AN ASYMPTOTIC FORMULA OF SPECTRAL AVERAGE OF CENTRAL L-VALUES ON GSp_2 FOR SQUARE-FREE LEVELS

上智大学 久家 聖二

本稿では, 2 次の square-free レベルの Siegel カスプ形式の Rankin-Selberg 積分を用いて, いくつかの保型 L 関数のモーメントの漸近式について紹介し, それらの L 関数の特殊値の非消滅性に関する結果を述べる．またそれに付随して得られる有限個の素数に対する佐武パラメータの等分布性に関する結果や, Siegel カスプ形式に対応する保型表現の Hecke 体の次数評価に関する結果も紹介する．本研究は都築正男氏（上智大学）との共同研究である.

1. 研究の背景

l, N を自然数とし,$\mathfrak{h}_2 := \{Z \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z, \mathrm{Im}(Z) > 0\}$ を 2 次の Siegel 上半空間とする．ウェイト l, レベル $\Gamma_0^{(2)}(N) := \{[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}] \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}) \mid C \in N \cdot \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})\}$ の Siegel カスプ形式の空間を $S_l(N)$ で表す．今, $\Phi \in S_l(N)$ を Hecke 同時固有形式とすると, Φ の Fourier 係数から構成されるある種の Dirichlet 級数が Rankin-Selberg 積分を介して Φ に付随する spinor L 関数を用いて表せるという Andrianov([1],[2]) による古典的な結果が知られている．Andrianov の仕事は $N = 1$ のケースだが, 後に Piatetsuki-Shapiro によりアデリックな設定でレベル付きの場合が定式化されている ([15])．講演者は都築正男氏との共同研究により, N が square-free かつ l が 6 以上の場合に Andrianov 型の Rankin-Selberg 積分を明示的に計算し, spinor L 関数の関数等式に表れる ε 因子を具体的に計算した ([12])．本研究ではその明示式を用いて, spinor L 関数の特殊値の harmonic weight と呼ばれる重みが付いた平均 (1 次モーメント) のウェイト, レベルそれぞれの増大に関する漸近式を求めた.

これは, ある Poincaré 級数から構成されるカスプ形式に対する Rankin-Selberg 積分を計算し, 相対跡公式による考察の元, 幾何サイドの振る舞いを調べることにより得られる.

今回扱った Andrianov 型の Rankin-Selberg 積分を用いた考察では, Bessel 周期の非消滅性も同時に得られる．この Bessel 周期の非消滅性は Liu([14]) によって, 市野-池田予想の特別な場合として, ある保型 L 関数の特殊値の非消滅性との関連性が示唆された (今回のケースでは Böcherer 予想そのもの)．これは後に古澤-森本らによって証明されている ([8],[9],[10]).

また, この後紹介する結果では, 有限個の素点に対する Hecke 作用素を上手くコントロールすることにより, 保型 L 関数の特殊値の非消滅性の他に有限個の素数に対する佐武パラメータの等分布性に関する性質が成り立つことも述べる. 最後に最近の佐久川-杉山のプレプリント ([19]) の Hecke 固有値の整数性に関する結果と GSp_2 の Arthur 分類に基づいた $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現のスタンダード L 関数の中心値の非消滅性と Hecke 体の次数の評価について紹介する.

Siegel カスプ形式の spinor L 関数のモーメントの評価に関するいくつかの先行研究を紹介する. Blomer によるウェイトアスペクトに関する先行研究 ([4]) があり, 北岡の公式 (Petersson 跡公式の Siegel モジュラー類似), 近似関数等式等を用いた考察により, 1 次, 2 次モーメントの漸近的な振る舞いまで記述している. また, Waibel([20]) による square-free レベルの元でのレベルアスペクトに関する同様の研究がある. いずれも Hecke 固有値の等分布性に関しては考慮されていない. Kowalski-Saha-Tsimerman([11]) の論文ではウェイトアスペクトでこの考察がされているが, 彼らは spinor L 関数の絶対収束域での値を扱っている. レベルアスペクトの場合は Dickson([6]) の研究がある.

2. 主結果

2 次の similitude symplectic group GSp_2 を

$$\mathrm{GSp}_2 = \left\{ g \in \mathrm{GL}_4 \mid {}^t g \begin{bmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{bmatrix} g = \nu(g) \begin{bmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{bmatrix} \right\}$$

で定義する. ここで, $\nu : \mathrm{GSp}_2 \to \mathbb{G}_m$ は similitude norm を表す. 特に, $\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{Ker}(\nu)$ である.

また, 素数 p と自然数 N に対して, $\mathrm{GSp}_2(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト部分群

$$\mathrm{K}_p := \mathrm{GSp}_2(\mathbb{Z}_p), \quad \mathrm{K}_0(N\mathbb{Z}_p) := \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ N\mathbb{Z}_p & N\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ N\mathbb{Z}_p & N\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{bmatrix} \cap \mathrm{K}_p$$

が定義される. さらに, $\mathrm{K}_{\mathbf{f},0}(N) := \prod_{p:\mathrm{prime}} \mathrm{K}_0(N\mathbb{Z}_p)$ とおく.

$\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環とする. Siegel カスプ形式 $\Phi \in S_l(N)$ は $\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{A})$ 上の関数に持ち上げることができるので, それを $\widetilde{\Phi}$ $(\in L^2_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{A})))$ で表すことにし, $\widetilde{S}_l(N) := \{\widetilde{\Phi} \mid \Phi \in S_l(N)\}$ とおく.

以下, $\mathbb{Q}$ 上の線形代数群 G と, $\mathsf{G}(\mathbb{A})$ の既約許容表現 π に対して, その有限部分を $\pi_{\mathbf{f}}$ で表すことにする. $\Pi_{\mathrm{cusp}}(l, N)$ を, $\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{A})$ 上の既約カスプ表現 π で $\pi \cap \tilde{S}_l(N) \neq \{0\}$ を満たすようなもの全体の集合とする. 各 π に対して, Atkin-Lehner involution $\pi_{\mathbf{f}}\left(\begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & N & & \\ -N & & & \end{bmatrix}\right)$ の固有関数になっているような Hecke 同時固有形式

$\widetilde{\Phi^0_\pi} \in S_l(N) \setminus \{0\}$ を一つ選んでおき, 対応する Siegel カスプ形式を $\Phi^0_\pi \in S_l(N)$ とおく.

さらに集合 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)^{\mathrm{G,new}}$ を, 齋藤-黒川リフト, 吉田リフトからも構成されない $\pi = \otimes_p \pi_p \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)$ であって, 全ての素数で $\pi_p^{\mathrm{K}_0(N\mathbb{Z}_p)} \neq \{0\}$ を満たすようなもの全体として定義する. $\Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)^{\mathrm{G,new}}$ は Arthur 分類 ([3]) によって特徴づける事もできる. 実際 $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)^{\mathrm{G,new}}$ の Arthur パラメータは $\pi^{\mathrm{GL}} \boxtimes \mathbf{1}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ (π^{GL} は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ の symplectic 型の既約カスプ表現 (i.e. $L(s,\pi,\wedge^2)$ が $s=1$ で極を持つ)) の形をしている. (Schmidt の論文 ([17]) ではこれらを general type と呼んでおり, “ G” の記号はここから来ている.)

本研究では有限個の素点に対する佐武パラメータの等分布性に関する結果も含んでいるので, それを説明するための記号を定義する. p を素数とし, $\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{Q}_p)$ 上の不分岐既約許容表現 π_p に対する佐武パラメータを $A_p = \mathrm{diag}(a_p, b_p, a_p^{-1}, b_p^{-1}) \in {}^L\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$ とおく. A_p を 2 つの複素数の組 $(a_p, b_p) \in (\mathbb{C}^\times)^2$ とみると, 佐武同型により, PGSp_2 上の不分岐既約許容表現の同値類の集合と, 集合 $(\mathbb{C}^\times)^2/W$ との間に全単射が存在する. ここで, $W \subset \mathrm{Aut}((\mathbb{C}^\times)^2)$ は C_2-Weyl 群, これは 2 つの変換 $(a,b) \mapsto (b,a)$, $(a,b) \mapsto (a^{-1}, b)$ により生成される位数 8 の群である. $(\mathbb{C}^\times)^2/W$ の tempered locus(不分岐な tempered 表現に対応する佐武パラメータの集合) を $[Y_p^0] := \mathrm{U}(1)^2/W$ とおく. 素数からなる有限集合 S に対しては, $[Y_S^0] := \prod_{p \in S} [Y_p^0]$ とおく. また, $\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現 $\pi = \otimes_p \pi_p$ に対して, $y_S(\pi) := (a_p, b_p)_{p \in S}$ とおく. Weissauer の結果 ([21]) により $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)^{\mathrm{G,new}}$ かつ S が N を割る素数を含まないときは $y_S(\pi) \in [Y_S^0]$ が成り立つ. つまり π の不分岐な素点においては Ramanujan 予想が成り立つ.

spinor L 関数

Piatetski-Shapiro による GSp_2 の Bessel 模型を用いた spinor L 関数の性質について簡単に見ていく. $\mathrm{PGSp}_2(\mathbb{Q}_p)$ 上の不分岐既約許容表現 π_p に対しては, 局所 spinor L 因子 は

$$L(s, \pi_p) := \det(1_4 - p^{-s} A_p)^{-1}, \quad s \in \mathbb{C}$$

で与えられる. (一般の既約許容表現に対しての定義は ([15]) を参照. 明示式は ([16]) にリストがある.) これを $\mathbb{Q}_p$ 上のある指標 $\mu_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p}$ で twist した L 因子を $L(s, \pi_p, \mu_p)$ で表す. $\pi = \otimes_p \pi_p \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)$ の spinor L 関数を有限位数のイデール指標 $\mu = \prod_p \mu_p \in \widehat{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}}$ で twist したもの;

$$L(s, \pi, \mu) := \prod_{p:\mathrm{prime}} L(s, \pi_p, \mu_p), \quad \mathrm{Re}(s) \gg 1$$

を考えると, これは複素平面全域に有理型解析接続を持ち, 関数等式

$$\widehat{L}(s,\pi,\mu)=\varepsilon(s,\pi,\mu)\widehat{L}(1-s,\pi,\mu^{-1})$$

を満たす. ここで,

$$\widehat{L}(s,\pi,\mu)=\Gamma(s+\tfrac{1}{2})\Gamma(s+l-\tfrac{3}{2})\times L(s,\pi,\mu)$$

は spinor L 関数の完備化であり, ε 因子は明示的に与えらている ([12]). 特に μ が 2 次指標 (i.e. $\mu^2=\mathbf{1}$) のとき, $\widehat{L}(s,\pi,\mu)$ は self-dual な関数等式を持つ.

さて, 以下では今回の主結果である, harmonic weight と呼ばれる量によって重み付けされた spinor L 関数の 1 次モーメントの漸近評価に関する結果を紹介する.

$D<0$ を基本判別式とし, $E=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ とおく. E のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(E)$ と二次形式の関係について少しだけ触れる. 半整数 2 次正定値対称行列の集合 $\mathcal{Q}^+$ 上には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の右作用:

$$\mathcal{Q}^+\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ni(\gamma,T)\mapsto {}^t\gamma T\gamma\in\mathcal{Q}^+$$

が定義され, 部分集合 $\mathcal{Q}^+_{\mathrm{prim}}(D):=\left\{T\in\mathcal{Q}^+\;\middle|\;\det T=\frac{-D}{4}\right\}$ はこの作用で安定である. このとき, 標準的な全単射 $\mathrm{Cl}(E)\cong\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{Q}^+_{\mathrm{prim}}(D)$ が存在する.

Harmonic weight $\omega^{\Phi}_{l,D,\Lambda}$

以下, Λ をイデアル類群 $\mathrm{Cl}(E)$ 上の任意の指標とする. $\Phi\in S_l(N)$ に対して, Φ の Fourier 展開

$$\Phi(Z):=\sum_{T\in\mathcal{Q}^+}a_\Phi(T)\exp(2\pi i\mathrm{tr}(TZ)),\quad Z\in\mathfrak{h}_2$$

を考え, Fourier 係数 $a_\Phi(T)$ を用いて, 次の量を定義する;

$$R(\Phi,D,\Lambda):=\sum_{[T]\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{Q}^+_{\mathrm{prim}}(D)}a_\Phi(T)\Lambda([T])^{-1}.$$

ここで, $[T]$ は T の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-同値類を表し, 上記の全単射により $\mathrm{Cl}(E)$ の元と同一視している. この和が well-defiined であることは Φ の保型性から分かる. $\Phi\neq 0$ のときはさらに

$$\omega^{\Phi}_{l,D,\Lambda}:=\sqrt{\pi}(4\pi)^{3-2l}\Gamma(l-\tfrac{3}{2})\Gamma(l-2)\left(\tfrac{|D|}{4}\right)^{\frac{3}{2}-l}\frac{2-\delta_{\Lambda^2,\mathbf{1}}}{w_Dh_D}\frac{|R(\Phi,D,\Lambda)|^2}{\langle\Phi|\Phi\rangle}$$

とおく. ここで, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は Petersson norm;

$$\langle\Phi|\Phi\rangle:=\frac{1}{[\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(2)}(N)]}\int_{\Gamma_0^{(2)}(N)\backslash\mathfrak{h}^2}|\Phi(Z)|^2(\det Y)^{l-3}dXdY,\quad Z=X+iY,\Phi\in S_l(N),$$

$h_D := \#\mathrm{Cl}(E)$, w_D は E の root of unity の個数である．$\omega_{l,D,\Lambda}^{\Phi}$ は Kowalski-Saha-Tsimerman の論文 ([11]) が初出．ここで, $R(\Phi_\pi^0, D, \Lambda^{-1}) \neq 0$ を満たす $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)^{\mathrm{G,new}}$ の集合を $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{E,\Lambda}(l,N)^{\mathrm{G,new}}$ で表すことにする．$R(\Phi_\pi^0, D, \Lambda^{-1})$ は (E,Λ) に関する global Bessel 周期 ([15]) に表れる量である.

主結果の説明に入る前にいくつかの仮定を設定する;

- $l \in 2\mathbb{Z}_{\geq 7}$.
- N は 1 または $E/\mathbb{Q}$ 上惰性的な奇素数.
- μ は 2 次指標 (即ち $\mu^2 = \mathbf{1}$) であり, μ の conductor; $\mathrm{cond}(\mu) =: M$ は square-free かつ $(DN, M) = 1$.
- S は素数からなる有限集合で「$p \in S \Longrightarrow p \nmid DMN$」を満たす.

これらは証明の技術的な困難を避けるために設定されたものである.

Theorem 2.1. 任意の $\alpha \in C([Y_S^0])$ に対して，l を固定して $N \to +\infty$，もしくは $N=1$ として $l \to +\infty$ としたとき, 以下の漸近式が成り立つ.

$$\frac{(1+N^{-2})^{-1}}{(\log Nl)^{\delta_{\Lambda\mu_E,\mathbf{1}}}[\mathbf{Sp}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(2)}(N)]} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{E,\Lambda}(l,N)^{\mathrm{G,new}}} \mathfrak{t}(\pi)\, \alpha(y_S(\pi))\, L\left(\tfrac{1}{2}, \pi, \mu\right) \omega_{l,D,\Lambda^{-1}}^{\Phi_\pi^0}$$

$$\longrightarrow 2\mathfrak{m}_S^{\Lambda}(\alpha) \begin{cases} L(1, \kappa_D) & (\Lambda\mu_E = \mathbf{1}) \\ L(1, \mathcal{AI}(\Lambda) \times \mu) & (\Lambda\mu_E \neq \mathbf{1}) \end{cases}.$$

ただし，$\mathfrak{t}(\pi) = \dim(\pi_{\mathbf{f}}^{\mathrm{K}_{\mathbf{f},0}(N)})$，$\mathfrak{m}_S^{\Lambda}$ は $[Y_S^0]$ 上の Lebesgue 測度に関して絶対連続な Radon 測度 (明示的に定義されている) であり，κ_D は，大域類体論で $E/\mathbb{Q}$ に対応する $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}$ 上の 2 次指標，μ_E は $\mu_E = \mu \circ \mathrm{N}_{E/\mathbb{Q}}$ で定義される E のイデール群 $\mathbb{A}_E^\times$ 上の指標である，$\mathcal{AI}(\Lambda)$ は Λ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ への automorphic induction である.

ここで, 古澤-森本 ([10]) によって解決された Böcherer 予想の主張によれば, $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{E,\Lambda}(l,N)$ に対して,

$$L(\tfrac{1}{2}, \pi \times \mathcal{AI}(\Lambda)) \neq 0 \iff R(\Phi_\pi^0, D, \Lambda) \neq 0$$

が成り立つ (実際には, $L(\frac{1}{2}, \pi \times \mathcal{AI}(\Lambda))$ と $|R(\Phi_\pi^0, D, \Lambda)|^2$ の間に等式が成り立つ). さらに Dickson-Pitale-Saha-Schmidt らが N が square-free かつ素因数の場合に分岐素点での局所 Gross-Prasad 周期を計算し, $\frac{|R(\Phi,D,\Lambda)|^2}{\langle \Phi_\pi^0 | \Phi_\pi^0 \rangle}$ の明示式を決定している ([7]). これと，Theorem 2.1 と中心値 $L(\frac{1}{2}, \pi, \mu)$ の non-negativity([13]) の帰結として次の Corollary が得られる.

Corollary 2.2. 記号や仮定は Theorem 2.1 と同じとする. $[Y_S^0]$ の空でない開集合 U に対して, 次の 4 条件を満たす $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(l, N)$ の集合を $\mathfrak{P}(l, N, \Lambda, \mu, U)$ とおく;

- $\pi_{\mathbf{f}}^{\mathrm{K}_0(N)} \neq \{0\}$.
- π は齋藤-黒川リフト, 吉田リフトからは構成されない (general type).
- $L(\frac{1}{2}, \pi, \mu)L(\frac{1}{2}, \pi \times \mathcal{AI}(\Lambda)) > 0$.
- $y_S(\pi) \in U$.

このとき, 次が成り立つ.

(i) l を固定したとき, $E/\mathbb{Q}$ 上惰性的な十分大きい素数 N に対して $\mathfrak{P}(l, N, \Lambda, \mu, U) \neq \varnothing$.

(ii) $N = 1$ のとき, 十分大きな $l \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathfrak{P}(l, N, \Lambda, \mu, U) \neq \varnothing$.

これを確かめるためには空でない開集合 $U' \subset [Y_S^0]$ を $\overline{U'} \subset U$ を満たすように取り, α として U' 上では恒等的に 1, U の外では恒等的に 0 となるようなものを選べばよい.

$S = \varnothing$ かつ $D = -4$(i.e. $E = \mathbb{Q}(i)$) のとき $N = 1$ とおけば Blomer([4]), l を固定すれば Waibel([20]) ら 1 次モーメントの結果とそれぞれ一致する.

Hecke 体の次数の増大に関する結果

上記で述べた通り, Arthur 分類により $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(l, N)^{\mathrm{G,new}}$ には $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ 上の symplectic 型の既約カスプ表現 $\Pi(= \pi^{\mathrm{GL}})$ が対応していて

$$L(s, \pi) = L(s, \Pi)$$

を満たしている. 最後に, 講演では紹介しなかった内容である Π の the field of rationality $\mathbb{Q}(\Pi)$($\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \mid {}^{\sigma}\Pi_{\mathbf{f}} \cong \Pi_{\mathbf{f}}\}$ の固定体として定義される $\mathbb{C}$ の部分体) の次数に関する評価について紹介する. 佐久川-杉山によるプレプリント ([19]) で示されている Hecke 固有値の整数性に関する結果を用いれば, 以下のことが証明できる.

Theorem 2.3. D, l,N,M,μ に関する仮定は Theorem 2.1 と同じとする. DM を割らない素数 p を一つ固定する. このとき, 次を満たす定数 N_p, $C_p > 0$ が存在する: $E/\mathbb{Q}$ 上惰性的な任意の素数 $N > N_p$ に対して, 次の 5 条件を満たす $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ 上の既約カスプ表現 Π が存在する.

- Π の conductor は N^2
- Π は symplectic 型.
- Π は infinite type $(l, 2, 1, 3 - l)$ の regular algebraic 表現 (定義は [5]) であり, $\mathbb{Q}(\Pi)$ は代数体である.

- $L(\frac{1}{2},\Pi)L(\frac{1}{2},\Pi\times\kappa_D)L(\frac{1}{2},\Pi\times\kappa_M)\neq 0$.
- $[\mathbb{Q}(\pi):\mathbb{Q}]>C_p\sqrt{\log\log N}$.

これは ([19, §3.2]) と同様の方針で

$$\#\{y_{\{p\}}(\pi)\in[Y_p^0]\mid\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}^{E,\mathbf{1}}(l,N),L(\tfrac{1}{2},\pi,\mu)\neq 0\}$$

の上界, 下界を評価することで示せる. 上界の計算の際に Hecke 固有値の整数性を用いる. 下界の計算は [18, Lemma 6.16] と同様にできる.

References

[1] Andrianov, A.N., *Dirichlet series with Euler products in the theory of Siegel modular forms of genus 2*, Trudy Math. Inst. Steklov, **112** (1971), 73–94.

[2] Andrianov, A.N., *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2*, Uspekhi Mat. Nauk, **29** no.3 (1974), 43–110.

[3] Arthur, J., *The endoscopic classification of representations. orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI,

[4] Blomer, V., *Spectral summation formula for* GSp(4) *and moments of spinor L-functions*, J. Eur.Math.Soc. **21** (2019), no.6, 1751–1774.

[5] Clozel, L., *Motifs et formes automorphes: Applications du principe de fonctorialit ́e*, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988) Perspectives in Mathematics, vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, 77–159.

[6] M. Dickson, *Local spectral equidistribution for degree two Siegel modular forms in level and weight aspects*, Int. J. Number Theory **11** (2015), 341–396.

[7] Dickson, M., Pitale, A., Saha, A, Schmidt, R., *Explicit refinements of Böcherer's conjecture for Siegel modular forms of square-free level*, J. Math. Soc. Japan **72**, No. 1 (2020) pp. 251–301.

[8] Furusawa, M., Morimoto, K., *On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for* $\mathrm{SO}(2n+1)\times\mathrm{SO}(2)$, Math. Ann. **368** (2017), 561–586.

[9] Furusawa, M., Morimoto, K., *Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Boecherer's conjecture*, J. Eur. Math. Soc. **23** (2021) no.4, 1295–1331.

[10] Furusawa, M., Morimoto, K., *On the Gross-Prasad conjecture with its refinement for* $(\mathrm{SO}(5),\mathrm{SO}(2))$ *and the generalized Böcherer's conjecture*, Compos. Math. **160**(2024), no. 9, 2115–2202.

[11] Kowalski, E., Saha, A., Tsimerman, J., *Local spectral equidistribution for Siegel modular forms and applications*, Compositio Math. **148**, Issu 2 (2012),335–384.

[12] Kuga, S., Tsuzuki, M., *Rankin-Selberg integral for Siegel modular forms of degree* 2 *with square free levels*, arXiv:2407.05583.

[13] Lapid, E., Rallis, S., *On the nonnegativity of* $L(\frac{1}{2},\pi)$ *for* SO_{2n+1}. , Ann.of Math.**157** (2003), 891–917.

[14] Liu, Y., *Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Bessel periods*, J. reine angew. Math. **717** (2016), 133–194.

[15] Piatetski-Shapiro, I.I., *L-functions for* GSp_4, Pacific J. Math. Special Issue (1997), 259– 275.

[16] Roberts, B., Schmidt, R., *Local newforms for* GSp(4), Lecture Notes in Mathematics **1918**, Springer, Berlin, 2007.

[17] Schmidt, R., *Packet structure and paramodular forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 3085–3112.

[18] Shin, S.W., Templier,N., *On fields of rationality for automorphic representations*, Compos. Math. **150** (2014), 2003–2053.

[19] Sakugawa, K., Sugiyama, S., *Integrality of Hecke eigenvalues and the growth of Hecke fields*, (preprint) arXiv: 2401.11716v1.

[20] Waibel, F., *Moments of spinor L-functions and symplectic Kloosterman sums*, Quart. J. Math. **70** (2019), 1411–1436.

[21] Weissauer, R., *Endoscopy for* GSp(4) *and the cohomology of Siegel threefolds*, Lecture Notes in Mathematics, **1968**, Springer, Berlin (2009).