Modular law through GKM theory

大阪公立大学 佐藤 敬志
Osaka Metropolitan University

1 Introduction

Hessenberg function というもので添字付けられた代数的対象の族が、ある 3 項間漸化式を満たすとき、その族は modular law を満たすという。Hessenberg function には indifference graph というグラフが対応し、modular law はそのグラフに関する deletion-contraction formula の q-類似と見ることができる。このような意味で modular law は自然な法則であり、様々なところに現れうる。

Indifference graph の彩色対称関数の族はその 1 つである。また、Hessenberg 関数に対応する regular semisimple Hessenberg 多様体という vareties の族がある。これのコホモロジーには対称群が作用し、次数付き表現と見ることができる。このコホモロジーの族も modular law を満たす。そして、実はその 2 つの族は（involution 込みで）全くの同一のものであることが modular law を通して理解される。組合せ論的な対象と幾何学的な対象が結びつく重要な定理である。

本稿では、modular law について概説した後、regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジーが modular law を満たすことを説明する。この説明には GKM 理論と呼ばれる、トーラス作用の固定点と 1 次元軌道から空間のコホモロジーを決定できるという理論を用いる。

ここで、彩色対称関数と regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジーとの対応関係の歴史について述べておこう。この対応関係は Shareshian と Wachs [10] により予想され（2014 年 arXiv, 2016 年出版）、Brosnan と Chow [3]（2015 年 arXiv, 2018 年出版）、および Guay-Paquet[5]（2016 年 arXiv, 未出版）により独立に示された。2022 年に Abreu と Nigro が modular law の一般論を整理し [1]、それを用いて Kiem と Lee が 2024 年に対応関係の初等的な証明を与えた [8]。筆者は枡田幹也氏

と堀口達也氏との共同研究でこの初等的な証明を GKM 理論に触発されたアイデアを用いてより簡単なものとした [7]。これは通常の GKM 理論の範疇を超えた証明で、GKM 理論の 1 つの拡張の方向性を示している。

2　組合せ論的な対象

この節では、本稿における組合せ論的な登場人物である彩色対称関数と modular law について解説する。

2.1　indifference graph とその彩色多項式

まずは、Hessenberg function と indifference graph を定義しておこう。本稿では、$[n]$ で 1 から n までの自然数の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を表す。

定義 2.1. Hessenberg function $h\colon [n] \to [n]$ とは、任意の $j \in [n]$ で

$$h(j) \leq h(j+1) \ \text{および}\ h(j) \geq j$$

を満たす関数のことである。ただし、$j = n$ のとき、前者の条件は考慮しない。

Hessenberg function h をその値の列 $(h(1), h(2), \ldots, h(n))$ で表すことにする。さらに h を次の図のように対角線以下の箱と対応させた絵でも表すことにする。対応する絵では $j < i \leq h(j)$ を満たす (i, j)-成分の箱がある。

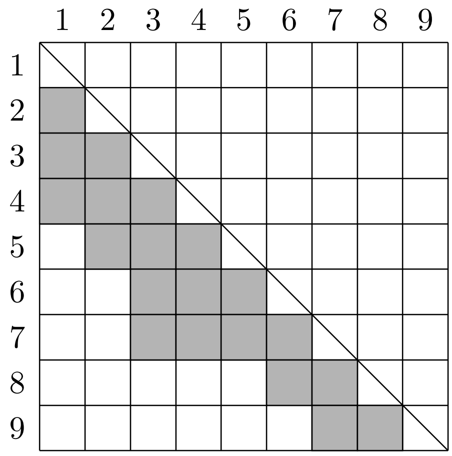


図 1　$h = (4, 5, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9)$ のときの絵

後に説明する Hessenberg 多様体は旗多様体の subvariety であり、この絵は（A 型の）ルート系の部分集合を表している。旗多様体はルート系と深い関わりがあるが、Hessenberg 多様体はある意味でルート系の対称性を崩して得られる subvariety である。

定義 2.2. Hessenberg function $h\colon [n] \to [n]$ に対するindifference graph G_h とは、頂点集合が $[n]$ で、辺集合が $\{(i,j) \mid j < i \leq h(j)\}$ であるグラフである。

つまり、辺が Hessenberg function を表した絵の箱に対応している。辺を通常の $\{i,j\}$ ではなく、(i,j) と書いたのも箱と同一視したいからである。簡単な具体例を図 2 に描いた。実際に indifference graph を有向グラフと見た方が適している状況もあり、その場合は数字が小さい方から大きい方へ $j \to i$ という方向が付けられているものとする。また、本稿では常にグラフは有限で単純なグラフを指すことにする。単純グラフとは、多重辺とループを持たないグラフである。グラフ G の頂点集合は $V(G)$ で表し、辺集合は $E(G)$ で表す。

さて、modular law を定義する前にグラフの彩色多項式について思い出そう。

定義 2.3. グラフ G に対し、$\chi_G(k)$ で G の proper な k-彩色の数を表し、これを G の彩色多項式という。ここで、proper な k-彩色とは、頂点に数（色とみなす）を割り当てる関数 $f\colon V(G) \to [k]$ であって、辺で結ばれている頂点には異なる色を割り当てるもののことである。

さて、彩色多項式に関して deletion-contraction formula というものが成立し、$\chi_G(k)$ が名前の通り k の多項式になっていることを確認できる。ここで、グラフ G の辺 e に対し、$G \setminus e$ で G から辺 e のみを取り除いたグラフ（頂点集合はそのまま）、G/e で G の辺 e をその端点ともども 1 頂点につぶしたグラフを表すことにする。

定理 2.4 (deletion-contraction formula)**.**

$$\chi_G(k) = \chi_{G\setminus e}(k) - \chi_{G/e}(k)$$

証明. $G \setminus e$ の彩色は e の端点の色の被りを気にしない G の彩色であり、そのような G の彩色のうち e の端点に同じ色を割り当てているものが G/e の彩色になる。 □

また、実際に $\chi_G(k)$ が k の多項式であることも証明しておこう。$\chi_G(k)$ に deletion-contraction formula を適用すると、辺の数が減ったグラフの k-彩色多項式の符号の付

いた和に分解される。これを繰り返せば最終的に辺が全く無いグラフの k-彩色に帰着する。そのようなグラフの k-彩色の数は k のベキであり、指数はその頂点数である。ゆえに $\chi_G(k)$ はその名の通り、k の多項式である。

さて、上の定理 2.4 を indifference graph G_h に適用して、indifference graph たちの関係性を調べたい。このとき、辺 e を箱の絵における角（図 1 での $(4,1)$, $(5,2)$, $(7,3)$, $(8,6)$, $(9,7)$ のこと）に取れば、$G_h \setminus e$ が再び indifference graph になる。しかし、G_h/e は頂点の順番が破壊され、indifference graph にならないという問題が発生してしまう。

これを回避して次のように工夫すれば indifference graph の彩色多項式の関係式を得られる。しかも、この関係式は定理 2.10 に述べるように本質的である。この工夫を下の図の例で説明しよう。$h_- = (1,3,3)$, $h = (2,3,3)$, $h_+ = (3,3,3)$ とする。$e = (2,1)$, $e' = (3,1)$ とする。このとき、$G_{h_-} = G_h \setminus e$ であり、$G_{h_+} = G \cup e'$ である（記号の乱用ではあるが、しばしばこのように書かれる）。グラフとしての同型 $G_{h_+} \setminus e \cong G_h$ と $G_{h_+}/e \cong G_h/e$ を指摘しておく。前者は頂点 2 と 3 の入れ替えで得られる。

G_h と辺 $e = (2,1)$ に対し定理 2.4 を適用して、

$$\chi_{G_h} = \chi_{G_{h_-}} - \chi_{G_h/e}$$

を得る。また、G_{h_+} と辺 $e = (2,1)$ に対し定理 2.4 を適用して、

$$\chi_{G_{h_+}} = \chi_{G_h} - \chi_{G_h/e}$$

を得る。

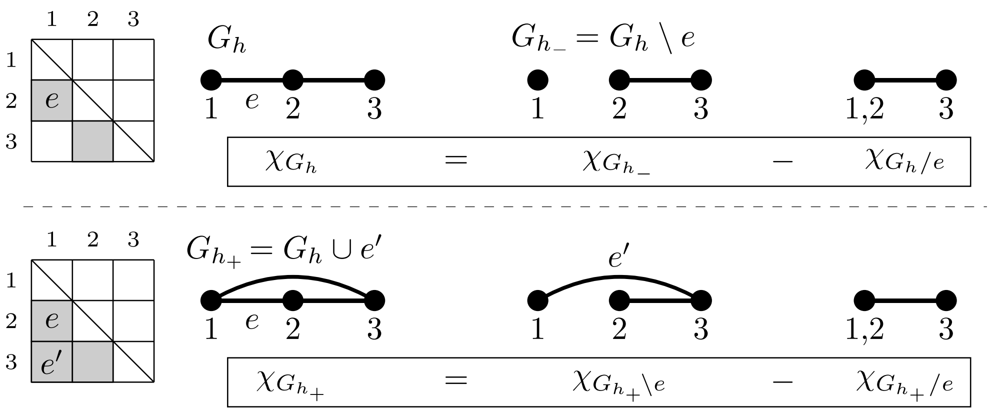


図 2　2 つの deletion-contraction

この 2 式の差を取ると、

$$\chi_{G_{h_+}} - \chi_{G_h} = \chi_{G_h} - \chi_{G_{h_-}}$$

となり、indifference graph たちの彩色多項式の 1 つの関係式を得ることができた。

例を見た所で、一般的にどのような状況でこの関係式が成り立つか述べる。

定義 2.5. Hessenberg function の 3 つ組 (h_-, h, h_+) が、次の条件を満たすとき、modular tripleという。

- h_+ の絵の角の箱 e' とそれに隣接する箱 e が存在し、$G_h = G_{h_+} \setminus e'$, $G_{h_-} = G_h \setminus e$ である。(このとき、$e = (d, j)$, $e' = (d+1, j)$ あるいは $e = (i, d+1)$, $e' = (i, d)$ として表せる。)
- 上の d に対し、頂点 d と $d+1$ の入れ替えがグラフ同型 $G_{h_+} \setminus e \cong G_h$ を導く。

定理 2.6. (h_-, h, h_+) が *modular triple* であれば、

$$\chi_{G_{h_+}} - \chi_{G_h} = \chi_{G_h} - \chi_{G_{h_-}}$$

が成立する。

2.2 modular law

グラフの彩色多項式を対称関数に一般化して、さらに q-類似をしたものを indifference graph に対し定義しよう。本来は chromatic quasisymmetric function と呼ばれているものであるが、ここでは h に対する彩色対称関数と呼ぶことにする。$z_1, z_2, z_3, \dots$ という無限個の変数を用意しておく。頂点集合が $[n]$ であるグラフ G の proper な彩色 $\kappa\colon [n] \to \mathbb{N}$ に対し、

$$z_\kappa = \prod_{i=1}^{n} z_{\kappa(i)}, \quad \operatorname{asc}(\kappa) = \#\{(i,j) \in E(G) \mid i > j,\, \kappa(i) > \kappa(j)\}$$

と定める。また、G の proper な彩色全体の集合を $PC(G)$ で表すことにする。

定義 2.7. Hessenberg function $h\colon [n] \to [n]$ に対する彩色対称関数 $\operatorname{csf}_h(q)$ を次で定める。

$$\operatorname{csf}_h(q) = \sum_{\kappa \in PC(G_h)} z_\kappa q^{\operatorname{asc}(\kappa)}$$

このとき $\mathrm{csf}_h(q)$ に現れる q のベキは $\#E(G)$ 以下であり、各項は変数 z_i たちの n 次式である。また、q の多項式と思うと、その係数が $z_1, z_2, z_3 \ldots$ の対称関数になっていることが知られている。つまり、任意の置換に対し、添字の置換が係数を変えない。indifference graph でないグラフ G で $V(G) = [n]$ であるものに対しては、上と同様にして定まる式の係数は quasisymmetric function と呼ばれるものになっている。詳しくは Shareshian-Wachs を参照。

さて、前置きが長くなってしまったが、いよいよ modular law について述べよう。彩色多項式 χ_{G_h} のある意味での q-類似が $\mathrm{csf}_h(q)$ であり、定理 2.6 の q-類似が彩色対称関数に対する modular law である。

定理 2.8 (cf. [7, Appendix C])**.** (h_-, h, h_+) が *modular triple* であれば、

$$\mathrm{csf}_{h_+}(q) - \mathrm{csf}_h(q) = q(\mathrm{csf}_h(q) - \mathrm{csf}_{h_-}(q))$$

が成立する。

自然数 n に対し、Hessenberg function $h\colon [n] \to [n]$ 全体の集合を $\mathcal{H}_n$ で表すことにする。より一般に modular law を定義しよう。

定義 2.9. M を加法群とし、$M[q]$ で q の M-係数多項式全体を表す。$M[q]$ には和と q 倍の演算がある。$\varphi\colon \mathcal{H}_n \to M[q]$ が modular law を満たすとは、(h_-, h, h_+) が modular triple であれば、

$$\varphi(h_+) - \varphi(h) = q\left(\varphi(h) - \varphi(h_-)\right)$$

が成立することをいう。

彩色対称関数 $\mathrm{csf}_h(q)$ の場合には、上の M が n 次の対称関数全体の加法群 Λ_n であった。一応言及しておくと、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ には Hessenberg function の絵を対角線に沿って並べるという積を考えて、R を環とし、積を保つ写像 $\varphi\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n \to R[q]$ を考えればより自然な記述になる。

さて、Abreu と Nigro により示された次の重要な事実を紹介しよう。

定理 2.10 (cf. [1, Theorem 1.2])**.** *modular law* を満たす $\varphi\colon \mathcal{H}_n \to M[q]$ は、G_h がいくつかの完全グラフの非交和で書けるような $h \in \mathcal{H}_n$ に対する値 $\varphi(h)$ のデータだけで、一意に決定される。

説明のために、上記のデータを φ の境界条件と呼ぶことにしよう。彼らは一般の $h \in \mathcal{H}_n$ における値 $\varphi(h)$ を境界条件から計算するアルゴリズムを構成した。実のところ、modular law を満たし彩色対称関数と同一の境界条件をもつ写像 $\mathcal{H}_n \to \Lambda_n[q]$ が幾何学的に構成できる。ここに次章で説明する regular semisimple Hessenberg 多様体が現れる。境界条件が一致することは比較的簡単に分かるので、本稿では省略する。

この章の終わりに、彩色対称関数の modular law について経緯や由来を述べておこう。この用語は modular relation などとも呼ばれていて、最初に用いたのは Guay-Paquet である。彼は次数無し（$q = 1$ という特殊化）の場合の彩色対称関数に対する modular law を示した。この名前の由来は submodular function（劣モジュラ関数）が満たすような関係式だからと本人から直接聞いた。不等号ではなく等号なので modular ということらしい。

定理 2.8 については直接的な証明が知られていなかったが、論文の Appendix C において簡潔で初等的な証明を筆者らが与えた。直接的でない証明というのは、unicellular LLT 多項式と呼ばれる別の対称関数が modular law を満たすことを示して、それと $\mathrm{csf}_h(q)$ との関係式から示す方法である。最も早い時期に提出された unicellular LLT 多項式が modular law を満たすことの証明は、S. J. Lee の論文 [9] によるものであるが、実際のところこの論文にはタイポが多すぎるし、証明にも致命的なギャップがあるように思われる。unicellular LLT 多項式に関しては、Alexandersson [2] が最初に証明を与えたのだと認識している。

3　regular semisimple Hessenberg 多様体

3.1　regular semisimple Hessenberg 多様体の定義

この章では、彩色対称関数の幾何学的な対応物である regular semisimple Hessenberg 多様体について述べる。旗多様体 $\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^n)$ とは

$$\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^n) = \{V_\bullet = (V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}$$

で定められる多様体（variety）である。ここで S は成分ごとのスカラー倍写像で互いに相異なる固有値をもつものとする。

定義 3.1. Hessenberg function $h \in \mathcal{H}_n$ に対し、regular semisimple Hessenberg 多

様体 $X(h)$ を

$$X(h) = \left\{ V_\bullet \in \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^n) \,\middle|\, \forall i \in [n]\,,\, SV_i \subset V_{h(i)} \right\}$$

で定める。

事実として、$X(h)$ の diffeomorphism type は S の選び方に依存しないことが知られている。ゆえにコホモロジーを考える際には、S の選び方を気にする必要は無い。

例 3.2. $h = (3,3,3)$ のとき、$X(h) = \mathrm{Flag}(\mathbb{C}^n)$ である。

例 3.3. $h = (2,3,3)$ のときの $X(h)$ を調べよう。1 次元部分空間だけを見る射影 $\mathrm{proj}\colon X(h) \to \{V_1 \subset \mathbb{C}^3\} = \mathbb{C}P^2$ を考える。$V_1 \neq \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ であるとき、V_2 は異なる 1 次元部分空間 V_1 と SV_1 のどちらも含む。ゆえに $V_2 = V_1 + SV_1$ となるしかない。ここで $\boldsymbol{e}_i$ は $\mathbb{C}^3$ の基本ベクトルである。$V_1 = \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ であるとき、V_2 は $V_1 (= SV_1)$ を含む任意の 2 次元部分空間である。ゆえに $X(h)$ は $\mathbb{C}P^2$ の 3 点 blow-up である。

置換 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し、$\left(\langle \boldsymbol{e}_{w(1)} \rangle \subset \langle \boldsymbol{e}_{w(1)}, \boldsymbol{e}_{w(2)} \rangle \subset \cdots \subset \mathbb{C}^n \right)$ は w に対応する permutation flag と呼ばれ、明らかに $X(h)$ の元である。

3.2 GKM 理論

GKM 理論とは、良いトーラス作用をもつ多様体の同変コホモロジー環が、固定点集合と 1 次元軌道から決定できるという理論 [6] である。ここでトーラス T の作用をもつ多様体 X の同変コホモロジー環とは、

$$H_T^*(X) = H^*(BT \times_T X)$$

のことである。本稿では、$\mathbb{C}$-係数コホモロジーのみを考えることにする。GKM 理論については、詳しくは前回の変換群論集会での原稿を参考にしていただけたら幸いである。ここでは固定点集合 X^T は有限であるとし、通常のコホモロジー $H^*(X)$ は偶数次のみであるとする。また、トーラスが固定点での接空間に作用するが、そのウェイトはどの 2 つを選んでも線形独立であることを仮定する。このとき、X^T への制限写像

$$H_T^*(X) \to H_T^*(X^T) \cong \mathrm{Map}(X^T, H^*(BT))$$

が単射になり、$H_T^*(X)$ の元を $H^*(BT)$-値つまり $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$-値の関数として、非常に具体的に記述することができる。

さて、n 次元トーラス T^n が $\mathbb{C}^n$ に自然に作用することで旗多様体 $\mathrm{Flag}(\mathbb{C}^n)$ にも作用する。S と T^n は可換なので、この T^n-作用は $X(h)$ に制限できる。特に $X(h)$ の固定点集合は permutation flags のみであり、上に述べた仮定を全て満たし、その同変コホモロジー環は次のように書ける。ちなみに積と和は各点ごとに計算される。

定理 3.4.

$$H_T^*(X(h)) \cong \left\{ f \in \mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT)) \;\middle|\; \begin{array}{c} f(w) - f(w\sigma_{i,j}) \in (t_{w(i)} - t_{w(j)}) \\ \text{for } j < i \leq h(j),\, w \in \mathfrak{S}_n \end{array} \right\}$$

ここで $\sigma_{i,j}$ で i と j の互換を表すことにし、$(t_{w(i)} - t_{w(j)})$ は $t_{w(i)} - t_{w(j)}$ が生成する $H^*(BT)$ のイデアルである。

また、$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が $H_T^*(X(h))$ に $(\sigma \cdot f)(w) = \sigma(f(\sigma^{-1}w))$ で作用する。これにより、$H_T^*(X(h))$ は次数付き $\mathfrak{S}_n$-表現になる。さらに、t_i で $\mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, H^*(BT))$ における定数関数も表すことにすれば、$\sigma t_i = t_{w(i)}$ なので、σ は $H_T^*(X(h))$ のイデアル $(t_1, \ldots, t_n)$ を保つ。$H^*(X(h)) \cong H_T^*(X(h))/(t_1, \ldots, t_n)$ なので、この $\mathfrak{S}_n$-作用により $H^*(X(h))$ も次数付き $\mathfrak{S}_n$-表現になる。

彩色対称関数と regular semisimple Hessenberg 多様体の関係性を正確に述べよう。Frobenius characteristic ch は $\mathfrak{S}_n$-表現を n 次の対称関数にうつす。また、対称関数には ω で表される involution があり、基本対称関数と完全対称関数を入れ替える。

定理 3.5 ([3], [5])**.**

$$\omega(\mathrm{csf}_h(q)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{ch}(H^{2i}(X(h)))q^i$$

Brosnan と Chow、および Guay-Paquet により与えられた証明は少々難解であるが、定理 2.10 を利用してかなり初等的に定理 3.5 の証明を与えることができる。

定理 3.4 の状況を分かりやすく表すために、次の GKM グラフというものを考える。

定義 3.6 (GKM グラフ)**.** $X(h)$ の GKM グラフ Γ_h とは $V(\Gamma_h) = \mathfrak{S}_n$, $E(\Gamma_h) = \{\{w, w\sigma_{i,j}\} \mid j < i \leq h(j),\, w \in \mathfrak{S}_n\}$ で、辺 $\{w, w\sigma_{i,j}\}$ は $t_{w(i)} - t_{w(j)}$ というラベルが付けられているものである。（ラベルは -1 倍の不定性を許す。）

一般には、固定点を頂点集合とし、それを結ぶ S^2 を辺とみなし、対応するウェイトをラベルとすることで、条件を満たすトーラス作用をもつ多様体の GKM グラフを描くことができる。

置換を one line notation で書くことにして、簡単な Hessenberg function に対する GKM グラフ Γ_h の例を下に挙げよう。

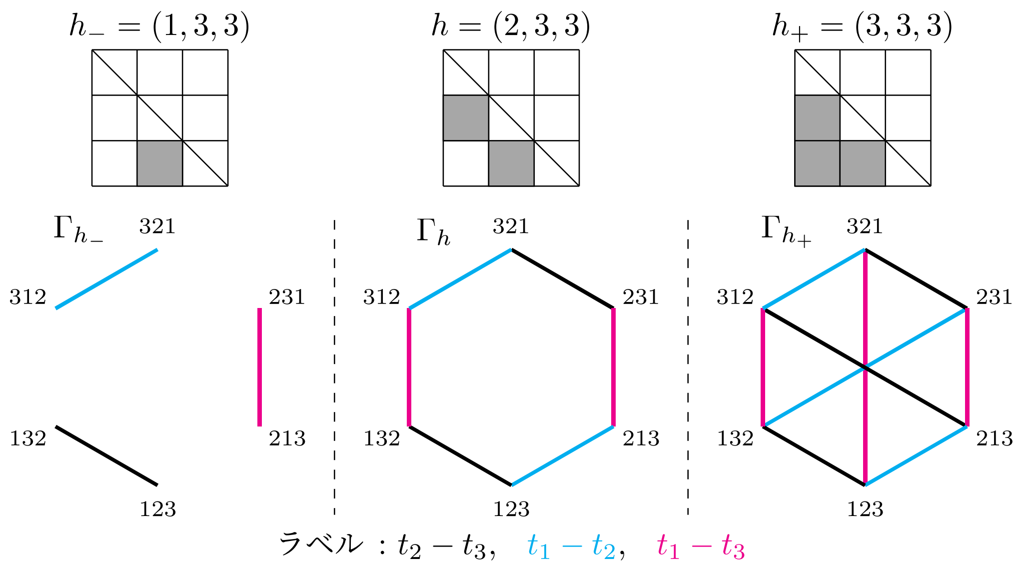
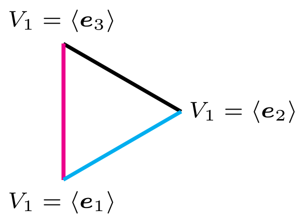


図 3　GKM グラフの例

より簡単な空間の GKM グラフとして T^3 が自然に作用する $\mathbb{C}P^2$ の GKM グラフもあり、こちらは三角形である。ラベルは先程の色（および方向）と対応している。



ここで $h = (2,3,3)$ のとき、$X(h)$ は $\mathbb{C}P^2$ の 3 点（それは GKM グラフにおける 3 頂点）の blow-up であった。GKM グラフにおいては、この 3 頂点をカットして断面を辺とみなすことで、図 3 の Γ_h が得られている。

後で利用するためにラベル付きグラフ Γ に対し、定理 3.4 の右辺と同様にして定まる環を $H_T^*(\Gamma)$ で表すことにしよう。つまり頂点集合 $V(\Gamma)$ から $H^*(BT)$ への関数で辺の端点での値に関して差がラベルで割り切れるもの全体のことである。

さて、Kiem と Lee は modular triple (h_-, h, h_+) に対し、$X(h_-)$ に沿った $X(h_+)$

の blow-up X' を考えることで、$H^*(X(h))$ が modular law を満たすことを示し、定理 2.10 を用いて定理 3.5 を示した [8]。

GKM グラフを用いてこの状況を記述するには、Γ_{h_+} を Γ_{h_-} に沿ってカットをすれば良いのではないかと自然に考えられる。そして、実際にそれは正しい。図 3 の modular triple について、対応する絵 Γ' を下に見せよう。厳密に言えば、X' は GKM 理論を直接適用できる空間ではなく、これは GKM グラフではない（各頂点で同じラベルをもつ 2 本の辺がある）が、トーラス作用に関する本質的な情報を記述している。

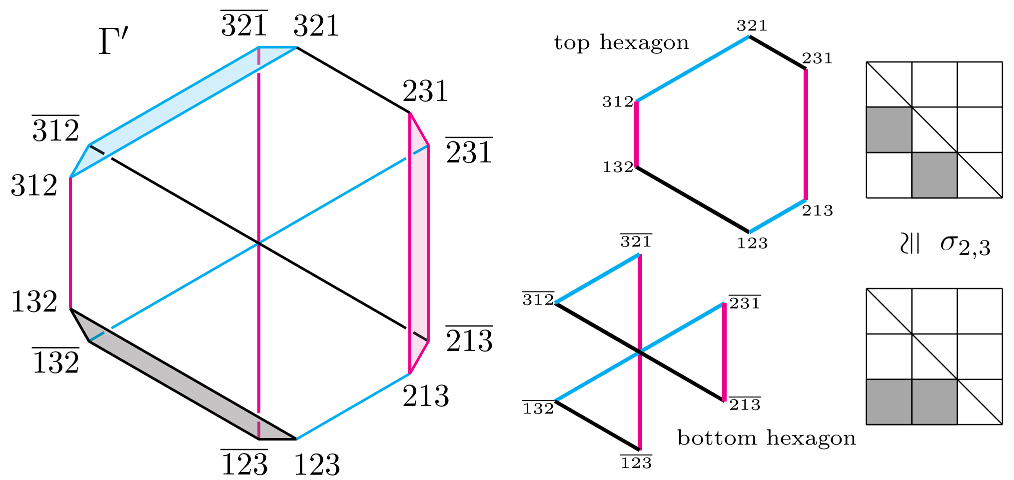


図 4　GKM 的なデータ Γ' の絵

Γ' はグラフと追加の構造をもつ。Γ' のグラフとしての構造を述べよう。Γ' は $\mathfrak{S}_n$ の 2 つのコピーを頂点集合にもつ。片方の元には上線を付けて表すことにする。便宜上、バーを付けた方を下部、付けていない方を上部と呼ぶことにする。図 4 に表したように Γ' の上部の induced subgraph は Γ_h であり、下部の方は Γ_h を $\sigma_d = \sigma_{d,d+1}$ で変換したものである。上部と下部の間の辺は各 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し、w と $\overline{w}$ の間の辺があるのみでそのラベルは $t_{w(d)} - t_{w(d+1)}$ である。(厳密には、w と $\overline{w\sigma_d}$ こそが結ばれていると思った方が良いが、ひとまず気にしなくてよいだろう。)

追加の構造について述べよう。以下で $H_T^*(\Gamma')$ はラベル付きグラフとしての同変コホモロジー環を表している。任意の $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し、X' 内に 1 次元軌道がなす $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ が存在し、それに対応する 4 角形 $\{w, w\sigma_d, \overline{w}, \overline{w\sigma_d}\}$ は面として扱い、定理 3.7 のように $H_T^*(\Gamma')$ の元にさらなる条件を要請する。

その定理に付いてであるが、厳密に記述しようとすると紙面が足りないので、ここ

では記号の乱用に目をつぶり、直感的に書くことにする。言わんとしていることは伝わるのではないかと信じている。厳密に知りたい場合は論文 [7] を参照されたい。

定理 3.7 ([7], equivariant geometrical modular law)**.**

$$
\begin{aligned}
&H_T^*\bigl(\Gamma_{h_+}\bigr) \oplus q\, H_T^*\bigl(\Gamma_{h_-}\bigr) \cong H_T^*\bigl(\Gamma_h\bigr) \oplus q\, H_T^*\bigl(\Gamma_h\bigr) \\
&\cong \left\{ f \in H_T^*\bigl(\Gamma'\bigr) \;\middle|\; \begin{array}{c} f(w) - f(w\sigma_d) + f\bigl(\overline{w}\bigr) - f\bigl(\overline{w\sigma_d}\bigr) \in \Bigl(\bigl(t_{w(d)} - t_{w(d+1)}\bigr)^2\Bigr) \\ \text{for } w \in \mathfrak{S}_n \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

証明のアイデアは以下の通りである。Γ' は Γ_{h_+} の Γ_{h_-} に沿った blow-up であるという観点から、定理 3.7 の最後に出てきた GKM 理論的な記述を持った環が、$H_T^*(\Gamma_{h_+})$ の引き戻しと、各点 w で $t_{w(d)} - t_{w(d+1)}$ 倍された $H_T^*(\Gamma_{h_-})$ の直和で書けることが分かる。これが $H_T^*\bigl(\Gamma_{h_+}\bigr) \oplus q\, H_T^*\bigl(\Gamma_{h_-}\bigr)$ の部分である。

もう一方、ラベル付きグラフの写像 $\Gamma' \to \Gamma_h$ を $w \mapsto w$, $\overline{w\sigma_d} \mapsto w$ で定めると、ラベル付きグラフとしてファイバー束のような構造が現れる（上部と下部を結ぶ辺が w と $\overline{w\sigma_d}$ を結ぶというのは、ここに効いている。）。これは $X' \to X(h)$ が $\mathbb{C}P^1$-束になっていることと対応している。これが $H_T^*\bigl(\Gamma_h\bigr) \oplus q\, H_T^*\bigl(\Gamma_h\bigr)$ の部分である。

両者が同一のものであることを示すために、それを明示的な形で記述したのが、定理 3.7 の最後に出てきた環なのである。

また、論文では示さなかったが、これは実際に $H_T^*(X')$ に一致するようである [4]。これは最近その著者から連絡をいただいて知らされた。しかし、ファイバー束としての構造の一般論などは未整備のようである。

論文 [7] の Appendix A で述べたように、特に unicellular LLT 多項式との関係性において、このファイバー束の構造は興味深い。これの解明はこれからの研究の課題である。

参考文献

[1] A. Abreu and A. Nigro. *Chromatic symmetric functions from the modular law.* J. Combin. Theory Ser. A, 180 (2021), Paper No. 105407, 30.

[2] P. Alexandersson, *LLT polynomials, elementary symmetric functions and melting lollipops*, J. of Alg. Comb. 53 (2021), 299–325.

[3] P. Brosnan and T. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. 329 (2018),

955–1001.

[4] T. Braden, L. Chen, and F. Sottile, *The equivariant Chow rings of quot schemes*, Pac. J. Math., Vol. 238 (2008), No. 2, 201–232.

[5] M. Guay-Paquet, *A second proof of the Shareshian-Wachs conjecture, by way of a new Hopf algebra*, arXiv:1601.05498.

[6] M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), 25–83.

[7] T. Horiguchi, M. Masuda, and T. Sato, *Modular law through GKM theory*, Algebr. Comb., 7 (2024) no. 5, 1433–1451.

[8] Y.H. Kiem and D. Lee, *Birational geometry of generalized Hessenberg varieties and the generalized Shareshian-Wachs conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A, 206 (2024), Paper No. 105884, 45.

[9] S.J. Lee, *Linear relations on LLT polynomials and their k-Schur positivity for* $k = 2$, J. Algebr Comb 53, 973–990 (2021).

[10] J. Shareshian and M. L. Wachs, *Chromatic quasisymmetric functions*, Adv. Math. 295 (2016), 497–551.

[11] M. Harada, A. Henriques, and T. Holm, *Computation of generalized equivariant cohomologies of Kac-Moody flag varieties*, Adv. Math. **197** (2005), no 1, 198–221.