2\cdots A_lK$（**ギルド**）

を考えます。HAK と同様に、これは両側コセット分解 $HA_1A_2\cdots A_lK = \coprod_{i\in I} Ha^{(i)}K$ をもち、各 $Ha^{(i)}K$ の**重複度** $m^{(i)}$ が定義されます（これは、普遍シナジー $\pi : H\times A_1\times A_2\times\cdots\times A_l\times K \to HA_1A_2\cdots A_lK$ を経由して定めます [Ta11]）。このとき、次が成り立ちます [Ta11]：

$$\textbf{相乗位数公式} \qquad |H||A_1||A_2|\cdots|A_l||K| = \sum_{i\in I} m^{(i)}|H\cap K^{a^{(i)}}|. \tag{2.3}$$

相乗位数公式の亜種

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ を群 G の部分群とし、セクト $H_1H_2\cdots H_n$ を考えます。これに対しては、相乗位数公式 (2.3) は $|H_1||H_2|\cdots|H_n| = \sum_{i\in I} m^{(i)}|H_1\cap H_n^{a^{(i)}}|$ で与えられます。実は、$|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を表す公式は、これ以外にもさまざまなバリエーションがあります。たとえば、次の “混合型” 相乗位数公式：

例 2.1. シナジー $\eta_1 : H_1\times H_2\times H_3 \to H_1H_2H_3$ とシナジー $\eta_2 : H_4\times H_5\times H_6\times H_7 \to H_4H_5H_6H_7$ を「くっつけた」シナジー η を考えます（下の underbrace は “縮約する・された” を表す）：

$$\eta : \underbrace{H_1\times H_2\times H_3}\times\underbrace{H_4\times H_5\times H_6\times H_7} \to \underbrace{H_1H_2H_3}\times\underbrace{H_4H_5H_6H_7}.$$

これから “混合型” 相乗位相公式が得られます:

$$|H_1||H_2||H_3||H_4||H_5||H_6||H_7| = \Big(\sum_{i\in I} m^{(i)}|H_1\cap H_3^{\alpha^{(i)}}|\Big)\Big(\sum_{j\in J} n^{(j)}|H_4\cap H_7^{\beta^{(j)}}|\Big).$$

補足 2.2. 部分群の位数に関する公式は、たとえばシローの定理があります：p シロー群 S_p に対し、$|S_p| \equiv 1 \bmod p \equiv 1$. しかし、部分群の「位数積」に対するシステマティックな公式は今までなかったようです。著者の得た「位数積」に関する一連の公式は、シナジーを経由して定式化・導出されるため、高次群論の登場を待たねばならなかったのです。

余談. 部分群の「位数積」についての公式を書いていて、**原田予想**—有限群 G の既約表現たちの次元を $d_1, d_2, \ldots, d_l$ とすると、「次元積」$d_1d_2\cdots d_l$ は $|G|$ を割り切る—を思い出しました。

相乗チャウ環 (synergic Chow ring)

上で述べたように、部分群の位数積 $|H_1||H_2|\cdots|H_n|$ を「重み付き位数和」で表す相乗位数公式はさまざまなバリエーションがあります。このことは、**群 G の有限部分群たちの位数の集合が、単なる自然数の集まりではなく、さまざまな arithmetic relations を持つ**ことを意味します。これら arithmetic relations を「関係式」に持つ環として、高次群論版のチャウ環 (Chow ring) を構成しました [Ta13]。まず、群 G の有限部分群全体のなす集合を $\mathrm{Sgr_{fin}}(G)$ で表します。$H \in \mathrm{Sgr_{fin}}(G)$ に対し、形式的な記号 “シンボル” X_H を対応させ、X_H $(H \in \mathrm{Sgr_{fin}}(G))$ たちが生成する $\mathbb{Z}$-algebra を考えます。ここで、X_H と X_K の積は $X_H\cdot X_K := |HK|X_{H\cap K}$ で定めます—これは両側コセットの位数公式 $|H||K| = |HK||H\cap K|$ に対応。また、関係式は相乗位数公式（およびそのバリエーション）に基づいて入れます。こうして得られた $\mathbb{Z}$-algebra は代数幾何のチャウ環[6](Chow ring) の類似物になっています。

[6]代数多様体 V のチャウ環 $Ch(V)$ は、V の部分代数多様体で（形式的に）生成される $\mathbb{Z}$-algebra を有理同値で割ったもの。

定義 2.3. 上で構成した環を、群 G の**相乗チャウ環** (synergic Chow ring) と言い、$SCh(G)$ と表す。

この環は、群 G の有限部分群たちの交わりの高次群論の観点からの complexity を反映していて、群 G の組み合わせ的性質が encode されています。なお、群 G 自身が非可換でも、相乗チャウ環 $SCh(G)$ はアーベル化されているので扱いやすくなっています。また、$SCh(G)$ は群 G の新しい不変量になっています。

3 高次群論における "退化理論"

体の幾何 vs. 群の幾何

体と群の大きな違いのひとつは、前者は単位元と零元を持ちますが、後者は単位元しか持たないことです。このことは、「体の幾何」と「群の幾何」との違いにも反映されます。まずはシンプルな例で説明します。$\mathbb{R}^2$ の中の双曲線 $xy = r$ の族は $r = 0$（$\mathbb{R}$ の零元）において退化し、特異点を持つ曲線 "十字架" になります（図 1)。一方、$r = 1$（$\mathbb{R}$ の単位元）では退化は起こっていません。（注：この族 $xy = r$ $(r \in \mathbb{R})$ を「複素化」した複素双曲線族 $zw = t$ in $\mathbb{C}^2$ $(t \in \mathbb{C})$ は、レフシェッツ束の特殊ファイバーの（特異点のまわりの）局所モデルです。）

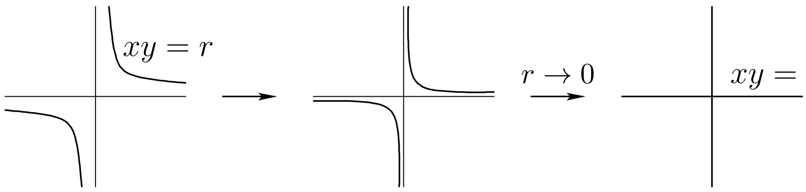

図 1:

次に、群 G 上で同じような族を考えてみましょう。直積 $G^2 := G \times G$ の中の**群論版双曲線** $xy = r$ $(r \in G)$ を考えます。つまり $C_r := \{(x, y) \in G \times G : xy = r\}$ を考えます。族 C_r $(r \in G)$ は、正確には掛け算写像 $\pi : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ により定式化されます—ファイバー $\pi^{-1}(r)$ が C_r.

問題 族 C_r $(r \in G)$ は、$r = e$（単位元）で退化するでしょうか？

当面の答えは No です（実は、あとで別の観点から Yes となるのですが)。次が成り立ちます：

命題 3.1. $r \in G$ によらず、$C_r \cong G$ (bijective). したがって、いかなる $r \in G$ に対しても退化は起こっていない。

証明. $xy = r$ を y について解くと、$y = x^{-1}r$. したがって、$C_r = \{(x, x^{-1}r) : x \in G\}$ と書き直せます。これは G に（集合として）bijective です。実際、$f_r : x \in G \longmapsto (x, x^{-1}r) \in C_r$ は bijection です。 □

注意しておくと、上の写像 $f_r : G \to C_r$ はあくまで（集合間の）bijection であり、群の isomorphism とは限りません—そもそも C_r は一般に群になっていません（$G \times G$ の単なる部分集合)。今まで $G \times G$ の群構造に言及しませんでしたが、$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) := (g_1 g'_1, g'_2 g_2)$ により群構造

を入れます[7] (単位元は (e,e)). このとき、C_r $(r \neq e)$ は $G \times G$ の部分群になっていませんが、$C_e = \{(g, g^{-1}) : g \in G\}$ は $G \times G$ の部分群になっています。**つまり、$\pi : G \times G \to G$ のファイバーのうち、C_e は「特殊な」ファイバーです。**

	体の幾何	群の幾何
双曲線	$xy = r$ $(r \in \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^2$	$xy = r$ $(r \in G)$ in G^2
特殊ファイバーの有無	ただ一つ有り	一見すると無し（実はただ一つ有り）
零元上のファイバー	$r = 0$ で十字架に退化	零元自体が無し
単位元上でのファイバー	$r = 1$ で退化しない	$r = e$ で、実は ‘退化’ している —部分群になっている

体の拡大 vs. 群の縮小

「実の」双曲線族 $xy = r$ $(r \in \mathbb{R})$ を「複素化した」族 $zw = t$ $(t \in \mathbb{C})$ は体の拡大「$\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ へ」で得られますが、幾何的には、実双曲線を「グルっと回して」得られます[8] 。この複素双曲線族 $zw = t$ $(t \in \mathbb{C})$ は、$t \to 0$ のとき図 2 のように退化します（レフシェッツ束の局所モデル)。

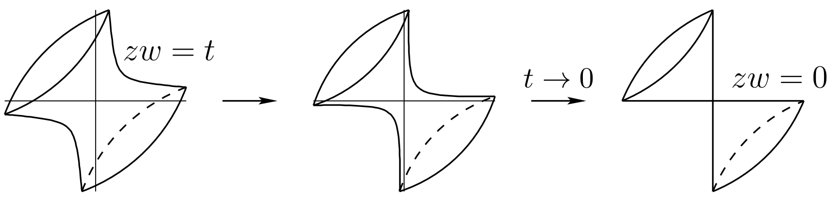

図 2: 複素双曲線 $zw = t$ の族 ($t \in \mathbb{C}$ はパラメータ). この図の “実断面” が図 1。

上では、実双曲線族から複素双曲線族へ話を広げましたが、これは代数的には「実数」から「複素数」への体の拡大で得られています。では、$G \times G$ の中の「群論版双曲線族」を ‘一般化’ するにはどうすればいいでしょうか？ 逆説的ですが、群を縮小します。つまり、G の部分群 H と K を取り、$H \times K$ の中の「群論版双曲線族」を考えます：$C_t := \{(h,k) \in H \times K : hk = t\}$ $(t \in HK)$. ここで、パラメータ空間 $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ は G の中の（長さ 2 の）セクトです。族 C_t $(t \in HK)$ は、正確にはシナジー $\pi : H \times K \to HK$, $(h,k) \mapsto hk$ により定式化されます—各ファイバー $\pi^{-1}(t)$ $(t \in HK)$ が群論版双曲線 C_t. 次に、$H \times K$ に群構造を $(h,k) \cdot (h', k') := (hh', k'k)$ で定めます[9] (単位元は (e,e)).

定義 3.2. ファイバー $\pi^{-1}(t)$ $(t \in HK)$ が $H \times K$ の部分群になっているとき、**特殊ファイバー**と言う。

[7]つまり、直積群 $G \times G^{\mathrm{op}}$. ここで、G^{op} は、G の opposite group—集合としては G と一致して、群演算は G と反対になる：$g_1 * g_2 := g_2 g_1$.

[8]極座標表示 $z = xe^{\mathrm{i}\alpha}, w = ye^{\mathrm{i}\beta}, t = re^{\mathrm{i}\theta}$ を取ると (θ は固定)、$zw = t$ の実部、虚部はそれぞれ $xy = r$, $e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = e^{\mathrm{i}\theta}$. 前者は実双曲線。また、後者より $\alpha+\beta \equiv \theta \bmod 2\pi$, つまり $\beta \equiv -\alpha+\theta \bmod 2\pi$. したがって、$(z,w) = (xe^{\mathrm{i}\alpha}, ye^{\mathrm{i}(-\alpha+\theta)})$. ここで、回転パラメータは α のみ（θ は固定されている)。「α を 0 から 2π まで動かす」というのが実双曲線 $xy = r$ を「グルッと回す」ということ。こうして複素双曲線 $zw = t$ ができる。

[9]つまり、直積群 $H \times K^{\mathrm{op}}$ （直積群 $H \times K$ ではない)。ここで、K^{op} は K の opposite group.

単位元 $e = ee \in HK$ 上のファイバー $\pi^{-1}(e) = \{(h, h^{-1}) : h \in H \cap K\}$ は $H \times K$ の部分群です。したがって、特殊ファイバーです（これ以外に π の特殊ファイバーは存在しません)。

高次元双曲線の族

複素双曲線族 $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : zw = t\}$ $(t \in \mathbb{C})$ は次のように高次元化されます：$\{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1 z_2 \cdots z_n = t\}$ $(t \in \mathbb{C})$. 正確には、この族は写像 $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto z_1 z_2 \cdots z_n$ により定式化されます—各 $t \in \mathbb{C}$ 上のファイバー $\pi^{-1}(t)$ が高次元複素双曲線 $z_1 z_2 \cdots z_n = t$. われわれの群論版双曲線族 $\pi : H \times K \to HK$, $(h, k) \mapsto hk$ の '高次元化' は、セクト HK をより一般に、ギルド $HA_1A_2 \cdots A_nK$ (A_i は G の任意の部分集合) に取り換えて、その普遍シナジーで与えられます：

$$\begin{aligned} \pi : H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K &\longrightarrow HA_1A_2 \cdots A_nK, \\ (h, a_1, a_2, \ldots, a_n, k) &\longmapsto ha_1a_2 \cdots a_nk. \end{aligned} \tag{3.1}$$

これの各ファイバー $\pi^{-1}(t)$ $(t \in HA_1A_2 \cdots A_nK)$ が、群論版の '高次元' 双曲線 $ha_1a_2 \cdots a_nk = t$ です。以下では簡単のため $\vec{a} := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と表し、次の分解—**source 分解**—を考えます：

$$H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K = \coprod_{\vec{a} \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n} H \times \{\vec{a}\} \times K. \tag{3.2}$$

各 **source 成分** $H \times \{\vec{a}\} \times K$ には、群構造を次の演算で定めます：$(h, \vec{a}, k) \cdot (h', \vec{a}, k') := (hh', \vec{a}, k'k)$. 単位元は $(e, \vec{a}, e)$. これにより、$H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ には **piecewise group structure** が入ります。

定義 3.3. ファイバー $\pi^{-1}(t)$ $(t \in HA_1A_2 \cdots A_nK)$ が、piecewise group $H \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times K$ の piecewise subgroup になっているとき、**特殊ファイバー**と言う。

これは普遍シナジーに対する特殊ファイバーの定義ですが、**[Ta12] では特殊ファイバーを一般のシナジーに対しても定義し、さらに特殊ファイバーを（その位置も含めて）完全に決定しました。**

4　結び

"創発現象" という言葉があります。数多くのものの連携・協同や相互作用から—無秩序で複雑な相互作用からでさえ—個々のものからは想像できないような organize された "秩序" が発現する現象です。**著者は、高次群論の幾何を "創発現象" として捉えています**—群のさまざまな元たちあるいは部分群たち、コセットたち、さらには群の部分集合たちのあいだの非常に複雑な相互作用（ミクロ積・マクロ積）から "秩序ある構造" として生じるのが、高次群論の幾何です。

> 理論自体は、自然現象のように "勝手に" 発現することはなく、創造しようとする者が、自ら未開の原野を泥まみれになって匍匐(ほふく)前進を繰り返し、アイデアを乱射しながら少しずつ「形にしていく」。ときおり暗闇を切り裂く閃光に導かれながら。

同じ景色を描いていても、遠近法で描かれた景色とそうでない景色は違って見えます。たとえば、同じ江戸の町を描いていても、広重の浮世絵『江戸百景』は、それまでに描かれた江戸とはまったく違い、広がりや奥行きを感じさせます。**数学においても、どういう切り口で見るかで広がりや奥行きが変わってきます。**本稿の内容に即して言えば、群の「n 項演算」をどういう切り口で新たに見るかで "群の景色" が変わります。これまで説明してきたように、高次群論では「n 項演算」に幾何的視点を持ち込んで、機械的な操作という軛（くびき）から解き放ちます—単なる計算規則とみるのではなく、幾何的描像をもつ「シナジー」として扱います。すると、"群の景色" が広がり、新たな幾何的奥行きをもち始めます。

> **n 項演算を代数的に "ルーチーンに" 漫然と捉えるのではなく、攻めの姿勢（?）で「定性的」かつ「幾何的」に記述する—それが高次群論の精神です。**

補足 4.1. シナジーの導入に際しては、「先入観」という難所があり、おおかたの反応はそれに基づいたものでした。著者の別の仕事、線形商族[10]の導入に際しても同じような初期反応がありました—「こんなものは商写像の例として昔からよく知られている。いまさら "導入" する意味なんてない」というものでした。しかし、**昔からあるから「もうわかったもの」と思い込むのは、研究姿勢としてアウト**です。**著者の仕事の眼目は**

> まず、抽象的な概念として線形商族を "取り出して" 独立させて—それまでは行き当たりばったり散発的に考察されるだけの段階（未概念化）—次に、線形商族を体系的に理論化して幾何的な息吹（いぶき）を与えて、それを軸としてさまざまなモジュライ空間の線形近似を行う枠組みを与えた [Ta3], [HiTa3]。応用として、リーマン面のモジュライ空間の「アトラス」の作成プロジェクト [HiTa4] やフェルマー曲線に関する平川の仕事 [Hi] などがある。

ちなみに、著者が創った数学理論は三つあります。1. リーマン面の退化族の分裂理論 [Ta1]。2. 線形商族の理論 [Ta3], [高村 1], [高村 2]。3. 高次群論。1 は代数幾何の有名問題—Miles Reid の提出したモース化問題 (別名 atomic fiber problem)—を扱っているため、最初から反応は良かったですが、2, 3 はそういった「権威」とは無縁ということもあり、最初の反応はあまり良くはありませんでした。

高次群論では、シナジーを記述すること（たとえば、ファイバーがどうなっているか）を研究の前面に押し出します。そのフィードバックとして、もともとの「n 項演算」の新たな性質を引き出します。さらに、個々の群のシナジーの考察にとどまらず、異なる群のシナジーたちを "一斉に" 考えます。つまり、シナジーの圏を考察します。

【高次群論のシナリオ】

(i) 群 G の「n 項演算」をすべての $n = 2, 3, 4, \ldots$ に対して考えるだけではなく、さらに、G のすべての部分集合に対しても、「n 項演算」を考える。これらは、群 G の大量の情報を含んでいる。

(ii) (i) において、「n 項演算」を機械的な計算規則と捉えるのではなく、シナジーとして定性的かつ幾何的に記述する。

(iii) 群ごとの (i) と (ii) の考察を、圏論的に拡張する—異なる群のシナジーたちを、準同型を通じて結びつけ圏として考える。

[10] 線形商族は次のように定義されます。空間 M への群作用 $G \curvearrowright M$ と G の表現 $\rho : G \to GL(V)$ から群作用 $G \curvearrowright M \times V$ が $g : (m, v) \mapsto (gm, \rho(g)v)$ により定まる。このとき、射影 $\mathrm{pr} : M \times V \to V$ は G 同変ゆえ、商写像 $\overline{\mathrm{pr}} : (M \times V)/G \to V/G$ が定まる。これを**線形商族**と言う。

【高次群論の精神】　ワンフレーズで言うと、

代数（n 項演算）を、シナジーとして幾何で洞察する。

つまり、**高次群論の精神は “代数と幾何を融合するデカルトの精神” と合致します**。高次群論において、代数幾何のベズーの定理の類似物などが（位相すらなくても）成り立っているのは、高次群論と代数幾何の根源的な精神が一致しているからかもしれません。その一方で、代数幾何と高次群論の間には根源的な手法において大きな違いが横たわっています—前者は「層」に依拠し、後者は「シナジー」に依拠します。以下では、この違いを “必然性” の立場から眺めてみます。

「必然」の帰結：層とシナジー

数学における概念で、淘汰されずに残り続けているものは「必然」に守られています。層の概念は、複素多様体論や代数幾何学において「必然」の産物です。実際、コンパクトな複素多様体上の正則関数は（最大値の原理より）定数関数しか存在しないので、大局的な正則関数を考える意味がないです。しかし、局所的な正則関数はたくさんあります。したがって、「局所ごと」の正則関数たちの「つながり具合」を把握しようと努めるのは自然です。これを定式化したものが「層」です。しかるに、群の場合は「局所」は（特殊な群を除いて）意味をもたないので、「層」のような定式化はうまく行きません—「必然」に乏しく、安易な「アナロジー」の発想に過ぎません。では、群の場合の「必然」は何なのでしょうか？ シナジーを振り返ってみましょう。シナジーは次のようにマクロ積の部分とミクロ積の部分から成ります：

$$\eta\colon\ \underbrace{S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \longrightarrow S_1 S_2 \cdots S_n}_{\text{マクロ積}}, \qquad \underbrace{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \longmapsto s_1 s_2 \cdots s_n}_{\text{ミクロ積}}. \tag{4.1}$$

著者は、この「ミクロ積・マクロ積の対応」が群の場合の「必然」と考えています。その理由は次の通りです：

> 数学の発展を振り返ると、「整数」から「有理数」、「実数」、さらに「複素数」へと演算（和・積）を保ちながら拡張されています。そして、「整数」の性質を単に「整数」の中で “自己完結的に” 考察するのではなく、ずっと広い「複素数」の中で考察することにより、新たな性質が捉えられています（たとえば、ゼータ関数の特殊値など）。このことを鑑（かんが）みれば、「ミクロ積」の性質を “自己完結的に” 考察するのではなく、群の「ミクロ積」を「マクロ積」まで拡張して、ずっと広い「マクロ積」の中で考察する方が、「ミクロ積」の新たな性質を捉えられることが期待できます—その結果、群そのものについても新たな知見を得ることが期待されます。それゆえ高次群論では、（層の理論の「局所・大局の対応」のかわりに）**「ミクロ積・マクロ積の対応」、つまりシナジーを考察の軸とするのです。**

シナジーの定義はとてもシンプルです。層の定義と比べると、その定義の単純性はきわだっています。ですが、その包摂する幾何的内容はとても深く豊かです。難解な概念を好む人もいますが、著者は簡単で素朴な概念の方に惹かれます—それもシンプルであればシンプルであるほど、もっと言えばバカバカしいぐらい単純な概念に惹かれます。実際、代数の基盤的概念の定義は、群も、環も、体もすべて超シンプルです。その超シンプルさが、末広がりの発展性を担保してきたわけ

です。一方、数学のみならず生物進化においても、複雑になりすぎた種は、進化の袋小路、つまりどん詰まりに位置し、もはや発展の余地は少なく、新たに興ったシンプルな種に取って代わられることがしばしば起こります。それゆえ、**著者が研究において重視しているのは、シンプル過ぎるぐらいシンプルな概念の追求と、その概念に<u>“幾何の息吹” を与える</u>ことです。**シナジーはまさにこれを体現しています。ちなみに、著者の恩師 W. Goldman 氏の決めゼリフは次でした：

“Everything is geometry!”

参考文献

[EiHa] D. Eisenbud, and J. Harris, *The Geometry of Schemes,* Springer-Verlag (1999)

[Fu] W. Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry,* AMS. (1984)

[Hi] R. Hirakawa, *Stabilizer posets and the local moduli of Fermat curves,* Tokyo J. Math. **46**, (2) (2023), 425–463

[HiSaTa] R. Hirakawa, K. Sasaki, and S. Takamura, *Poset-blowdowns of generalized quaternion groups,* Int. J. Group Theory 13 (2) (2024), 133–160

[HiTa1] R. Hirakawa, and S. Takamura, *Degenerations of Riemann surfaces associated with the regular polyhedra and the soccer ball,* J. Math. Soc. Japan **69** No.3 (2017), 1213–1233

[HiTa2] ———, *Quotient families of elliptic curves associated with representations of dihedral groups,* Publ. RIMS. **55** no.2 (2019), 319–367

[HiTa3] ———, *Linear quotient families and stabilizer posets,* Kodai Math. J. **48** (2025) 145–177

[HiTa4] ———, *Atlas for Moduli Geometry of Riemann Surfaces,* Preprint, (2025)

[齋籐] 齋籐利弥, “力学系以前　ポアンカレを読む”, 数セミ・ブックス 日本評論社 (1984)

[高村 1] 高村茂, *Representations of finite groups, quotient families, and regular polyhedra* (in Japanese), Symposium on topology of manifolds (2014), 7 ページ
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kiyonok/ym2014/takamura.pdf`

[高村 2] ———, “商族の幾何学 (有限群の作用と表現, ファイブレーション, モジュライ空間) ”, 『第 14 回城崎新人セミナー』(2017 年 2 月), 13 ページ
`https://drive.google.com/file/d/1ieFR4Cof5Rb69nUutaRxYoxUEHIAB8hC/view`

[高村 3] ———, “群の高次構造とその同伴ファイブレーション—高次群論とその幾何学事始め”, 研究集会『変換群の幾何とトポロジー』 (2023 年 6 月), 数理研講究録 2276 (2024), pp.94–117
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2276-11.pdf`

[高村 4] ———, “高次群論とその幾何学”, 研究集会『有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究』(2023 年 12 月), 数理研講究録 2287 (2024), pp.105–119
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2287-14.pdf`

[高村 5] ———, *On higher group theory and its geometry* (in Japanese), 松本幸夫先生 80 歳記念研究集会 『多様体のトポロジーの進展』 (2024 年 11 月), 10 ページ
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/progress/takamura.pdf`

[高村 6] ———, “群の高次構造とその幾何学”, 研究集会 『有限群のコホモロジー論とその周辺』 (2024 年 2 月), 数理研講究録 2306 (2025), pp.86–101
`https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2306-13.pdf`

[高村 7] ———, “高次群論とその幾何学 II”, 研究集会 『有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究』 (2024 年 12 月), 数理研講究録

[Ta1] Shigeru Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, I,* (*Splitting criteria via configurations of singular fibers*)*,* J. Math. Soc. Japan **56** (1) (2004) 115–145

[Ta2] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, III,* (*Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*)*,* Springer Lecture Notes in Math. **1886** (2006)

[Ta3] ———, *Linearization of quotient families,* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **26** (2019), 361–389

[Ta4] ———, *Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams,* Osaka J. Math. **58** (4) (2021), 885–897

[Ta5] ———, *Blowdown maps between subgroup posets,* Tokyo J. of Math. **45** (2) (2022), 467–499

[Ta6] ———, *Prime factorizations of finite groups, I,* Advances in Group Theory and Applications **19** (2024) 1–55

[Ta7] ———, *Prime factorizations of finite groups, II,* Advances in Group Theory and Applications **21** (2025) 11–109

[Ta8] ———, *Prime factorizations of finite groups, III,* (2023), to appear in Advances in Group Theory and Applications

[Ta9] ———, *The orders of subgroup products and coset products,* Transactions on Combinatorics **14** (2025) 223–250

[Ta10] ———, *Bézout type theorem for higher order objects of groups,* (2024), to appear in Osaka J. Math.

[Ta11] ———, *Geometry and combinatorics for higher order objects of groups,* (2025), Preprint

[Ta12] ———, *Lefschetz fibrations for groups and their special fibers,* (2025), Preprint

[Ta13] ———, *Intersection theory for groups and their Chow rings,* in preparation

[上野] 上野健爾, “現代数学の歩み 60 年　代数幾何学の歩みを中心にして”,
科学基礎論研究 43 巻 1・2 号特集「数学と論理学の 60 年」(2016) p.3–15
`https://www.jstage.jst.go.jp/article/kisoron/43/1-2/43_KJ00010256962/_pdf/-char/ja`