Morgan's mixed Hodge structures on p-filiform Lie algebras

大阪大学・理学研究科　下地　泰斗
Taito Shimoji
Department of Mathematics
The University of Osaka

1　概要

本稿は 2025 年度 RIMS 研究集会「変換群論の新展開」での [8] についての講演に基づいて作成された講究録である。

「どのような有限表示群が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題は *Serre* **の問題**と呼ばれている。この問題を捩れ自由な有限生成冪零群で考えたとき、リー代数のコホモロジーと次数付けを用いて研究できることを説明する。この研究方法により得られた結果と今後の展望について述べる。

1.1　謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の津山高専の田村俊輔さん、和歌山大学の川上智博さんに感謝申し上げます。また、研究集会にて興味深い質問をして下さった方々にも感謝申し上げます。

2　背景

2.1　Serre の問題

非特異複素代数多様体（射影的な場合も含む）の基本群は有限表示であることが知られている。ここで Γ が有限表示群とは群の表示 $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$ が存在して、生成元集合 S と関係式 R を有限にとれるような群のことである。

Serre は「すべての有限群が非特異複素射影代数多様体の基本群として実現できる」ことを示し [1]、一般に「どのような有限表示群（無限群）が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題を提示した。これは Serre の問題と呼ばれている。

例えば自由アーベル群について考える。可換群 $\mathbb{Z}$ は複素平面から原点を除いた集合 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ の基本群である。よって、任意の自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{C}^*$ の直積空間 $(\mathbb{C}^*)^n$ の基本群として表すことができる。

2.2 冪零リー群の格子に対する Serre の問題

可換性を少し複雑にしたものとして冪零な場合を考えたい。そこで「どのような捩れ自由な有限生成冪零群が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題を考える。以下の定理が知られている。

定理 2.2.1 ([2],[6]). 任意の捩れ自由な有限生成冪零群は、ある単連結冪零リー群 N の格子 Γ と同型である。また、N の存在は同型を除いて一意的である。

さらに、単連結冪零リー群 N が格子 Γ を持つことと、$\mathfrak{n}$ のリー代数 $\mathfrak{n}$ の基底 $X_1, \ldots, X_n$ で $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$ と書いたとき、全ての i, j, k について $C_{ij}^k \in \mathbb{Q}$ が成立するものが存在することが同値である。つまり、N のリー代数 $\mathfrak{n}$ が有理リー代数の拡大として表せる。ここで、格子とは商空間がコンパクトであるような離散部分群のことである。

この定理から、捩れ自由な有限生成冪零群が非特異複素代数多様体の基本群となるかは、単連結冪零リー群（リー代数）を用いて研究できることが示唆される。本講演では次の問題を考える。

問題 2.2.2. どのような単連結冪零リー群の格子が非特異複素代数多様体の基本群となるか？

例 2.2.3. 例えば、離散ハイゼンベルグ群 $H_3(\mathbb{Z})$ を考える。これはハイゼンベルグ群 $H_3(\mathbb{R})$ の格子である。対応するリー代数 $\mathfrak{n}$ は基底 X_1, X_2, X_3 で $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = 0 = [X_2, X_3]$ を満たすように取れる。等質空間 $M = H_3(\mathbb{Z})\backslash H_3(\mathbb{R})$ の錘 $C(M) = H_3(\mathbb{Z})\backslash H_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0}$ が非特異複素代数多様体の構造を持つことが知られている *([5])*。$C(M)$ の基本群は $H_3(\mathbb{Z})$ であるので、離散ハイゼンベルグ群についての *Serre* の問題は解決される。しかし、他の冪零な例については未だに多くのことが知られていない。

2.3 Morgan の判定法

Morgan は、非特異複素代数多様体の基本群が単連結冪零リー群の格子となるための必要条件を、対応するリー代数の次数付けとコホモロジーに関する条件を用いて記述した。N を単連結冪零リー群とし、非特異複素代数多様体 X の基本群が N の格子であると仮定する。N のリー代数 $\mathfrak{n}$ について以下が成り立つ。

定理 2.3.1 ([5]). 複素化 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ は次数付け $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i\leq -1} \mathfrak{n}_i$ を持ち、以下の二条件 **(W)**, **(H)** を満たす。

(W): 誘導される次数付け $H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{k\geq 0} H^j_k$ について以下が成立する。

$$H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H^1_1 \oplus H^1_2$$

$$H^2(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H^2_2 \oplus H^2_3 \oplus H^2_4.$$

(H): $k, l \in \mathbb{Z}, j = 1, 2$ に対し、部分空間たち $\mathfrak{n}_{2k+1}, H^j_{2l+1}$ の次元が偶数である。

条件 **(W)** は代数多様体の実係数コホモロジーの情報から従い, **(H)** は混合ホッジ構造の条件を用いたものである。上の定理から次が従う。

系 2.3.2. 有理リー代数の拡大として書ける冪零 $\mathbb{R}$-リー代数 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ の複素化が条件 **(W)**,**(H)** を満たす次数付けを持たなければ、対応する単連結冪零リー群 N の格子 Γ は非特異複素代数多様体の基本群とならない。

よって、非特異複素代数多様体の基本群となる単連結冪零リー群の格子の候補を、リー代数の次数付けとコホモロジーを調べることで絞れる。主定理では、冪零リー代数のあるクラスについて判定法を調べた。

3 主定理

定義 3.0.1. 冪零リー代数 $\mathfrak{n}$ が *p-filiform* であるとは降中心列 $\{C^i\mathfrak{n}\}$ について、すべての $1 \leq i \leq \dim\ \mathfrak{n} - p$ に対し

$$\dim\ C^i\mathfrak{n} = \dim\ \mathfrak{n} - p - i$$

が成立するときをいう。特に $p = 1$ のとき *filiform* と呼ばれている。また、$p = \dim\ \mathfrak{n} - 1$ であることと $\mathfrak{n}$ が可換リー代数であることが同値である。

以下が主定理である。

定理 3.0.2. *[8] p-filiform* リー代数 $\mathfrak{n}$ が条件 **(W)**,**(H)** を満たすような次数付けを持つための必要十分条件は

$$\dim\ \mathfrak{n} < p + 3$$

が成り立つこと。つまり、$p = \dim\ \mathfrak{n} - 1$ または $\dim\ \mathfrak{n} - 2$ となり、$\mathfrak{n}$ は可換リー代数または 2-ステップ冪零リー代数と同型である。

系 3.0.3. N を単連結冪零リー群とし、N のリー代数が *p-filiform* であると仮定する。このとき、非特異複素代数多様体 X の基本群 $\pi_1(X,x)$ が N の格子ならば、$\pi_1(X,x)$ は 2-ステップ冪零群または可換群である。

冪零リー代数の分類 ([3]) から、$p=1$ の場合を考えると以下が分かる。

系 3.0.4. N を単連結冪零リー群とし、N のリー代数が *filiform* であると仮定する。このとき、非特異複素代数多様体 X の基本群 $\pi_1(X,x)$ が N の格子ならば、$\pi_1(X,x)$ は離散ハイゼンベルグ群または可換群 $\mathbb{Z}^2$ と同型である。

例 3.0.5. n 次元リー代数 $\mathfrak{n}=\langle X_1,\dots,X_n\rangle$ を $[X_1,X_i]=X_{i+1}$ $(2\le i\le n-1)$, 他の $j<k$ に対して $[X_j,X_k]=0$ を満たすものとする。これは *filiform* であり、有理リー代数の拡大となっているので、対応する単連結冪零リー群 N は格子 Γ を持つ。上の定理より、条件 **(W), (H)** を満たす次数付けを持つためには $n=3$ であることが必要十分条件である。また、例 *2.2.3*から次が従う。

Γ がある非特異複素代数多様体の基本群となるための必要十分条件は $n=3$ である。

また、群の表示を用いた明示的な反例

$$L_n := \left\langle x_1,\dots,x_n \;\middle|\; \begin{array}{l} [x_1,x_i]=x_{i+1}\ (1\le i\le n-1) \\ 1=[x_1,x_n]=[x_j,x_k]\ (2\le j<k\le n) \end{array} \right\rangle \; \mathit{for}\ n\ge 4$$

を得る。

4 今後の展望

混合ホッジ構造の、二重次数付けを用いた言い換えがよく知られている。

定理 4.0.1 ([7])**.** (V,W,F) が混合ホッジ構造であることと、複素化 $V_{\mathbb{C}}$ が以下の条件を満たす二重次数付けを持つことは同値である。

$$\overline{V^{p,q}} = V^{q,p} \mod \bigoplus_{s+t<p+q} V^{s,t},$$

ここで、増大、減少フィルトレーション $W_{\mathbb{C}}, F$ は以下で与えられる。

$$W_i(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q\le i} V^{p,q}, \text{ and } F^i(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p\ge i, q\in\mathbb{Z}} V^{p,q}.$$

Morgan の判定条件を混合ホッジ構造（二重次数付け）の言葉で書き直す。

定理 4.0.2 ([5]). 複素化 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ は混合ホッジ構造の二重次数付け $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q\leq 0, p+q\leq -1} \mathfrak{n}_{p,q}$ を持ち、以下の条件 **(W)** を満たす。

(W): 誘導される二重次数付け $H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{s,t\geq 0, s+t\geq 1} H^j_{s,t}$ $(j=1,2)$ について以下が成立する。

$$H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H^1_{1,0} \oplus H^1_{0,1} \oplus H^1_{1,1}$$

$$H^2(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H^2_{2,0} \oplus H^2_{1,2} \oplus H^2_{0,2} \oplus H^2_{1,2} \oplus H^2_{2,1} \oplus H^2_{2,2}.$$

がともに混合ホッジ構造の二重次数付けである。つまり、$\overline{H^j_{p,q}} = H^j_{q,p} \bmod \bigoplus_{s+t<p+q} H^j_{s,t}$

注意 4.0.3. 上の設定の下で $\mathfrak{n}_i := \bigoplus_{p+q=i} \mathfrak{n}_{p,q}$ とおく。このとき、$\mathfrak{n} = \bigoplus_{i\leq -1} \mathfrak{n}_i$ は次数付きリー代数の構造を持つ。混合ホッジ構造の条件 $\overline{\mathfrak{n}_{p,q}} = \mathfrak{n}_{q,p} \bmod \bigoplus_{s+t<p+q} \mathfrak{n}^j_{s,t}$ から、$\dim \mathfrak{n}_{2k+1}$ が偶数であることが従う。これは次数付けの条件 **(H)** に相当する。誘導されるコホモロジーへの次数付けの条件 **(W)** もすぐわかる。したがって、定理 *2.3.1*は定理 *4.0.2*の必要条件である。

今後の展望として以下の問題を考える。

問題 4.0.4. 定理 *2.3.1*を満たすが定理 *4.0.2*を満たさないリー代数の例は存在するか？

問題 4.0.5. 定理 *4.0.2*を満たす冪零リー代数に関する必要十分条件を求めよ。

問題 4.0.6. 定理 *4.0.2*を満たす冪零リー代数に対応する単連結冪零リー群が格子 Γ を持つとする。このとき、Γ を基本群に持つ非特異複素代数多様体を構成せよ。

ここまで解決し、冪零リー群の格子に関する Serre の問題を解決することが目標である。

参考文献

[1] J.-P. Serre, *Sur la topologie des varietes algebriques en characteristique p*,*Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Universidad Nacional Autonoma de Mexico*, 1958, pp. 2453.

[2] A. I. Malcev *On a class of homogeneous spaces. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 13.* 1949.

[3] E.Hakavuori, V.Kivioja, T.Moisala F.Tripaldi, Gradings for nilpotent Lie algebras *Journal of Lie Theory* 32 (2022), 383–412.

[4] J.M. Cabezas, J.R. Gómez and A.Jimenez-Merchán. *Family of p-filiform Lie algebras . Algebra and Operator Theory, Proceedings of the Colloquium in Tashkent.* 93-102,1997.

[5] J.W. Morgan *The algebraic topology of smooth algebraic varieties. Inst. Éautes Etudes Sci.*. Publ.Math. No. **48** (1978), 137-204.

[6] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups. Springer-verlag.* New York, 1972.

[7] P. Deligne, Théorie de Hodge. II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **40** (1971), 5–57.

[8] T. Shimoji, Gradings on nilpotent Lie algebras associated with the nilpotent fundamental groups of smooth complex algebraic varieties. arXiv:25804.08571 (2025).