On the calculation of the ramified Siegel series

京都大学・数理解析研究所　渡邉 真広
Masahiro Watanabe
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

0　謝辞

本 PDF は、筆者が京都大学数理解析所における共同研究 (公開型)「保型形式・保型表現の数論的側面」にて 2025 年 1 月 24 日に発表した内容の概説です。本講演の機会を設けて頂いた代表者の方々である東京電機大学の並川健一准教授、及び千葉工業大学の軍司圭一教授をはじめ多くの方々のおかげで講演できましたこと、深く感謝するとともに改めてありがたく御礼申し上げます。

本講演では筆者の博士論文発表後の研究の進捗を発表しました。それらはプレプリントとして発表予定です。

1　研究の動機

整数論、特に保型形式の分野においてよく知られている Eisenstein 級数という関数がある。具体的には、τ を複素上半平面の元、k は 2 以上の整数、に対し

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$

の形で表される級数である。

Eisenstein 級数には次のような Fourier 展開が知られている。

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k)\left(1+\frac{(2\pi\sqrt{-1})^{2k}}{(2k-1)!\zeta(2k)}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n\right)$$

ここで $\sigma_{2k-1}(n)$ は約数関数、$q=\exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ である。Fourier 展開とは今の場合 q に関する冪級数で書き表すことになるが、そのときの係数に約数関数という初等整数論において重要な関数が出現していることに注意をされたい。

次に似たような関数で Siegel Eisenstein 級数という関数を定める。これは Eisenstein 級数のある種の行列変数での一般化と位置付けることができる。

$n\geq 2$ は整数、$G=\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ に対して

$$E^n_{k,l,\psi}(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma_0(l)} \psi(\det D)\frac{1}{\det(CZ+D)^{2k}}$$

と定める。ここで ψ は mod l での Dirichlet 指標であり、$Z \in \mathbb{H}^n$(Siegel 上半平面)、そして Γ_∞ や $\Gamma_0(l)$ は

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; C = 0 \right\}$$
$$\Gamma_0(l) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; C \equiv 0 \mod l \right\}$$

として定められる G の部分群である。このとき Siegel Eisenstein 級数 にも同様に Fourier 展開が計算できその結果は

$$E^n_{k,l,\psi}(Z) = \sum_{N \in S_h^+} C(N) \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(NZ))$$

の形に表せる。ここで S_h^+ は半整数半正定値対称行列の集合であり、特に N が正定値のとき係数 $C(N)$ は

$$C(N) = \frac{2^{-\frac{n(n-1)}{2}}(-2\pi\sqrt{-1})^{nk}}{\pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(k-\frac{1}{2})} (\det N)^{k-\frac{n+1}{2}} \prod_p S_n^p(\psi, N, k)$$

と各素数 p に関する積の形に分解できる。p が l の素因数であるとき $S_n^p(\psi, N, k)$ は分岐 Siegel 級数と呼ばれる。

さらに分岐 Siegel 級数の計算は次のような積分計算に帰着されることが知られている。

$$S_0(B,s)^\chi = \int_{\mathrm{Sym}_n(F)} f_0\left(w_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \psi(-\mathrm{tr}(BX)) dX$$

ここで $w_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は Weyl 群の最長元、関数 f_0 は誘導表現の空間 $I_n(\omega, s-\frac{n+1}{2})^{\Gamma,\omega}$ の元と取るが、これについては次節で定義をする。

1.1 記号の定義 (1)

体 F は非アルキメデス奇標数局所体とし、$G = \mathrm{Sp}_n(F)$ は F 上次数 n のシンプレクティック群とする。$\mathfrak{o}$ や $\mathfrak{p}$ で F の整数環、$\mathfrak{o}$ の極大イデアルをそれぞれ表す。π は固定された素元 ($\mathfrak{p} = \pi\mathfrak{o}$ となる元) とし、q は剰余体 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ の位数とする。

$K = \mathrm{Sp}_n(\mathfrak{o})$ とし、P や Γ は

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; C = 0 \right\}$$
$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K \;\middle|\; C \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \right\}$$

で定められる群とする。ここで Weyl 群の元 $\{w_i\}_{0 \le i \le n}$ を

$$w_i = \left(\begin{array}{cc|cc} 1_{n-i} & & & \\ & & & -1_i \\ \hline & & 1_{n-i} & \\ & 1_i & & \end{array} \right)$$

で定める。これは両側剰余類 $P\backslash G/\Gamma$ の代表元になっていることに注意する。

ψ は F の order 0 の加法指標、ω は $\omega^2=1$ を満たす $F^\times$ 上の指標とする。さらに ω として考えうる指標のうち非自明な分岐指標を 1 つ固定しそれを χ と書く。誘導表現の空間 $I_n(\omega,s)=\mathrm{Ind}_P^G(\omega\circ|\det|^s)$ は以下を満たす G 上の C^∞ 関数の集合として定められる。

$$f\left(\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & {}^tA^{-1}\end{pmatrix} g\right)=\omega(\det A)|\det A|^{s+\frac{n+1}{2}}f(g).$$

さらにこの空間の部分空間として

$$I_n\left(\omega, s-\frac{n+1}{2}\right)^{\Gamma,\omega}=\left\{f\in I_n\left(\chi, s-\frac{n+1}{2}\right)\,\middle|\, f(gk)=\omega(k)f(g)\ ({}^\forall k\in\Gamma)\right\}$$

を定める。ここで関数 $\{f_i\}_{0\le i\le n}$ を等式 $f_i(\omega_j)=\delta_{ij}$ を満たす $I_n\left(\omega,s-\frac{n+1}{2}\right)^{\Gamma,\omega}$ の元と取るとき、この空間はこれら $\{f_i\}_{0\le i\le n}$ で生成されることがわかる。

1.2　退化 Whittaker 関数

ここで [13] による退化 Whittaker 関数の定義を紹介する。

G は非アルキメデス局所体 F 上の簡約代数群とする。P は G の放物部分群で対応する Levi 部分群を M、P' は別の放物部分群で対応する Levi 部分群を M'、unipotent 部分群を N' とする。π は G 上の許容表現、ψ は N' の 1 次元指標とする。

Definition 1.1. 退化 Whittaker 汎関数の空間 $\mathrm{Wh}_\psi(\pi)$ は $\mathrm{Hom}_{N'}(\pi,\psi)$; 表現準同型の空間として定める。

Φ は退化 Whittaker 汎関数の元、$V_\pi=\mathrm{Ind}_P^G\tau$ は誘導表現の空間 (ただし τ は M 上の指標) とする。$v_0\in V_\pi$ に対し次で退化 Whittaker 関数を定める。

Definition 1.2. 退化 Whittaker 関数とは $W_{v_0}(g)=\Phi(\pi(g)v_0)$ $(g\in G)$ の形のものである。

以下 (分岐) Siegel 級数を

$$S_t(B,s)^\chi=\int_{\mathrm{Sym}_n(F)} f_t\left(w_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi(-\mathrm{tr}(BX))dX$$

(ただし ψ は F の加法指標、 $B\in\mathrm{Sym}_n(F)$、$f_t\in I_n\left(\chi,s-\frac{n+1}{2}\right)^{\Gamma,\chi}$) と定めるとき、積分の形から退化 Whittaker 関数

$$W_{v_0}(g)=\Phi(\pi(g)v_0)$$

の形と対応がつくことがわかり、これにより分岐 Siegel 級数の計算並びに性質を代数群の表現の観点から眺めることが本研究の動機である。

2　主結果

本講演では大きく 2 つの話題について、結果や予想を紹介した。1 つめは分岐 Siegel 級数の差分の式の証明であり、2 つめは Intertwiner の行列表示についてのある予想である。それぞれに分けて主張を述べていく。

2.1 分岐 Siegel 級数の差分の式

差分の式を語る前に、まずは分岐 Siegel 級数の explicit な式について述べておく。式中には未定義記号が多々あるが、紹介後に定義をする。

Theorem 2.1. 分岐 Siegel 級数 $S_t(B,s)^\chi$ $(0 \le t \le n)$ は以下のように計算できる。

$$S_t(B,s)^\chi = \alpha_\psi(\pi)^{n-t} \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n \\ \sigma^2=1}} (1-q^{-1})^{c_2(\sigma)} q^{-c_2(\sigma)} \sum_{\substack{I=I_0\cup\cdots\cup I_r \\ n^{(k)}=t}} q^{-\tau(\{I_i\})-t(\sigma,\{I_i\})} \frac{(1-q^{-1})^{\sum_{l=k}^r c_1^{(l)}(\sigma)} q^{n(k)}}{\prod_{l=k}^r (q^{n(l)}-1)}$$

$$\times \sum_{\{\nu\}_k^t} \prod_{l=0}^{k-1} \chi(\pi)^{\nu_l(n^{(l)}-n^{(k)})} q^{\nu_l((sn^{(l)}-n(l))-(sn^{(k)}-n(k)))+\tilde{\rho}_{l,\nu_0+\cdots+\nu_l}(\sigma;B)} \prod_{\substack{i\in I_l \\ \sigma(i)=i}} \xi_{i,\nu_0+\cdots+\nu_l}(B)_\chi$$

ここで $\{\nu\}_k^t$ $(k \ge 1)$ に関する和は以下の集合の元をわたり足すものとする。

$$\left\{(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{k-1}) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{>0}^{k-1} \;\middle|\; -b_l(\sigma,B) \le \nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_l \le -1 \ (0\le l\le k-1),\ n^{(k)}=t\right\}$$

特に $t=0$ のときは少し簡単な形で書くことができる。$t=0$ のときの結果に関しては、私と同時期に軍司圭一により発表されている [6]。(彼は局所的に積分計算をした私とは異なり大域的な手法を用いている。彼は彼の論法で一般の t の場合でも計算できると伺った。私の場合は一般の局所体に拡張している)

これらに対して、次の等式が成り立つというのが我々の差分の式である。

Theorem 2.2. 行列 B は $B=\mathrm{diag}(\alpha_1\pi^{e_1},\cdots,\alpha_n\pi^{e_n})$ のように書ける対角行列であるとする。(ただし $\alpha_i \in \mathfrak{o}^\times$ であり $0 \le e_1 \le \cdots \le e_n$)

ここで行列 B' を $B'=\mathrm{diag}(\alpha_1\pi^{e_1},\cdots,\alpha_{n-1}\pi^{e_{n-1}},\alpha_n\pi^{e_n+2})$ という式で定めるとき分岐 Siegel 級数 $S_t(B,s)^\chi$ に対して次の等式が成立する。

$$S_t(B',s)^\chi - S_t(B,s)^\chi = c(B,s)S_t(B^{(n-1)},s)^\chi$$

ここで $B^{(n-1)}$ は対角行列 B の右下端成分だけを除いた $n-1$ 次対角行列、すなわち

$$B^{(n-1)} = \mathrm{diag}(\alpha_1\pi^{e_1},\cdots,\alpha_{n-1}\pi^{e_{n-1}})$$

のように定められるものであり、係数 $c(B,s)$ は t に依存していない。ただし B のべき e_i の偶奇性などから 4 通りに場合分けをして述べるべきである。例えば n が偶数で $\sum_{k=1}^n e_k$ が偶数の場合

$$c(B,s) = \alpha_\psi(\pi)\chi(\pi)^{e_n+1} \prod_{k\in B^e} \alpha_k \cdot \chi(-1)^{\frac{\#B^e+1}{2}} (1-q^{-2s+n}) q^{-\frac{e_n+1}{2}(2s-n)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n e_k+\frac{1}{2}}$$

このように表示される。なおここで集合 B^e は $B^e := \{k \mid 1\le k\le n-1,\ e_n \equiv e_k \bmod 2\}$ と定められるものとする。

2.2 記号の定義 (2)

ここで改めて (主定理の主張にも) 必要な記号の定義を述べる。

$I=\{1,2,\cdots,n\}$ であり n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は I に自然に作用するものとする。以下対称群の元 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ は $\sigma^2=1$ を満たす置換のみを考える。$I=I_0\cup\cdots\cup I_r$ は I の σ 不変な分割とする。これら置換と分割によって定まる $c_1^{(k)}(\sigma)$, $c_2(\sigma)$, n_k, $n^{(k)}$, $n(k)$ は

$$\begin{aligned} c_1^{(k)}(\sigma)&=\#\{i\in I_k\mid\sigma(i)=i\}\\ c_2(\sigma)&=\frac{1}{2}\#\{i\in I\mid\sigma(i)\neq i\}\\ n_k=\#I_k,\quad n^{(k)}&=\sum_{l=k}^{r}n_l,\quad n(k)=\frac{n^{(k)}(n^{(k)}+1)}{2}\end{aligned}$$

として計算される値である。また $\tau(\{I_i\})$, $t(\sigma,\{I_i\})$, $e_{\sigma,i,k}$ は

$$\begin{aligned}\tau(\{I_i\})&=\sum_{l=1}^{r}\#\{(i,j)\in I_l\times(I_0\cup\cdots\cup I_{l-1})\mid j<i\}\\ t(\sigma,\{I_i\})&=\sum_{l=0}^{r}\#\{(i,j)\in I_l\times I_l\mid i<j<\sigma(i),\,\sigma(j)<\sigma(i)\}\\ e_{\sigma,i,k}&=\begin{cases}0 & (k\le i,\,k\le\sigma(i))\\ 1 & (\sigma(i)<k\le i\ \text{ or }\ i<k\le\sigma(i))\\ 2 & (i<k,\,\sigma(i)<k).\end{cases}\end{aligned}$$

としてこれらも置換や分割から与えられる値である。

以下行列 B は適切に Jordan 対角化を行い

$$B=\mathrm{diag}(v_1\pi^{\beta_1},v_2\pi^{\beta_2},\cdots,v_n\pi^{\beta_n})$$

のように成分の文字を設定する。ただし $v_i\in\mathfrak{o}^\times$, $\beta_i\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ である。置換と分割及びこれら行列の成分の値から決まる以下の 4 つの値を定める。

$$\begin{aligned} b_l(\sigma,B)&=\min[\{\beta_i\mid i\in I_l,\sigma(i)>i\}\cup\{\beta_i+1\mid i\in I_l,\sigma(i)\le i\}]\\ B_i(\lambda)&=\{k\mid 1\le k\le i-1,\ \beta_k+\lambda<0,\ \beta_k\not\equiv\lambda \bmod 2\}\\ &\quad\cup\ \{k\mid i+1\le k\le n,\ \beta_k+\lambda+2<0,\ \beta_k\not\equiv\lambda\bmod 2\}\\ \tilde{\rho}_{l,\lambda}(\sigma;B)&=\frac{1}{2}\sum_{i\in I_l}\sum_{k=1}^{n}\min\{\beta_k+e_{\sigma,i,k}+\lambda,\,0\}\\ \xi_{i,\lambda}(B)_\chi&=\prod_{k\in B_i(\lambda)}\chi(v_k)\times\begin{cases}0 & \beta_i+\lambda\ge0,\ \#B_i(\lambda):\text{even}\\ (1-q^{-1})\chi(-1)^{[\#B_i(\lambda)/2]+1} & \beta_i+\lambda\ge0,\ \#B_i(\lambda):\text{odd}\\ \chi(v_i)\chi(-1)^{[\#B_i(\lambda)/2]+1} & \beta_i+\lambda=-1,\ \#B_i(\lambda):\text{even}\\ -q^{-1/2}\chi(-1)^{[\#B_i(\lambda)/2]+1} & \beta_i+\lambda=-1,\ \#B_i(\lambda):\text{odd}\end{cases}\end{aligned}$$

さらに [9] などにより知られている Weil constant と呼ばれる値を定義する。各 Schwartz 関数 $\phi\in\mathcal{S}(F)$ に対しそのフーリエ変換 $\hat{\phi}$ を

$$\hat{\phi}(x)=\int_F\phi(y)\psi(xy)dy$$

で定める。ただし Haar 測度 dy は $\displaystyle\int_{\mathfrak{o}}dy=1$ で定められるものとする。

Definition 2.1. ψ は F 上の加法指標、$a \in F^{\times}$ に対し Weil constant $\alpha_{\psi}(a)$ は以下を満たす複素数とする。

$$\int_{F} \phi(x)\psi(ax^2)dx = \alpha_{\psi}(a)|2a|^{-\frac{1}{2}} \int_{F} \hat{\phi}(x)\psi\left(-\frac{x^2}{4a}\right)dx \quad (\phi \in \mathcal{S}(F))$$

2.3 主定理の証明

ここからは、この定理の導出方法の概略を述べる。一言で言うならば、分岐 Siegel 級数 $S_t(B,s)^{\chi}$ の一般の式に行列 B と B' を代入して引いたら導出可能。それだけである。

もう少し具体的にどこが重要な点であるかを言うと、

$$I_0 = \{n\}$$

これを満たす分割であるかどうかが分かれ目になってくる。$I_0 = \{n\}$ である場合 (なおこの時 $\sigma(n) = n$ も要請)、$\sigma' = \sigma|_{[n-1]}$ かつ $I'_k = I_{k+1}$ などと置換 σ や分割 $\{I_k\}$ を取り直すと次数が $n-1$ の場合の分岐 Siegel 級数の定数倍の形に差分が帰着されることがわかる。

一方 $I_0 \neq \{n\}$ である場合は、その項に関する差分は消えてしまう。

以上のような考察と単純だが手間の多めな計算によって、差分の式を得ることができる。なお Siegel 級数における Gauss 和の項 $\xi_{i,\lambda}(B)_{\chi}$ の場合分けに依存して、さらに複雑な場合分けが必要であることを留意しなければならない。

2.4 この定理が重要な理由

この定理が重要な理由は、桂田が発見した不分岐指標に関する Siegel 級数の帰納的公式との対応がある。

桂田は、不分岐 Siegel 級数を局所密度と対応させ、局所密度の差分の式を計算することで Siegel 級数側の差分の式を導出した。さらにそれと関数等式とを連立させることで、Siegel 級数の帰納的公式の構成に成功している。具体的には

$$S(B',s)^1 - q^{-2s+n+1}S(B,s)^1 = (1-q^{-s})(1-q^{1-s})S(B^{(n-1)},s)^1$$

と言った、不分岐 Siegel 級数 $S(B',s)^1$ に関する差分公式を導きそれが帰納的公式の基礎になっている。

これと同様の差分公式を (分岐 Siegel 級数はまだ局所密度との対応がわかっていなかったので) 書き下す必要があった。それは軍司が分岐 Siegel 級数の帰納的公式を導出するにあたってもかなり重要な定理であると主張している。

3 q-Krawtchouk 行列と q-Krawtchouk 多項式

まず直交多項式について簡単な復習をする。1 変数多項式のベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ の上の正定値な内積 $\langle *, * \rangle$ をとる。この内積に関して直交する $\mathbb{R}[x]$ の基底を考える。すなわち $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ は $\mathbb{R}[x]$ の部分集合であって、次の 2 つの条件を満たすとする：

$$\deg P_n(x) = n \quad ({}^{\forall} n \geq 0), \quad \langle P_i(x), P_j(x) \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

このとき $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ はこの内積 $\langle *, * \rangle$ に関する直交多項式であると言う。

非常によく知られた具体例を述べる。

$$\langle f(x), g(x)\rangle_1 := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\pm\frac{1}{2}}dx$$
$$\langle f(x), g(x)\rangle_2 := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

上の2つの内積に関して得られる直交多項式はそれぞれ、Chebyshev 多項式や Hermite 多項式としてよく知られている。

以上2つの例とは異なり、内積が離散測度から得られるものである場合は、この直交多項式は離散直交多項式であると言う。

例えば離散直交多項式の例として、Krawtchouk 多項式と呼ばれるものがある。これは二項分布に関して直交する離散直交多項式であり、次のように定める。

N は自然数、$X = \{0, 1, \cdots, N\}$ とする。二項分布は

$$\mu(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \quad (x \in X)$$

のように定めておき、多項式 f, g に関する内積は $\langle f, g\rangle_\mu := \sum_{x=0}^{N} f(x)g(x)\mu(x)$ とする。この内積 $\langle f, g\rangle_\mu$ に関する直交多項式が Krawtchouk 多項式である。

実は Krawtchouk 多項式に関し次のような性質が知られている。定数項を $\binom{N}{n}$ に正規化した Krawtchouk 多項式を $K_n(x; N, p)$ と書くことにすると

$$K_n(x; N, p) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{N-x}{n-r}\binom{x}{r} p^r (1-p)^{N-r}$$

という式で表示することが可能である。さらにこの式は、${}_2F_1$ 型の超幾何級数としても表示することが可能である。すなわち

$$K_n(x; N, p) = (-1)^n \binom{N}{n} p^n \sum_{k\geq 0} \frac{(-n)_k(-x)_k}{k!(-N)_k}\left(\frac{1}{p}\right)^k$$

である。ここで $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ は上昇階乗であり、また今の等式に出てくる変数 k に関する和は高々有限項のみで非零の値を取ることに注意をする。(この性質を持つ超幾何級数は"terminating" であると言う)

さらに Krawtchouk 多項式に関して、関連する Krawtchouk 行列についても述べておく。N 次の Krawtchouk 行列 $K = K^{(N)}$ とは、次のようにして与えられる $N+1$ 次正方行列である：

$$(K^{(N)})_{i,j} = (-2)^i K_i(j; N, 1/2)$$

例えば $N = 2, 3$ に関する Krawtchouk 行列は次のように計算される。

$$K^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Krawtchouk 行列に関してはいくつかの性質が知られている。例えば

- 全ての N と全ての $0 \leq i, j \leq N$ に対し $(K^{(N)})_{i,j} \in \mathbb{Z}$
- $K^2 = 2^N I_{N+1}$ (ここで I_{N+1} は $N+1$ 次単位行列)

などが知られている。

さて、いよいよ本丸の q-Krawtchouk 多項式について定義していきたい。その前に q-二項係数の定義を述べる。

Definition 3.1. q-二項係数 $\binom{n}{k}_q$ は次のように定義されるものである。

$$\binom{n}{k}_q := \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)} = \frac{(q^n;q^{-1})_k}{(q;q)_k}$$

ここで $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ は q-Pochhammer 記号である。

このように定められた q-二項係数は変数 q について見ると $\mathbb{Z}$ 係数の多項式である。また特に次のような通常の二項係数に類似する性質も持つ。

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1}\binom{n}{k}_q &= \binom{n}{k} \\
\binom{n}{k}_q &= \binom{n}{n-k}_q \\
\binom{n}{k}_q &= q^k\binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q
\end{aligned}$$

さてこの q-Pochhammer 記号を用いることで、q-Krawtchouk 多項式が定義可能である。すなわち次のように定義される多項式である。

$$K_n(q^{-x};a,N;q) = \sum_{l\geq 0} q^l \frac{(q^{-n},q^{-x},-a^{-1}q^{n-N};q)_l}{(q,q^{-N};q)_l}$$

ここで $(a_1,\cdots,a_k;q)_n := (a_1;q)_n\cdots(a_k;q)_n$ は q-Pochhammer 記号の積の簡略化である。なお q-Krawtchouk 多項式の定義は文献によって変数の扱いがずれており、注意が必要である。また通常の Krawtchouk 多項式同様に、この変数 l に関する和もまた有限和である。

Theorem 3.1. q-Krawtchouk 多項式は q-二項分布に関する直交多項式である。すなわち次の直交性の式を満たしている。

$$\sum_{d=0}^{N} a^d q^{\frac{d(d-1)}{2}}\binom{N}{d}_q K_m(q^{-d};a,N;q)K_n(q^{-d};a,N;q) = \delta_{mn}\binom{N}{m}_q^{-1}\frac{(-aq^{-m};q)_{N+1}}{aq^{N-m}+q^m}a^{-m}q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

このことから、成分に q-Krawtchouk 多項式を並べた行列についてその逆行列を計算することができる。

4 Intertwinerの表示について

次に2つ目の Intertwining operator に関する結果 (予想) を述べるために、幾つか文字を定義する。

Intertwining operator $M_{w_n}^{(s)} : I_n(\chi, s) \to I_n(\chi, n+1-s)$ を

$$M_{w_n}^{(s)}(f) := \int_{X \in \mathrm{Sym}_n(F)} f\left(w_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dX$$

で定める。また $E_n^{(s),\chi} = ((E_n^{(s),\chi})_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ で線形写像 $M_{w_n}^{(s)}$ の基底 $\{f_0, f_1, \cdots, f_n\}$ に関する表現行列を表すものとする。すなわち

$$M_{w_n}^{(s)} \left[f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, \cdots, f_n^{(s)}\right] = \left[f_0^{(n+1-s)}, f_1^{(n+1-s)}, \cdots, f_n^{(n+1-s)}\right]((E_n^{(s),\chi})_{ij})$$

このように定めた Intertwiner の表現行列について、当初筆者は rank が 1 の Intertwiner の積に書き下すことによって計算機の上では $n \le 8$ について計算することができていた。しかし、n が大きくなるほどその成分は複雑な値になり、一般項はどのような値になるか不明であった。

4.1 軍司の結果

軍司は、$U(p)$ の作用が分岐 Siegel 級数の空間の関数等式を簡潔に書き下すことを発見し、分岐 Siegel 級数についての帰納的な公式を得た。[7] その結果を用いると、この Intertwiner の表現行列 $E_n^{(s),\chi}$ についても計算することができる。

まず $U(p)$ 作用素の表現行列に関する行列 $B_\chi(s) = (b_\chi(s)_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ は以下で定まる。

$$b_\chi(s)_{ij} = \beta_0^{j-i} \frac{(q^{-i-1}, q^{-i-2}; q^{-2})_{(j-i)/2}}{(q^{2s-2i-3}, q^{-2}; q^{-2})_{(j-i)/2}}$$

ここで $j-i$ は非負の偶数である (それ以外の場合は $b_\chi(s)_{ij} = 0$ となる)。さらに彼はある定数 $\gamma_\nu(\chi, s)$ を

$$\gamma_\nu(\chi, s) = \beta_0^\nu \prod_{i=1}^{[\nu/2]} \frac{1 - q^{2i-4s}}{1 - q^{2\nu+1-2i-4s}}$$

のように定めた。このとき彼の結果によると、ある正規化の下での Siegel-Eisenstein 級数の関数等式の係数が

$$B_\chi\left(\frac{n+1}{2} - s\right)^{-1} T_\chi(s) B_\chi(s)$$

となっている。ここで $T_\chi(s) = \mathrm{antidiag}(\gamma_\nu(\chi, s))$ である。

我々の言葉で書き直すと、次のように書き下すことができる。

Theorem 4.1. 軍司の結果を用いると、Intertwiner の表現行列 $E_n^{(s),\chi}$ について次のように表示することができる。

$$E_n^{(s),\chi} = {}^tB_\chi\left(-s + \frac{n+1}{2}\right)\left\{\frac{(G_n(-s))_{00}}{(G_n(s))_{nn}} G_n(-s)^{-1} \mathbf{1}_{n+1}^{\mathrm{anti}} G_n(s)\right\} {}^tB_\chi\left(s + \frac{n+1}{2}\right)^{-1}$$

ここで行列 $G_n(s)$ は $G_n(s) = T_\chi(s + \frac{n+1}{2})$ である。

4.2 私の結果・予想

一方で、私はIntertwinerがまた別のsectionに対して対角化可能であるという予想を($n \leq 8$の実験も含めて)立てていた。それは次の事実により正当化される：q-Krawtchouk多項式はtype BのHecke代数の帯球関数になる(Stanton('80), Koelink('96) etc.)

行列Kを$K = \{\beta_0^i K_j(q^{-i}; 1, n; q)\}_{0 \leq i,j \leq n}$で定める。(これは$q$-Krawtchouk行列とも呼べるものである) このとき、q-Krawtchouk多項式の直交性から次のように逆行列が計算可能である。

$$K^{-1} = \left\{ \beta_0^{-j} q^{\frac{-i(i+1)}{2} + \frac{j(j-1)}{2}} \binom{n}{i}_q \binom{n}{j}_q \frac{pq^{n-i} + q^i}{(-q^{-i}; q)_{n+1}} K_i(q^{-j}; p, n; q) \right\}_{0 \leq i,j \leq n}$$

すなわち各帯球関数に対してそれぞれの固有値を並べた行列をVとおくと、$E_n^{(s),\chi} = KVK^{-1}$の形で書き表すことができる。ここで$V$の行列の成分が、予想としては立っているのだが、現状示せてはいない。我々は

$$V_{ii} = (-1)^i \beta_0^n q^{-ni+i^2} \frac{(q^{-2s-1}; q^{-2})_{[\frac{n}{2}]} (q^{-2s+n-1}; q^{-2})_i}{(q^{-2s}; q^2)_{[\frac{n}{2}]} (q^{-2s-n+1}; q^2)_i}$$

ではないかと考えている。いずれにせよ、軍司の結果を用いた$E_n^{(s),\chi}$の式と我々のKVK^{-1}の形の式が一致すること自体がかなり非自明な等式となっている。

5 結論

今回得られた結論はおよそ次の3つである。

- 分岐Siegel級数の差分の式が示された。それは以下のような形をしていた。

  $$S_t(B', s)^\chi - S_t(B, s)^\chi = c(B, s) S_t(B^{(n-1)}, s)^\chi$$

  そして(軍司によると)この差分の式は分岐Siegel級数の帰納的公式において不可欠なものである。

- Intertwinerはq-Krawtchouk行列によって対角化可能である
- (仮にVの行列の成分が正しいとすると)軍司の結論と合わせることによって、q-Krawtchouk多項式についてのある種の公式を得ることができる

今後Vの行列の成分が正しいことを証明すること、それらの表現論的な意味の探求、さらにはさらなる代数群の表現論と組み合わせ論との対応を見ること、といった展望がある。

References

[1] W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, preprint (1995).

[2] W. Casselman, The unramified principal series of p-adic groups. I. The spherical function, Compositio Mathematica, tome 40, no 3 (1980), 387-406.

[3] W. Casselman, J. Shalika, The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function, Compositio Mathematica, tome 41, no 2 (1980), 207-231. Academic Press, London-New York-San Francisco, 1978.

[4] R. Godement, H. Jacquet, Zeta Functions of Simple Algebras, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260, Springer-Verlag, Berlin-New York (1972).

[5] K. Gunji, On the computation of ramified Siegel series of degree 3, RIMS Kokyuroku, No. 2100 (2019), 165-178.

[6] K. Gunji, On the Fourier coefficients of the Siegel Eisenstein series of odd level and the genus theta series, J. Number Theory 240 (2022), 124-144.

[7] K. Gunji, On the functional equations of Siegel Eisenstein series of an odd prime level p, preprint (2023).

[8] Y. Hironaka, F. Sato, Local densities of representations of quadratic forms over p-adic integers (the non-dyadic case), J. Number Theory 83 (2000), 106-136.

[9] T. Ikeda, On the functional equation of the Siegel series, Journal of Number Theory 172 (2017), 44-62.

[10] T. Ikeda, H. Katsurada, An explicit formula for the Siegel series of a quadratic form over a non-archimedean local field, Journal für die reine und angewandte Mathematik 783 (2022), 1-47.

[11] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. 121 (1999), 415-452.

[12] Y. Mizuno, An explicit arithmetic formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree two and square-free odd levels, Math. Z. 263 (2009), no. 4, 837-860.

[13] C. Mœglin et J.L. Waldspurger, Modèles de Whittaker dégénérés pour des groupes p-adiques, Math. Z. 196 (1987), 427-452.

[14] G. Shimura, Euler products and Eisenstein series, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 93 (1997), AMS.

[15] W. Jay Sweet Jr, A Computation of the Gamma Matrix of a Family of p-adic Zeta Integrals, Journal of Number Theory, 55 (1995), 222-260.