Gromov-Hausdorff convergence of Delzant polytopes and toric symplectic manifolds

日本女子大学理学部
藤田玄
Hajime Fujita
Faculty of Natural Science,
Japan Women's University

1 概要

本稿は 2025 年度 RIMS 共同研究「変換群論の新しい展開」における筆者の講演内容 ([5] を含む北別府悠氏 (熊本大学) と三石史人氏 (福岡大学) との共同研究) に基づいたものである.

トーリックシンプレクティック多様体はシンプレクティック多様体の中でもとりわけ対称性の高いクラスをなす. その基本性質として, 運動量写像の像として得られる Delzant 多面体が完全不変量となるという事実がある. この事実により, トーリックシンプレクティック多様体全体 (のある同型類) の集合と Delzant 多面体 (のある同型類) の集合の間の 1 対 1 対応が得られる. 特に, 与えられた Delzant 多面体からトーリックシンプレクティック多様体を構成する手続きとして **Delzant 構成**が知られている. この対応により, トーリックシンプレクティック多様体の幾何/トポロジー的情報と Delzant 多面体の組み合わせ/トポロジー的な情報の間の辞書が得られる. 例えば有名なものとして, Delzant 多面体から定まる Stanley-Reisner 環によるトーリックシンプレクティック多様体のコホモロジー環の記述がある. 本講演の研究の出発点は次のナイーヴな問である.

問. Delzant 構成はなんらかの意味で連続であろうか？

もちろん, このままでは問として意味をなさない. どのような位相のもとで連続性を議論するかを定める必要があるからである. 我々は Riemann 幾何/距離幾何的な観点からこの問題を考察する. より具体的には, トーリックシンプレクティック多様体/Delzant 多面体の間の (Gromov-)Hausdorff 距離を用いて連続性を考察する. 我々の研究目的は Delzant 構成が与える辞書を Riemann 幾何/距離幾何的な観点から補強することともいえる.

謝辞. 講演の機会を与えて下さり集会を円滑に運営して下さった津山高専の田村俊輔さんに感謝申し上げます.

本研究は科研費 (課題番号 24K06719) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 53D20, 53C55, 53C23
キーワード：Delzant polytope, toric Kähler manifold, Gromov-Hausdorff convergence

2 トーリックシンプレクティック多様体上の Kähler 構造

本節では, Guillemin, Abreu によるトーリックシンプレクティック多様体上の Kähler 構造の記述について述べる. まず, トーリックシンプレクティック多様体とは, n 次元コンパクトトーラス $T = T^n$ の効果的な Hamilton 作用をもつコンパクトで境界のない $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) のことであった. 定義により, 運動量写像 $\mu : M \to \mathrm{Lie}(T)^* \cong \mathbb{R}^n$ が存在する. 運動量写像の像 $P = \mu(M)$ は Delzant 多面体 [*1]となる.

トーリックシンプレクティック多様体について次の事実が知られている.

- P は軌道空間 M/T と同相であり, その同一視のもと $\mu : M \to P$ は商写像に一致する.
- P の内点集合 $P^\circ = \mathrm{int}(P)$ は主軌道 $(\cong T)$ をパラメトライズしている.
- $M^\circ := \mu^{-1}(P^\circ) \to P^\circ$ は主 T-束である. P° が可縮であることから, それは自明な T-束と同型である : $M^\circ \cong P^\circ \times T$.

逆に, $\mathbb{R}^n$ 内の Delzant 多面体 P が与えられた時, ある種のシンプレクティック商の手続きである Delzant 構成により P を運動量写像の像としてもつトーリックシンプレクティック多様体 $M = M_P$ を構成することができる. より具体的には, P の面の数を N とするとき, M は $\mathbb{C}^N$ への標準的な T^N 作用のある部分トーラス H_P に関するシンプレクティック商として得られる. 特に, M は Kähler 商として得られることから, $\mathbb{C}^N$ の標準 Kähler 構造から M に Kähler 構造が誘導される. この Kähler 構造の Riemann 計量を **Guillemin 計量**とよぶことにする. 以下, P は N 個の $\mathrm{Lie}(T)^* \cong \mathbb{R}^n$ 上の連立 1 次不等式

$$l^{(i)}(\cdot) = \langle \nu^{(i)}, \cdot \rangle + \lambda^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

により定義されているとする. ただし, N は P の $n-1$ 次元面の数であり, $\nu^{(i)} \in (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathrm{Lie}(T)$ は面の内向き法ベクトル, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ と $\mathbb{R}^n$ の自然なペアリング, $\lambda^{(i)} \in \mathbb{R}$ とする. Guillemin 計量は次のように具体的に記述することができる.

定理 2.1 ([6]). P から定まる Guillemin 計量は同一視 $M \cong P^\circ \times T$ のもとで,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Hess}(\varphi_P) & 0 \\ 0 & (\mathrm{Hess}(\varphi_P))^{-1} \end{pmatrix}$$

で表される. ただし, $\varphi_P : P^\circ \to \mathbb{R}$ は

$$\varphi_P(\xi) := \sum_{i=1}^{N} l^{(i)}(\xi) \log l^{(i)}(\xi) \quad (\xi \in P^\circ)$$

[*1] $\mathbb{R}^n$ 内の凸多面体が **Delzant 多面体**であるとは, 各頂点に n 本の辺が入り, それらの方向ベクトルが有理ベクトルでとれ, 方向ベクトルを整数ベクトルにしたものが $\mathbb{Z}^n$ の基底となる, という 3 つの条件をみたすときをいう.

により定義され, **Guillemin ポテンシャル**とよばれる.

Abreu はより一般のトーラス作用で不変な Kähler 構造を考察しその記述を得た.

定理 2.2 ([1])**.** Delzant 多面体 P から構成されるトーリックシンプレクティック多様体 $M = M_P$ の任意のトーラス作用で不変な Kähler 構造の Riemann 計量は自明化 $M^\circ \cong P^\circ \times T$ のもとである凸関数 $\varphi : P^\circ \to \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Hess}(\varphi) & 0 \\ 0 & \mathrm{Hess}(\varphi)^{-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表すことができる. φ は以下をみたす.

- $\varphi - \varphi_P$ と $(\det \mathrm{Hess}(\varphi)) \left(\prod_{i=1}^N l_i \right)$ は P の開近傍上の滑らかな関数に拡張できる.

逆に, 上の条件をみたす任意の凸関数 $\varphi : P^\circ \to \mathbb{R}$ に対して (1) で定まる $P^\circ \times T$ 上の Riemann 計量は M_P 上の Kähler 構造を定める. φ は M の**シンプレクティックポテンシャル**とよばれる.

3 主定理

前節までの準備のもとで, 我々の主定理を述べる. それらは冒頭の問への回答の一種と考えられる. 我々は距離空間の収束概念として Hausdorff 収束と Gromov-Hausdorff 収束を用いる. 前者は距離空間の部分集合たちに対する外在的な収束概念であり, 後者はそれをある意味で内在化した距離空間そのものの収束概念である. また, 群作用に関する同変版や測度付き版の定式化もあり, Riemann 幾何あるいはより一般に測度距離空間の幾何学において活発に研究されている概念である. これらの概念の基礎については [2] や [3] を参照のこと.

定理 3.1 ([5])**.** $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を n 次元 Delzant 多面体の列, $\{\mu_i : M_i \to P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を対応するトーリックシンプレクティック多様体の列, P を n 次元 Delzant 多面体, $\mu : M \to P$ を対応するトーリックシンプレクティック多様体とする. 各 M_i および M には Guillemin 計量を考える. $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が P に $\mathbb{R}^n$ の Euclid 距離に関して Hausdorff 収束し, 十分大きい任意の i に対して P_i の面の数と P の面の数が一致しているとき, $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は M にトーラス同変 Gromov-Hausdorff 収束する.

注意 3.2. 定理 3.1 における「P_i の面の数と P の面の数が一致している」という仮定は $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の収束に比較的強い制約を与える. 具体的には, この仮定のもとでの Hausdorff 収束は P_i の面が平行移動をして P の面に収束するような例のみとなる. 一方で, 我々は P_i の面の傾きが変化しながら P に Hausdorff 収束するような例を知らない.

次の定理は定理 3.1 とは逆方向の連続性の一種である.

定理 3.3 ([5]). 定理 3.1 と同様の $\{\mu_i : M_i \to P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ および $\mu : M \to P$ に対して, $\sup_i \mathrm{Diam}(P_i) < \infty$ とすると, $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が M に測度付き同変 Gromov-Hausdorff 収束するとき,

$$\liminf_i \chi(M_i) \geq \chi(M)$$

となる. ただし, $\chi(\cdot)$ は Euler 標数であり, 各 M_i および M にはシンプレクティック形式から定まる体積測度を考える.

注意 3.4. Riemann 多様体あるいは (測度付き) 距離空間の列の収束のもとで, それらの位相不変量が連続的に振る舞うかという考察は基本的なものである. その種の議論では Ricci 曲率や断面曲率に類する曲率の有界性が仮定されることが多い. 我々の定理 3.3 ではその種の仮定を置いていない.

4 さらなる展開に向けて

定理 3.1 の逆という意味では,

「$\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$が M に収束するとき, $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$が P に収束する」

という形の主張を考えるのが自然であろう. しかし, 多面体の収束として Hausdorf 収束を考えている限りは字面通りの意味では定理 3.1 の逆は成立しない. 運動量写像の平行移動による不定性のためである. しかし, 次はわかる.

命題 4.1 ([5]). 定理 3.1 と同様の $\{\mu_i : M_i \to P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ および $\mu : M \to P$ を考える. このとき, $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が M にトーラス同変 Gromov-Hausdorff 収束するなら $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は P に Gromov-Hausdorff 収束する.

ここで, Delzant 多面体の距離構造として何を考えているか述べる必要がある. まず, Delzant 多面体 P 上にシンプレクティックポテンシャル φ を固定すると, P° 上に $\mathrm{Hess}(\varphi)$ により定まる Hesse 計量が導入され, 特に距離構造が導入される. このとき, $M_P^\circ \to P^\circ$ が Riemann 沈め込みであること, P が軌道空間 M_P/T と同相であることから, P° の Hesse 計量に関する距離完備化が P に M_P/T に商距離を入れたものと等長的であることがわかる. この考察を踏まえると, 命題 4.1 は [3, Theorem 2-1] の系として直ちに得られるものであるが, 概要で述べた Delzant 構成の連続性を議論する際は Delzant 多面体の収束概念としては Hausdorff 収束よりも Gromov-Hausdorff 収束を考える方が自然であることを示唆している.

すると, 定理 3.1 において $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の Hausdorff 収束でなく Gromov-Hausdorff 収束を仮定したものを考えたくなる. その方向性について現在議論をすすめている.

参考文献

[1] M. Abreu, *Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), 2003, pp. 1-24.

[2] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[3] K. Fukaya, *Theory of convergence for Riemannian orbifolds* , Japan. J. Math. Vol. 12 (1986), no. 1, 121-160.

[4] H. Fujita, Y. Kitabeppu and A. Mitsuishi. *Distance functions on convex bodies and sympelctic toric manifolds*, Nagoya Mathematical Journal. Published online 2025:1-23. doi:10.1017/nmj.2025.13

[5] V. Guillemin, *Kähler structures on toric varieties*, J. Differential Geom.40(1994), no.2, 285-309.