ある冪零ヘッセンバーグ多様体の同変コホモロジー環について

長岡工業高等専門学校・一般教育科　　中山雅友美
General education，National Institute of Technology, Nagaoka College

1. 序

本稿は 2025 年度 RIMS 共同利用による研究集会「変換群論の新しい展開」での講演に基づく内容で，岡山理科大学の阿部拓氏との共同研究である．A 型のピーターソン多様体 $\mathcal{Y}_n$ とは，旗多様体

$$Fl(\mathbb{C}^n) = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid \dim V_i = i\ \} \cong GL_n(\mathbb{C})/B$$

(B は上三角行列の成すボレル部分群) の閉部分代数多様体として定められる正則冪零ヘッセンバーグ多様体

$$\mathcal{Y}_n = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid NV_i \subset V_{i+1}\ (1 \le i \le n-1)\ \}$$

である．ここで, $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間の包含列で, N は正則な冪零変換，すなわち零ベクトルと単位ベクトルを順に並べた行列 $N = (\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}) \in M_n(\mathbb{C})$ である．$\mathcal{Y}_n$ についてはポアンカレ多項式やコホモロジー環など，そのトポロジーが調べられている ([3],[4], [5], [6])．本稿では，$\tilde{N} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-2}) \in M_n(\mathbb{C})$ から定まる (正則でない) 冪零ヘッセンバーグ多様体

$$\mathcal{W}_n = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid \tilde{N}V_i \subset V_{i+1},\ \dim V_i = i\ \} \tag{1.1}$$

のポアンカレ多項式と同変コホモロジー環 $H^*_{S^1}(\mathcal{W}_n, \mathbb{Q})$ について，ピーターソン多様体の研究結果 [2],[3] に倣い考察する．

2. $\mathcal{W}_n$ のセル分割とポアンカレ多項式

セル分割を持つ複素 m 次元の代数多様体 M のポアンカレ多項式 $\mathrm{Poin}(M, s)$ は

$$\mathrm{Poin}(M, s) = \sum_{k=1}^{m} c_k s^{2k} \quad (c_k \text{は } M \text{ の複素 } k \text{ 次元セルの個数})$$

で与えられる (例えば [1])．本節ではまず $\mathcal{W}_n$ のセル分割を与え，ポアンカレ多項式を計算する．$k-1$ 個のパラメータ $v_1, \cdots, v_{k-1} \in \mathbb{C}$ からできる $GL_k(\mathbb{C})$ の部分集合を

$$C_k = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & & v_{k-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ \vdots & v_{k-1} & \cdots & 0 & 0 \\ v_{k-1} & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{C}) \,\middle|\, v_1, \cdots v_{k-1} \in \mathbb{C} \right\}$$

とおき，大きさ k のブロックと呼ぶことにする．$C_k \cong \mathbb{C}^{k-1}$ で $\dim C_k = k-1$ であることに注意する．よく知られているように，ピーターソン多様体 $\mathcal{Y}_n$ のセル分割は (多少の記法の濫用を許せば)

$$\mathcal{Y}_n = \coprod_{k_1+\cdots+k_l=n} \begin{bmatrix} C_{k_1} & & & \\ & C_{k_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & C_{k_l} \end{bmatrix}$$

で与えらる．ただし，[ ] は $GL_n(\mathbb{C})/B$ における同値類を表すものとする．ポアンカレ多項式 $\mathrm{Poin}(\mathcal{Y}_n, s)$ は，

$$\mathrm{Poin}(\mathcal{Y}_n, s) = (1+s)^{n-1}$$

である ([1])．例えば $\mathcal{Y}_3$ のセルは，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{C})$$

であり， $\mathrm{Poin}(\mathcal{Y}_3, s) = s^2 + 2s + 1 = (1+s)^2$.

$\mathcal{W}_n$ のセル分割は，$Y_k \subset GL_n(\mathbb{C})$ を

$$Y_k = \coprod_{k_1 + \cdots k_l = k} \begin{pmatrix} C_{k_1} & & & \\ & C_{k_2} & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & C_{k_l} \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$\mathcal{W}_n = \coprod_{k+l=n-1} \left[\begin{array}{c|c|c} * \quad * \quad * & 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \hline Y_k & 0 & \text{\Large 0} \\ \hline \text{\Large 0} & 0 & Y_l \end{array}\right] \tag{2.1}$$

であることがわかる．(2.1) の 1 行目の $* \ * \ *$ は，Y_k が 1 つのブロックからなるときは $(x, 0, \cdots, 0)$ であり，Y_k のブロックが 2 つ以上のときは，右から 2 つのブロックの 1 列目にあたる 2 列が任意の $x, y \in \mathbb{C}$ でその他は 0，すなわち ($0, \cdots, 0, x, 0, \cdots, 0, y, 0 \cdots, 0$) である．例えば，$\mathcal{W}_3$ のセルは次の通りである．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{C}).$$

命題 2.1. $\mathcal{W}_n$ のポアンカレ多項式は

$$\mathrm{Poin}(\mathcal{W}_n, s) = (n-2)s^2(1+s)^{n-3} + (1+s)^{n-1}$$

である．

Proof. (2.1) で $k = 0$ の部分 $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \hline & Y_{n-1} \end{array}\right]$ におけるセルは $\mathcal{Y}_{n-1}$ のセルと同一視されるため，$k = 0$ のセルを表す多項式は，

$$(1+s)^{n-2}. \tag{2.2}$$

次に，k が $1 \leq k \leq n-2$ のときの $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} * & * & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & Y_k & & 0 & & \mathbf{0} & \\ \hline & \mathbf{0} & & 0 & & Y_l & \end{array}\right]$ について考える．Y_k が 1 つのブロック C_k からなるときは，$* * *$ は $\mathbb{C}$ であり，Y_k が 2 つ以上のブロック C_k からなるときは，$* * *$ は $\mathbb{C}^2$ なので，このときのセルに対応する多項式は

$$
\begin{aligned}
&s^2(1+s)^{k-1}(1+s)^l + s^k(1+s)^l - s \cdot s^k(1+s)^l \\
&= s^2(1+s)^{k-1}(1+s)^{n-k-2} + s^k(1-s)(1+s)^{n-k-2} \\
&= s^2(1+s)^{n-3} + s^k(1-s)(1+s)^{n-k-2}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

最後に，$k = n-1$ の部分 $\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 1 \\ \hline & Y_{n-1} & & \end{array}\right]$ に対応する多項式は，上の議論と同じように Y_{n-1} のブロックが 1 つの場合だけ特別に考えれば

$$
s^2(1+s)^{n-2} + s^{n-1}(1-s) \qquad (2.4)
$$

であることがわかる．したがって，$\mathrm{Poin}(\mathcal{W}_n, s)$ は (2.2), (2.3), (2.4) の総和を取って，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Poin}(\mathcal{W}_n, s) \\
=&(1+s)^{n-2} + \sum_{k=1}^{n-2} s^2(1+s)^{n-3} + \sum_{k=1}^{n-2} s^k(1-s)(1+s)^{n-k-2} + s^2(1+s)^{n-2} + s^{n-1}(1-s) \\
=&(n-2)s^2(1+s)^{n-3} + (1+s^2)(1+s)^{n-2} + s(1-s)(1+s)^{n-2} \\
=&(n-2)s^2(1+s)^{n-3} + (1+s)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

□

注 2.2. 上で求めた $\mathrm{Poin}(\mathcal{W}_n, s)$ を展開すれば次のようになる．

$$
\begin{aligned}
1 + s + \left(\binom{n-2}{1} + \binom{n-1}{2}\right)s^2 + \left(2\binom{n-2}{2} + \binom{n-1}{3}\right)s^3 \\
+ \cdots + \left((n-2)\binom{n-2}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right)s^{n-1}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\mathrm{Poin}(\mathcal{W}_n, s) = \sum_{i=0}^{m} \dim H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q}) s^i, \quad (m = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W}_n)
$$

であることから $\dim H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q}) = (i-1)\binom{n-2}{i-1} + \binom{n-1}{i}$，つまり，$H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q})$ の基底の個数は $(i-1)\binom{n-2}{i-1} + \binom{n-1}{i}$ であることがわかる．

本稿で議論するコホモロジー環は全て $\mathbb{Q}$ 係数のため，これより先は $H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q})$ を単に $H^{2i}(\mathcal{W}_n)$ と表記する．

3. $\mathcal{W}_n$ 上の S^1 作用と固定点集合

複素 n 次元トーラス

$$T^n = \{diag(z_1, z_2, \cdots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}, |z_i| = 1, ^\forall i\} \subset U(n)$$

は $Fl(\mathbb{C}^n)$ へ自然に作用し，T^n の部分群

$$S^1 = \{diag(z^n, z^{n-1}, \cdots, z) \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

が $\mathcal{Y}_n$ へ作用する [4]．同様に S^1 が $\mathcal{W}_n$ に作用することも簡単に確かめられる．固定点集合 $Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n}$ は置換行列全体 $\{[\boldsymbol{e}_{w(1)}, \boldsymbol{e}_{w(2)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{w(n)}] \in GL_n(\mathbb{C})/B \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ で対称群 $\mathfrak{S}_n$ と $1:1$ に対応する．$\mathcal{Y}_n^{S^1} = Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n} \cap \mathcal{Y}_n$ および $\mathcal{W}_n^{S^1} = Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n} \cap \mathcal{W}_n$ であり，さらに

$$\mathcal{Y}_n^{S^1} \subset \mathcal{W}_n^{S^1} \subset Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n}$$

となっていることがわかる．$w = (w(1), w(2), \cdots, w(n)) \in \mathfrak{S}_n$ に対して $[\boldsymbol{e}_{w(1)}, \boldsymbol{e}_{w(2)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{w(n)}]$ が $\mathcal{Y}_n^{S^1}$ の点であるための必要十分条件は

$$w = (k_1, k_1 - 1, k_1 - 2, \cdots, 1,\ \ k_2, k_2 - 1, k_2 - 2, \cdots, k_1 + 1,\ \ \ \cdots\ \ ,\ \ k_m, k_m - 1, \cdots, k_{m-1} + 1)$$

なる $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ が存在することである ([3])．$k = 1, \cdots, n$ とする．2 つの射影 $\pi_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{k-1}$，$\pi_{-k} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-k}$ を

$$\pi_k\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \pi_{-k}\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

とする． ただし，π_1, π_{-n} は定義しないものとする．$\mathcal{W}_n$ のセル分割 (2.1) から，$\mathcal{W}_n$ の固定点が次で与えられることが簡単にわかる．

補題 3.1. $(\boldsymbol{e}_{w(1)}, \boldsymbol{e}_{w(2)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{w(n)}) \in \mathfrak{S}$ が $\mathcal{W}_n$ の S^1 固定点であるための必要十分条件は, $\boldsymbol{e}_{w(k)} = \boldsymbol{e}_1$ で

$$[\pi_k(\boldsymbol{e}_{w(1)}), \pi_k(\boldsymbol{e}_{w(2)}), \cdots, \pi_k(\boldsymbol{e}_{w(k-1)})] \in \mathcal{Y}_{k-1}^{S^1},$$

かつ

$$[\pi_{-k}(\boldsymbol{e}_{w(k+1)}), \pi_{-k}(\boldsymbol{e}_{w(k+3)}), \cdots, \pi_{-k}(\boldsymbol{e}_{w(n)})] \in \mathcal{Y}_{n-k}^{S^1}$$

となる k が存在することである．

例えば $\mathcal{W}_3$ の S^1 固定点は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. $\mathcal{W}_n$ の同変コホモロジー環

本節では, 添字を省略して $\mathcal{Y}_n$, $\mathcal{W}_n$ をそれぞれ $\mathcal{Y}$, $\mathcal{W}$ で表す．ピーターソン多様体 $\mathcal{Y}$ の場合 [3] と同じように, $\mathcal{W} \subset Fl(\mathbb{C}^n)$，$\mathcal{W}^{S^1} \subset Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n} \cong \mathfrak{S}$，$S^1 \subset T^n$ であることから引き起こされる可換図式;

$$\begin{tikzcd} H^*_{T^n}(Fl(\mathbb{C}^n)) \arrow[r, "\iota_1"'] \arrow[d, "\pi_1"] & \bigoplus_{w\in\mathfrak{S}} H^*_{T^n}(y) \arrow[d, "\pi_2"] \\ H^*_{S^1}(\mathcal{Y}) \arrow[r, "\iota_2"'] & \bigoplus_{w\in\mathcal{Y}^{S^1}} H^*_{S^1}(y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^*_{T^n}(Fl(\mathbb{C}^n)) \arrow[r, "\iota_1"'] \arrow[d, "\pi_1"] & \bigoplus_{w\in\mathfrak{S}} H^*_{T^n}(w) \arrow[d, "\pi_2"] \\ H^*_{S^1}(\mathcal{W}) \arrow[r, "\iota_2"'] & \bigoplus_{w\in\mathcal{W}^{S^1}} H^*_{S^1}(w) \end{tikzcd}$$

を考える．[3] と同様に表記すると

$$H^*_{S^1}(w) \cong \mathbb{C}[t], \quad H^*_{T^n}(w) \cong \mathbb{C}[t_1, t_2, \cdots, t_n],$$

であり，

$$H^*_{T^n}(Fl(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{C}[\tau_1, \cdots, \tau_n, t_1, \cdots, t_n]/I$$

である．各写像は $\iota_1(\tau_i) = t_{w(i)}$, $\iota_1(t_i) = t_i$, $\pi_2(t_i) = (n+1-i)t$ である．なお ι_1, ι_2 は単射，π_2 は全射である．π_1 は $\mathcal{Y}$ の場合には全射であることが示されているが，$\mathcal{W}$ の場合は (期待はされるが) 全射かどうかわかっていない．

[3] では次が示された．

定理 4.1. ([3]) $p_j \in H^*_{S^1}(\mathcal{Y})$ を

$$p_j = \pi_1(\sum_{i=1}^{j}(t_i - \tau_i)) \ (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

とし， さらに $\alpha_j = -p_{j-1} + 2p_j - p_{j+1} - t$ とする．このとき，

$$p_j \cdot \alpha_j = 0$$

が成り立ち，$H^*_{S^1}(\mathcal{Y}) \cong \mathbb{C}[t, p_1, \cdots, p_{n-1}]/J$ (J は $p_j\alpha_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$ により生成されるイデアル) が成り立つ．

次が現時点での結果である．

命題 4.2. $p_j, \alpha_j \in H^*_{S^1}(\mathcal{W})$ $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$ を形式的に上と同じ式で定めた $H^2_{S^1}(\mathcal{W})$ の元とすると，

$$\text{(i)} \sum_{i=1}^{n-1} p_i\alpha_i, \quad \text{(ii)}(\sum_{i=1}^{j} p_i\alpha_i + p_jp_{j+1})\alpha_j, \quad \text{(iii)}\ p_j(p_j - jt)\alpha_j, \quad \text{(iv)}\ (p_j - jt)\alpha_j \cdot p_l\alpha_l$$

($j < l \leq n-1$) はいずれも 0 である．

Proof. ι_2 は単射であるため ι_2 による (i) から (iv) の像がそれぞれ 0 であることを示せばよい．$Y_k^{S^1}$ を，パラメーターが全て 0 である Y_k の行列からなる部分集合とする．このとき

$$w = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 \ \cdots \ 0 & 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline w_{k_1} & 0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & w_{k_2} \end{array}\right] \in \mathcal{W}^{S^1} \quad (w_{k_1} \in Y_{k_1}^{S^1}, w_{k_2} \in Y_{k_2}^{S^1}) \tag{4.1}$$

とすれば，

$$\iota_2(p_j) = \sum_{i=1}^{j}(w(i)-i)t, \quad \iota_2(\alpha_j) = (w(j+1)-w(j)-1)t$$

であり ([3])，w は第 k_1+1 列目が単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ となっているため，$j > k_1$ のときは $\iota_2(p_j\alpha_j) = 0$ であることがわかる．$j \leq k_1$ のときを考える．$w_{k_1} = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_a \end{pmatrix}$ とする．各ブロック C_i の右端にあたる w の列を第 b_i 列とおけば，

$$\begin{cases} \iota_2(p_j - jt) = 0 & (j = b_1, \cdots, b_a) \\ \iota_2(\alpha_j) = 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるため，これらの積をとれば

$$\iota_2((p_j - jt)\alpha_j) = 0$$

が成り立つ．したがって，任意の j で (iii), (iv) が成り立つ．また，

$$\iota_2(\alpha_{b_i}) = (b_{i-1} - b_{i+1})t$$

であるため，

$$\begin{aligned} \iota_2(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i p_i) &= \iota_2(\sum_{i=1}^{a}\alpha_{b_i}p_{b_i}) \\ &= (-b_1b_2 + (b_1-b_3)b_2 + (b_2-b_4)b_3 + \cdots + (b_{a-2}-b_a)b_{a-1} + b_{a-1}b_a)t^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

すなわち (i) が成り立つことがわかる．ここからは，(ii) について考える．$j > k_1(= b_a)$ のときはすぐ上の式から，

$$\sum_{i=1}^{j} p_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{a}\alpha_{b_i}p_{b_i} = 0$$

でかつ，$p_j\alpha_j = 0$ であるため

$$p_jp_{j+1}\alpha_j = 0$$

となり (ii) が成り立つ．$j \leq k_1$ のときは，$\alpha_j = 0$ のときは明らかに成り立つため，$\alpha_j \neq 0$，すなわち，$j = b_d(d = 1, 2, \cdots, a-1)$ のときのみ考えればよい．

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{j} p_i\alpha_i + p_jp_{j+1})\alpha_j &= \sum_{i=1}^{d}\alpha_{b_i}p_{b_i} + p_{b_d}p_{b_d+1})\alpha_{b_d} \\ &= (-b_{d+1}b_dt^2 + b_db_{d+1}t^2)\alpha_{b_d} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より全ての j で (ii) が成立する．

□

予想 4.3. $J_{\mathcal{W}}$ を命題 4.2 の多項式 (i),(ii),(iii),(iv) で生成されるイデアルとすれば，

$$H^*_{S^1}(\mathcal{W}) \cong \mathbb{C}[t, p_1, \cdots, p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}$$

が成り立つ．

$\mathbb{C}[t]\otimes H^*(\mathcal{W})\cong H^*_{S^1}(\mathcal{W})$ なので $H^*_{S^1}(\mathcal{W})$ は自由 $\mathbb{C}[t]$-加群であり，$H^*_{S^1}(\mathcal{W})$ の $\mathbb{C}[t]$-加群としての基底の数は $H^*(\mathcal{W})$ の基底の数と一致する．そのため，注意 2.2 より $H^*_{S^1}(\mathcal{W})$ の基底の数は $\mathcal{W}$ のセルの個数 $c_i=(i-1)\binom{n-2}{i-1}+\binom{n-1}{i}$ の総和であることがわかる．さらに同変コホモロジーの理論から，予想する剰余環 $\mathbb{C}[t,p_1,\cdots,p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}$ の $\mathbb{C}[t]$-加群としての斉次な生成元で，「各次数 i の生成元がちょうど c_i 個あるようなもの」が存在すれば，$H^*_{S^1}(\mathcal{W})\cong\mathbb{C}[t,p_1,\cdots,p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}$ が成立することがわかる． $\mathbb{C}[t,p_1,\cdots,p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}$ のヒルベルトシリーズの計算により $n\le 8$ においては $\mathbb{C}[t,p_1,\cdots,p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}\cong H^*_{S^1}(\mathcal{W})$ が確かめられた．

References

[1] H. Abe, T. Horiguchi. *A survey of recent developments on Hessenberg varieties.* , (2019).

[2] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A.* Research Announcement, Morfismos 18(2014), No. 2, pp.51-65

[3] Y. Fukukawa, M. Harada and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties.* . Math. Soc. Japan. 67(3):1147-1159,(2015).

[4] M. Harada, J. Tymoczko, *A Positive Monk Formula in the S1 -Equivariant Cohomology of Type A Peterson Varieties.* Mathematics and Statistics: Faculty Publications, Smith College, Northampton, MA. (2011).

[5] E. Insko and A. Yong, *Patch ideals and Peterson varieties.* Transform Groups 17 (2012), no. 4, 1011 – 1036.

[6] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight ρ.* Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), 43 – 91.

General education
National Institute of Technology, Nagaoka College
e-mail address : m_nakayama[at]nagaoka-ct.ac.jp