

The p -adic constant for mock modular forms associated to CM forms

九州大学マス・フォア・イノベーション連係学府 田島 凌太
Ryota Tajima
Joint Graduate School of Mathematics for Innovation,
Kyushu University

1. Introduction

本稿では、2025年1月21日にRIMSで著者が講演した、モックモジュラー形式の p 進理論に関する内容を概説する。

本稿の主演であるモックモジュラー形式とは、RamanujanがHardyに記した最後の手紙に登場するモックテータ関数を起源にもつ。モックテータ関数とは、モジュラー形式ではないが、モジュラー形式に似た性質を持つ q 級数である。Ramanujanは自身の手紙にはその定義を述べていなかったが、2002年にZwegers氏によってモックテータ関数の数学的枠組みが与えられた[16]。彼はモックテータ関数が調和Maass形式と呼ばれる関数の正則部分として解釈できることを発見した。これを踏まえ、現在では調和Maass形式の正則部分のことをモックモジュラー形式と呼んでいる。

一般にモックモジュラー形式の係数は代数的ではないと考えられており、 p 進的な性質に関しての研究はあまり盛んには行われていなかった。しかし、normalized newform $g \in S_k(\Gamma_0(N))$ に対し、ある種の代数性を満たすモックモジュラー形式 $F^+(q)$ が存在することがわかった。(cf. Definition 2.4) さらに、この g から定まるモックモジュラー形式 F^+ を g や $g|V_p$ の Eichler 積分である $E_g(q) = \sum_{n>0} (n)^{1-k} a_g(n) q^n$ や $E_{g|V_p}(q) = \sum_{n>0} (pn)^{1-k} a_g(n) q^{pn}$ の二つを用いて補正してあげると、 p 進モジュラー形式が得られることが知られている。著者は補正の際に現れる $E_{g|V_p}(q)$ の係数 α_g に着目し、 g が虚二次体 K に虚数乗法を持ち素数 p が K で惰性する場合に、その性質を調べた。本稿の内容についてより詳しく知りたい方は、著者のプレプリント [14] を参照していただきたい。

2. 調和 Maass 形式の基本的な性質

本セクションでは、調和 Maass 形式の基本的な話について述べる。調和 Maass 形式についてより詳しく知りたい方は、[3][6] を参照していただきたい。まずは調和 Maass 形式の定義について述べる。

The author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP23KJ1720 and WISE program (MEXT) at Kyushu University.

Definition 2.1 ([6]). $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ を smooth な関数とする。 F が以下の 3 条件を満たすとき、 F を重さ k レベル N の調和 Maass 形式と呼ぶ。 ($k \in 2\mathbb{N}$ 、 $N \in \mathbb{N}$ とする。)

$$(1) F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k F(\tau) \text{ が全ての } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ で成り立つ。}$$

$$(2) \Delta_k F = 0. \text{ ただし、 } \Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + iky \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ である。}$$

(3) ある多項式 $P_\infty(z) \in \mathbb{C}[q^{-1}]$ と $\varepsilon > 0$ が存在して、

$$F(\tau) - P_\infty(\tau) = O(e^{-\varepsilon y}) \quad (y \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。また、 ∞ 以外のカuspでも同様の性質を満たす。

重さ k レベル N の調和 Maass 形式全体の集合を $H_k(\Gamma_0(N))$ と書く。ここで注目すべき条件は (2) である。古典的なモジュラー形式やカusp形式では上半平面上正則な関数を考えていたが、調和 Maass 形式ではそれよりも広いクラスの関数を考えている。実際、カuspにのみ極を持つモジュラー形式を弱正則モジュラー形式と呼ぶが、弱正則モジュラー形式は自然に調和 Maass 形式になる。

調和 Maass 形式 $F \in H_k(\Gamma_0(N))$ はフーリエ展開を持つことが知られており、それは正則部分 $F^+(q)$ と非正則部分 $F^-(q)$ の和に分解される。正則部分 $F^+(q)$ の q 展開は

$$F^+(q) := \sum_{n \gg -\infty} a^+(n) q^n$$

という形をしている。また、部分和 $\sum_{n \leq 0} a^+(n) q^n$ を F の主要部と呼ぶ。一方、非正則部分の q 展開は係数に不完全ガンマ関数などが現れる。しかし、 F の重さが 0 の場合 $F^-(q)$ の q 展開は

$$F^-(q) = \sum_{n > 0} a^-(-n) \bar{q}^n$$

と簡単に書けることが知られている。ここで \bar{q} は q の複素共役である。本稿の主結果では重さ 0 の調和 Maass 形式しか登場しないため、この形だけ目を通していただければ十分である。まとめると、重さ 0 の調和 Maass 形式のフーリエ展開は

$$F(q) = F^+(q) + F^-(q) = \sum_{n \gg -\infty} a^+(n) q^n + \sum_{n > 0} a^-(-n) \bar{q}^n$$

という形をしている。本稿の主役であるモックモジュラー形式を以下のように定義する。

Definition 2.2 ([3, Definition 5.16]). 非正則部分が 0 でない調和 Maass 形式の正則部分を、モックモジュラー形式と呼ぶ。

次に、調和 Maass 形式の性質を調べる際に重要となる 2 つの微分作用素を紹介する。重さ k レベル N の弱正則モジュラー形式の空間を $M_k^!(\Gamma_0(N))$ と書く。前述の通り調和 Maass 形式の定義から、 $M_k^!(\Gamma_0(N)) \subset H_k(\Gamma_0(N))$ が成り立つ。特に、弱正則モジュラー形式は非正則部分が消えている調和 Maass 形式と解釈できる。2 以上の自然数 k に対して、 $\xi_{2-k} := 2iy^{2-k} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \right)$ と定め、 $D := \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau}$ と置く。このとき、

これらの微分作用素は

$$\begin{aligned} D^{k-1} &: H_{2-k}(\Gamma_0(N)) \rightarrow M_k^!(\Gamma_0(N)), \\ \xi_{2-k} &: H_{2-k}(\Gamma_0(N)) \rightarrow S_k(\Gamma_0(N)) \end{aligned}$$

という写像を定める。また、

$$D^{k-1}(F^-) = 0, \quad \xi_{2-k}(F^+) = 0$$

が成り立つことも知られている。つまり、 D^{k-1} は調和 Maass 形式の正則部分のみを、 ξ_{2-k} は非正則部分のみの情報を抜き取ってくれる。

Theorem 2.3 ([5, Corollary 3.8]). 写像 $\xi_{2-k} : H_{2-k}(\Gamma_0(N)) \rightarrow S_k(\Gamma_0(N))$ は全射であり、その核は $M_{2-k}^!(\Gamma_0(N))$ である。

この定理のおかげで、古典的なカスプ形式を ξ_{2-k} で調和 Maass 形式に持ち上げることができる。次に、normalized newform $g \in S_k(\Gamma_0(N))$ に対して、good for g という概念を定義する。これが Introduction で述べた normalized newform に対応する代数的なモックモジュラー形式を与える。

Definition 2.4 ([3, Definition 7.5]). $g \in S_k(\Gamma_0(N))$ を normalized newform とし、 F_g を g のヘッケ体とする。 $F \in H_{2-k}(\Gamma_0(N))$ が以下の 3 条件を満たすとき、 F を good for g と呼ぶ。

- (1) F の ∞ における主要部は $F_g[q^{-1}]$ の元である。
- (2) ∞ 以外のカスプでは、主要部は全て定数である。
- (3) $\xi_{2-k}(F) = \frac{g}{\|g\|^2}$ が成り立つ。

ここで、主要部とは調和 Maass 形式の正則部分 $F^+(q) = \sum_{n \gg -\infty} a^+(n)q^n$ の 0 以下のべきの部分 $\sum_{n \leq 0} a^+(n)q^n$ のことである。また、 F が good for g のとき、その正則部分を本稿では good lift と呼ぶ。

Proposition 2.5 ([6, Proposition 5.1]). $g \in S_k(\Gamma_0(N))$ が normalized newform ならば、good for g となる調和 Maass 形式 $F \in H_{2-k}(\Gamma_0(N))$ が存在する。

Remark 2.6. normalized newform g に対して、good for g となる調和 Maass 形式は一意的ではない。

good for g の定義は主要部、つまり 0 以下のべきについてのみ代数性を要求していた。しかし、 g が虚数乗法を持つ場合は全ての係数が代数的になることが知られている。

Theorem 2.7 ([9, Corollary 1.2]). $g \in S_k(\Gamma_0(N))$ を虚数乗法を持つ normalized newform とする。 $F \in H_{2-k}(\Gamma_0(N))$ が good for g ならば、 $F^+(q)$ の係数は全て F_g に属する。

この定理により、虚数乗法を持つ normalized newform g から、(一意的ではないものの) 係数が全て代数的なモックモジュラー形式 $F^+(q)$ が構成できた。以降では、この代数的なモックモジュラー形式の持つ p 進的な性質について触れていく。

3. モックモジュラー形式を用いた p 進モジュラー形式の構成方法

本セクションでは、 g が虚二次体 K に虚数乗法を持ち p が K で惰性する場合に、[4] [7] [11] [12] など得られている結果を簡単に紹介する。より詳しく、 g の good lift から p 進モジュラー形式を構成する方法について紹介する。本セクションでは、また、代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ と埋め込み $\iota: \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。本稿では、 q 級数 $A(q) \in \mathbb{C}_p((q))$ が p 進モジュラー形式のフーリエ展開であることを、次で定義する。ある $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の弱正則モジュラー形式の列 $(B_n(q))$ が存在して、 q 級数として $(B_n(q))$ は $A(q)$ に p 進的に収束する。また、 $\mathbb{C}_p((q))$ の作用素 V_p を以下のように定める。

$$V_p \left(\sum_{n \gg -\infty} a(n)q^n \right) := \sum_{n \gg -\infty} a(n/p)q^n$$

次に g と $g|V_p$ の Eichler 積分を以下で定める。

$$E_g(q) := \sum_{n>0} n^{1-k} a_g(n)q^n,$$

$$E_{g|V_p}(q) := \sum_{n>0} (pn)^{1-k} a_g(n)q^{pn}.$$

ただし、 $a_g(n)$ は g の n 次のフーリエ係数である。 F を good for g である調和 Maass 形式とする。各 p 進数 $\gamma \in \mathbb{C}_p$ に対して、形式的べき級数 $\mathcal{F}_\gamma \in \mathbb{C}_p((q))$ を

$$\mathcal{F}_\gamma := F^+ - \gamma E_{g|V_p}$$

と定める。 β を $X^2 - a_g(p)X + p^{k-1} = X^2 + p$ の根とする。 $(p$ が K で惰性しているため、 $a_g(p) = 0$ が成り立つ。) このとき、以下の定理が成り立つ。

Theorem 3.1 ([4, Theorem 1.3]). p は N を割らない素数であるとする。このとき、 g にのみ依存するある一意な p 進数 α_g が存在して、 \mathcal{F}_{α_g} は p 進モジュラー形式のフーリエ展開になる。更に、 α_g は以下の式で与えられる。

$$\alpha_g = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{D^{k-1}(F)}(p^{2m+1})}{\beta^{2m}}.$$

ただし、 $a_{D^{k-1}(F)}(n)$ は $D^{k-1}(F)$ の n 次のフーリエ係数である。

更に、L. Candelori と F. Castella はモックモジュラー形式の幾何学的理論を整備し、 \mathcal{F}_{α_g} がより強く過収束モジュラー形式になることを示した [7]。この p 進数 α_g に対して、著者は以前に以下の定理を示した。

Theorem 3.2 ([15, Theorem 1.5]). p を $2N$ を割らない素数で、 $\dim S_k(\Gamma_0(N)) = 1$ と仮定する。このとき、 p が K で惰性するならば、 α_g は p 進単数である。

まとめると、 g から定まる代数的なモックモジュラー形式 $F^+(q)$ と、 g から定まる p 進数 α_g を用いて p 進モジュラー形式 \mathcal{F}_{α_g} が構成された。著者の本稿における主結果は、 g が重さ 2 の整数係数の場合に、 α_g が 0 でないことを示し、その p 進付値のある写像の次数で記述したことである。

4. 重さ 0 のモックモジュラー形式の p 進的性質

本セクションでは、[11] で得られた結果を、 $g \in S_2(\Gamma_0(N))$ が整数係数で虚数乗法を持つ場合に紹介する。参考文献として、[1][11] の二つが挙げられる。まず、 $g \in S_2(\Gamma_0(N))$ を整数係数で、虚二次体 K に虚数乗法を持つものとする。そして、 $F \in H_0(\Gamma_0(N))$ を good for g であるとする。まず、 $F^+(q)$ の p 進ホッジ分解とも解釈でき得る結果が知られている。

Proposition 4.1 ([11, Proposition 5]). p を N を割らない素数とする。このとき、ある一意的な p 進数 $\lambda_p, \mu_p \in \mathbb{Q}_p$ が存在して、

$$(4.1) \quad F^+(q) - \lambda_p E_g(q) - \mu_p E_{g|V_p}(q) \in \mathbb{Z}_p((q)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

が成り立つ。

著者はこの結果のフロベニウス部分の係数 μ_p に着目し、それが α_g と一致することを示した。

Theorem 4.2. p が N を割らず、 K で惰性するとする。このとき、(4.1) において、 $\lambda_p = 0$ 、 $\mu_p = \alpha_g$ が成り立つ。

この定理から、 p 進数 α_g を調べるには、 $F^+(q)$ の p 進ホッジ分解を研究すればよいことがわかる。しかし、 g の good lift $F^+(q)$ は抽象的に与えられており、その具体例ですらほとんど計算できていない。そのため、 $F^+(q)$ を直接扱うのではなく $F^+(q)$ に近い別の対象を用意し、その p 進ホッジ分解を研究する。この別の対象が、後述の $\mathcal{N}^+(q)$ である。

g は重さ 2 の整数係数 normalized newform であるので、周期格子 Λ と modular parametrization $\phi : X_0(N) \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ が

$$\Lambda := \left\{ \int_{\infty}^{\gamma(\infty)} 2\pi i g(\tau) d\tau \mid \gamma \in \Gamma_0(N) \right\}$$

$$\phi : \tau \mapsto - \int_{\tau}^{i\infty} 2\pi i g(\tau') d\tau' \pmod{\Lambda}$$

で定まる。 $z \in \mathbb{C}$ に対して、Weierstrass ζ -function を $\zeta(\Lambda, z)$ と書くことにする。よく知られているように、 $\zeta(\Lambda, z)$ は Λ 周期関数にはなっていない。しかし、適切な補正を行うことで、 Λ 周期的な関数が作れる。 $a(\Lambda)$ を Λ の基本平行四辺形の面積、 $S(\Lambda)$ を重さ 2 のアイゼンシュタイン数とする。つまり、

$$S(\Lambda) := \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^2 |\lambda|^{2s}}$$

である。これら二つの量を用いて関数 $R(z)$ を

$$R(z) := \zeta(\Lambda, z) - S(\Lambda)z - \frac{\pi}{a(\Lambda)} \bar{z}$$

で定義する。これは Λ 周期関数となる。周期性のおかげで、 $R(z)$ は \mathbb{C}/Λ 上の関数と解釈でき、modular parametrization ϕ との合成 $\mathcal{N} := R \circ \phi$ を考えることができる。ここで、 \mathcal{N} の q 展開 $\mathcal{N}(q)$ を $R(E_g(q))$ で定義する。すると、 $\mathcal{N}(q)$ は自然に

$$\mathcal{N}^+(q) := \zeta(\Lambda, E_g(q)) - S(\Lambda)E_g(q), \quad \mathcal{N}^-(q) := -\frac{\pi}{a(\Lambda)} \overline{E_g(q)}$$

の二つの和に分解される。ここで、 \mathcal{N} が good for g になっているのではないかと考えた方がいらっしゃるかもしれない。しかし、調和 Maass 形式は極をカスプにしか持たないが、 \mathcal{N} は上半平面上に極を持つ可能性がある。つまり、 $E_g(q) = 0$ となる τ が存在する可能性がある。しかし、 $\mathcal{N}(q)$ と good for g な $F(q)$ は級数として全くの無関係ではなく、次の結果が知られている。

Proposition 4.3 ([11, Proposition 2]). *modular parametrization ϕ の次数を C_g と置く。*

$$\mathcal{N}(q) - C_g F(q) = \mathcal{N}^+(q) - C_g F^+(q) \in \mathbb{Q}((q))$$

が成り立ち、ほとんど全ての素数 p に対して

$$\mathcal{N}^+(q) - C_g F^+(q) \in \mathbb{Z}_p((q))$$

が成り立つ。

著者はこの結果を改良し、以下を示した。

Theorem 4.4. 全ての N を割らない惰性する素数 p に対して、

$$\mathcal{N}(q) - C_g F(q) = \mathcal{N}^+(q) - C_g F^+(q) \in \mathbb{Z}_p((q)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

が成立する。

この定理によって、 $F^+(q)$ の p 進ホッジ分解を調べるという問題は、 $\mathcal{N}^+(q)$ つまり $\zeta(\Lambda, E_g(q))$ の p 進ホッジ分解を調べることに帰着できた。Weierstrass ζ -function の p 進ホッジ分解を調べるには楕円曲線 \mathbb{C}/Λ の形式群を用いるのが有効である。そのため、次のセクションでは形式群のクリスタリン・コホモロジーについて紹介する。

5. 形式群のクリスタリン・コホモロジー

本セクションでは、楕円曲線に付随する形式群のクリスタリン・コホモロジーについて触れる。本セクション執筆において、[2] [13] の論文を参考にした。 \mathcal{F} を 1 次元の \mathbb{Z}_p 上の形式群とし、その加法を \oplus で書くことにする。 \mathcal{F} から二つの空間 $\mathcal{Z}^1(\mathcal{F})$ 、 $\mathcal{B}^1(\mathcal{F})$ を、

$$\mathcal{Z}^1(\mathcal{F}) := \{\omega \in \widehat{\Omega}_{\mathbb{Z}_p[[X]]/\mathbb{Z}_p}^1 \mid F_\omega(X \oplus Y) - F_\omega(X) - F_\omega(Y) \in \mathbb{Z}_p[[X]]\}$$

$$\mathcal{B}^1(\mathcal{F}) := \{df \in \widehat{\Omega}_{\mathbb{Z}_p[[X]]/\mathbb{Z}_p}^1 \mid f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]\}$$

で定義する。ただし、 F_ω は ω の形式的な原始関数であり、 $\mathcal{Z}^1(\mathcal{F})$ の元を第二種微分という。この二つの空間を用いて、 \mathcal{F} のクリスタリン・コホモロジー $H_{\text{cris}}^1(\mathcal{F}/\mathbb{Z}_p)$ を

$$H_{\text{cris}}^1(\mathcal{F}/\mathbb{Z}_p) := \mathcal{Z}^1(\mathcal{F})/\mathcal{B}^1(\mathcal{F})$$

で定義する。これは \mathbb{Z}_p 上の加群になる。この加群の特筆すべき点はフロベニウス作用が存在していることである。実際、 φ を $\mathbb{Q}_p[[X]]$ の自己準同型で $f(X)$ を $f(X^p)$ に写すものとする。すると、 φ は $H_{\text{cris}}^1(\mathcal{F}/\mathbb{Z}_p)$ に $\varphi(\sum_i f_i dg_i) = \sum_i \varphi(f_i) d\varphi(g_i)$ で作用する。

Proposition 5.1 ([2, Proposition 2.3]). \mathcal{F} の高さを h とすると、 $H_{\text{cris}}^1(\mathcal{F}/\mathbb{Z}_p)$ はランク h の自由 \mathbb{Z}_p 加群になる。また、 ω を \mathcal{F} の不変微分で $\omega^* := p^{-1}\varphi(\widehat{\omega})$ としたとき、 $H_{\text{cris}}^1(\widehat{\mathcal{F}}/\mathbb{Z}_p)$ の基底として $\varphi^i \omega^* (0 \leq i \leq h-1)$ が取れる。

\mathbb{C}/Λ の Weierstrass モデルとして

$$(5.1) \quad E : y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$$

を取り固定する。これは5以上の素数 p に対して、 \mathbb{Z}_p 上のモデルとなっている。(cf. [8, Section 2.14].) 以下では、 $p \geq 5$ は K で惰性し、Weierstrass モデル (5.1) は p で良還元を持つとする。また、 \widehat{E} をパラメータ $t = -2x/y$ とする形式群とする。 \widehat{E} の形式 log を $\lambda(t)$ と記し、不変微分 $\widehat{\omega}(t)$ と微分形式 $\widehat{\eta}(t)$ を

$$\widehat{\omega}(t) := \frac{dx}{y}, \quad \widehat{\eta}(t) := x \frac{dx}{y}$$

で定義する。

Lemma 5.2 ([2, Lemma 3.4]). $\widehat{\eta}_0(t)$ を

$$\widehat{\eta}_0(t) := \widehat{\eta}(t) - \frac{dt}{t^2}$$

としたとき、 $\widehat{\eta}_0(t)$ は第二種微分である。

今、 p は K で惰性するので E は超特異還元を持つ、つまり \widehat{E} の高さは2である。その為、 \widehat{E} の基底として $\{\widehat{\omega}(t), \omega^*(t)\}$ が取れる。次に述べる定理は、 α_g の p 進付値を決定する上で極めて重要である。

Theorem 5.3 ([2, Corollary 3.8]). $\widehat{\eta}_0(t) \in H_{cris}^1(\widehat{E}/\mathbb{Z}_p)$ が

$$\widehat{\eta}_0(t) = A_1 \widehat{\omega}(t) + A_2 \omega^*(t) \text{ in } H_{cris}^1(\widehat{E}/\mathbb{Z}_p)$$

という表示で書けるとき、 $\omega^*(t)$ の係数 A_2 は p 進単数である。

6. 主定理の証明のスケッチ

本セクションでは、これまでに紹介した事実を用いて主定理の証明の簡単な概略を与える。本稿の主定理は以下である。

Theorem 6.1. $g \in S_2(\Gamma_0(N))$ を整数係数の *normalized newform* で虚二次体 K に虚数乗法を持つと仮定する。 $p \geq 5$ で *Weierstrass model* (5.1) は p で良還元を持つとする。このとき、 p が K で惰性するならば、 $C_g \alpha_g$ は p 進単数である。

形式的べき級数 $E_g(q)$ は本田タイプが X^2+p であり、 X^2+p はアイゼンシュタイン多項式である。このことからある \mathbb{Z}_p 上の形式群 \mathcal{G} でその形式 log が $E_g(q)$ になるものが存在する。特に、 \mathcal{G} の不変微分として $\omega_g(q) := \frac{d}{dq} E_g(q)$ が取れ、 $\omega_g^*(q) = \frac{d}{dq} E_g|_{V_p}(q)$ が成り立つ。ところで、 \widehat{E} の形式 log も本田タイプが X^2+p である。そのため、本田理論により形式群 \mathcal{F} と \mathcal{G} は同型であり、同型写像は $f(q) := \exp_{\widehat{E}} \circ \log_{\mathcal{G}}$ で与えられる。同型写像

$$f^* : H_{cris}^1(\widehat{E}/\mathbb{Z}_p) \rightarrow H_{cris}^1(\mathcal{G}/\mathbb{Z}_p)$$

は簡単な計算により、ある p 進単数 e を用いて

$$\begin{aligned} f^*(\widehat{\eta}_0(t)) &= \frac{d}{dq} \left(-\zeta(\Lambda, E_g(q)) + \frac{1}{f(q)} \right) \\ f^*(\widehat{\omega}(t)) &= \omega_g = \frac{d}{dq} E_g(q) \\ f^*(\widehat{\omega}^*(t)) &= e\omega_g^* = e \frac{d}{dq} E_{g|V_p}(q) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。よって、

$$\widehat{\eta}_0(t) = A_1 \widehat{\omega}(t) + A_2 \omega^*(t) \text{ in } H_{\text{cris}}^1(\widehat{E}/\mathbb{Z}_p)$$

に f^* を作用させることで、

$$\frac{d}{dq} \left(-\zeta(\Lambda, E_g(q)) + \frac{1}{f(q)} \right) = A_1 \frac{d}{dq} E_g(q) + e A_2 \frac{d}{dq} E_{g|V_p}(q)$$

が成り立つことがわかる。上式の両辺を形式積分して、 $f(q) \in \mathbb{Z}_p[[q]]^\times$ に注意すると、

$$(6.1) \quad \zeta(\Lambda, E_g(q)) + A_1 E_g(q) + e A_2 E_{g|V_p}(q) \in \mathbb{Z}_p((q)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

が得られる。これが求めたかった $\zeta(\Lambda, E_g(q))$ の p 進ホッジ分解である。定理 4.4 より、

$$C_g F^+(q) + (S(\Lambda) + A_1) E_g(q) + e A_2 E_{g|V_p}(q) \in \mathbb{Z}_p((q)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

が得られる。両辺を C_g で割ることにより、

$$F^+(q) + C_g^{-1} (S(\Lambda) + A_1) E_g(q) + C_g^{-1} e A_2 E_{g|V_p}(q) \in \mathbb{Z}_p((q)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

となる。 α_g は $F^+(q)$ の p 進ホッジ分解におけるフロベニウス部分の係数であったことを思い出せば、

$$C_g \alpha_g = e A_2$$

が成り立つ。 e も A_2 も p 進単数であったため、 $C_g \alpha_g$ も p 進単数になる。

Remark 6.2. 著者が本稿に関するプレプリント ([14]) を arXiv にアップロードした後、Pavel Guerzhoy 氏から同様の結果を同様の手法を用いて示したと連絡をいただいた。(cf. [10]) 彼のプレプリント ([10]) では、一般の normalized newform $g \in S_2(\Gamma_0(N), \mathbb{Q})$ とほとんど全ての素数 p に対して $\mu_p \neq 0$ in (4.1) が示された。(著者の結果では、虚数乗法の仮定はあるものの定理の成り立つ p の条件を明記している。) 今回の結果に興味を持たれた方は、著者のプレプリントと合わせて参照していただきたい。

7. 謝辞

まず初めに、集会における講演の機会並びに本稿執筆の機会を与您にいただいた世話人の並川 健一氏 (東京電機大学)、軍司 圭一氏 (千葉工業大学) の二人に感謝申し上げます。また、本稿の主結果について小林 真一氏 (九州大学) から多くの助言をいただき、頻繁に議論を行いました。この場を借りて再度お礼を申し上げます。また、野本 慶一郎氏 (株式会社光電製作所) には本稿の主役である p 進数 α_g に関する数値実験を手伝っていただきました。この場で改めてお礼を申し上げます。また、本研究は JSPS 科研費 JP23KJ1720 の助成を受けたものです。そして著者であ

る田島 凌太は九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラムの支援を受けています。

References

- [1] Claudia Alfes, Michael Griffin, Ken Ono, and Larry Rolen. Weierstrass mock modular forms and elliptic curves. *Research in Number Theory*, 1:1–31, 2015.
- [2] Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, and Seidai Yasuda. The radius of convergence of the p -adic sigma function. *Mathematische Zeitschrift*, 286(1-2):751–781, 2017.
- [3] Kathrin Bringmann, Amanda Folsom, Ken Ono, and Larry Rolen. *Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications*, volume 64. American Mathematical Soc., Providence, 2017.
- [4] Kathrin Bringmann, Pavel Guerzhoy, and Ben Kane. Mock modular forms as p -adic modular forms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(5):2393–2410, 2012.
- [5] Jan H Bruinier and Jens Funke. On two geometric theta lifts. *Duke Mathematical Journal*, 125:45–90, 01 2004.
- [6] Jan H Bruinier, Ken Ono, and Robert C Rhoades. Differential operators for harmonic weak Maass forms and the vanishing of Hecke eigenvalues. *Mathematische Annalen*, 342(3):673–693, 2008.
- [7] Luca Candelori and Francesc Castella. A geometric perspective on p -adic properties of mock modular forms. *Research in the Mathematical Sciences*, 4:1–15, 2017.
- [8] John E Cremona. *Algorithms for Modular Elliptic Curves Full Canadian Binding*. CUP Archive, Cambridge, 1997.
- [9] Stephan Ehlen, Yingkun Li, and Markus Schwagenscheidt. Harmonic Maass forms associated with CM newforms. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2024(813):133–158, 2024.
- [10] Pavel Guerzhoy. Cusp forms as p -adic limits circumventing p -adic version of the Legendre period relation. arXiv:2506.07107v1 [math.NT]. <https://arxiv.org/abs/2506.07107>, 2025.
- [11] Pavel Guerzhoy. On Zagier’s adele. *Research in the Mathematical Sciences*, 1:1–19, 2014.
- [12] Pavel Guerzhoy, Zachary A Kent, and Ken Ono. p -adic coupling of mock modular forms and shadows. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(14):6169–6174, 2010.
- [13] Shinichi Kobayashi. Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes. *Inventiones mathematicae*, 152(1):1–36, 2003.
- [14] Ryota Tajima. The p -adic constant for mock modular forms associated to CM forms II. arXiv:2412.12811v1 [math.NT]. <https://arxiv.org/abs/2412.12811>, 2024.
- [15] Ryota Tajima. The p -adic constant for mock modular forms associated to CM forms. *The Ramanujan Journal*, pages 1–13, 2023.
- [16] Sander Zwegers. Mock theta functions. arXiv:0807.4834v1 [math.NT]. <https://arxiv.org/abs/0807.4834>, 2008.

JOINT GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS FOR INNOVATION, KYUSHU UNIVERSITY, 744
MOTOOKA, NISHI-KU, FUKUOKA, 819-0395, JAPAN
Email address: ryota.tajima.123@gmail.com