

# 差分微分方程式における遷移層の構成と自己誘導関数の応用

明治大学総合数理学部\* 池田 幸太

Kota Ikeda

School of Interdisciplinary Mathematical Sciences

Meiji University

京都大学大学院理学研究科† 宮路 智行

Tomoyuki Miyaji

Department of Mathematics

Kyoto University

## 1 導入

差分微分方程式の形式で記述されるモデル方程式は多く、時間遅れ微分方程式はその典型である。時間遅れを伴う自然現象は数多く知られており、交通流 [7] や神経科学 [4] の他に、新型コロナウイルスの伝播 [6]、景気循環や経済成長における投資遅延の効果 [3] が挙げられる。その他、空間 1 次元における偏微分方程式に対して空間微分を離散化することでも、差分微分方程式は自然に現れる。これらの現象に対する数理モデルには、時間周期的な挙動を持つ解や、状態変化と対応する遷移層を含む解が現れるものもあるが、一般にこのような解を厳密な解析により構成することは難しい。

時間周期解や遷移層を表す解の構成において、力学系理論がこれまで有効に機能してきた。例えば自励系のモデル方程式では、相平面解析が強力な解析手法となる。しかし、差分項を含む系への適用は一般に困難であり、差分微分方程式の解析が難しい一因である。本研究では差分微分方程式に対して自己誘導関数という新しい概念を導入し、差分項を含む

---

〒164-8525 東京都中野区中野 4-21-1 明治大学 中野キャンパス

部分と含まない微分方程式に分割する方法論を提案する。この分割で与えられる微分方程式には標準的な力学系理論が適用可能であり、解析が容易になる。また、我々はこの方法を交通流分野においてよく知られている最適速度 (OV) モデルに対して応用し、遷移層を持つ解の構成が可能となることを示す。

本稿の構成は次のとおりである。2 節ではまず、OV モデルにおける渋滞相と対応する時間周期解が満たすべき差分微分方程式 (2) を導入する。この方程式に対する数値計算結果から、遷移層の特徴を指摘する (図 1 (b) 参照)。その上で自己誘導関数  $g$  を導入し、(2) を (5) と (6) の 2 つの問題に分ける。この 2 つの問題を (7) の下で考え、解の存在を主張する (定理 1)。定理の主張の後に証明の方針を詳しく述べる。3 節で定理 1 を証明する。

## 2 交通流における最適速度モデル

交通流分野でよく知られている OV モデル ([1]) とは、

$$x_n'' = a(V(\Delta x_n) - x_n'), \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

である。この方程式を区間長  $L$  のサーキットで考え、前方の車との車間距離を表す関数  $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$  が  $t$  について周期的で、かつ  $\Delta x_n(t) = X(ct + n - 1)$  を満たすと仮定すると、

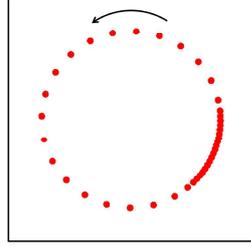
$$c^2 X'' - a(V(\sigma X) - V(X)) + acX' = 0 \quad (2)$$

が得られる。ここで  $X = X(s)$  は周期  $N$  の関数であり、 $c > 0$  である。シフト作用素  $\sigma$  は車間距離  $\Delta x_n$  から自然に現れ、関数  $\varphi$  に対し、 $[\sigma\varphi](s) \equiv \varphi(s + 1)$  で定義される。多くの場合、OV 関数  $V$  にはシグモイド型の関数が使われる。例えば  $\beta, V_0, l > 0, M \in \mathbb{R}$  に対して

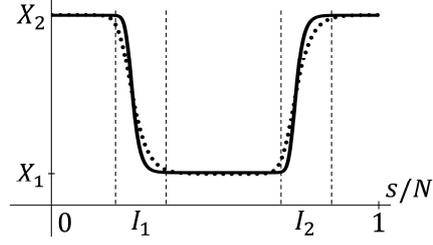
$$V(x) = \frac{V_0}{2} (\tanh[\beta(x - l)] + M) \quad (3)$$

で与えられる。(2) における周期解は、(1) において自己組織的に形成される波の伝播、いわゆる渋滞と対応するため重要である (図 1 (a))。[8] では周期解が構成されているが、OV 関数に階段関数を適用するといった強い条件が課されており、解析的なアプローチによる研究結果としては不十分である。

(3) を仮定して数値計算を行うと、(2) における周期解  $X$  が確認できる (図 1 (b))。この結果をさらに詳しく見ると、 $X$  がある定数  $X_1, X_2$  に近い状態を取る領域と、それらを結ぶ遷移層を持つ領域  $I_1, I_2$  に分けられ、 $I_1$  では単調減少、 $I_2$  では単調増加であることが観察できる。さらに、 $N$  を大きくすると、 $I_1, I_2$  の幅はほとんど変化せず、 $cN$  はある定数



(a) (1) における渋滞現象



(b) (2) における周期解

図 1 OV モデルにおける数値計算結果. OV 関数に (3) を用い,  $V_0 = 0.0336$ ,  $\beta = 89.7$ ,  $l = 0.025$ ,  $M = 0.913$ ,  $a = 1.6$  とした. (a) は (1) に対する結果を示しており,  $L = 1$  の長さを持つサーキット上を  $N = 40$  台の車が走行する状況を表す. 図中の赤丸は各車のサーキット上の位置と対応し, 矢印は各車の進行方向を意味する. (b) では, (2) を区間  $[0, N]$  における周期境界条件の下で考え,  $N = 20$  (点線),  $N = 40$  (実線) に対する結果を示している. ただし横軸の幅を揃えるため,  $s/N$  を用いて表示していることに注意する.

に漸近する. 以上の考察の下, 本研究では  $c, X_1, X_2$  を決定し, 遷移層に対応した (2) の解を構成し, (1) における渋滞相を数理的に特徴付けることを目標とする.

$I_2$  における遷移層を念頭に置き, 適当な  $s_0$  に対して  $X(s) = X_2 - u(s - s_0)$  によって関数  $u = u(s)$  を導入することで, (2) から

$$c^2 u'' + a(V(X_2 - \sigma u) - V(X_2 - u)) + acu' = 0 \quad (4)$$

が得られる. 以下では, (4) における単調減少な解を構成することに焦点を当てる. ここで (4) を異なる視点から捉える. 求めるべき解  $u$  は単調減少であるので逆関数を持つ. すると,  $[\sigma u](s)$  は  $u$  の関数とみなせるので,

$$g(u(s)) = a(V(X_2 - [\sigma u](s)) - V(X_2 - u(s))), \quad (5)$$

及び,  $g(0) = 0$  によって関数  $g = g(u)$  を導入することが可能である. このように導入される  $g$  のことを「自己誘導関数」と呼ぶこととする. 以上により, (4) の解  $(u, c)$  を求めることは, (5) と

$$c^2 u'' + g(u) + acu' = 0 \quad (6)$$

を同時に満たす  $(u, c, g)$  を求めることに等しい.

本稿では, パラメータ  $\eta > 0$  を任意に与え,  $\beta$  が十分大きいと仮定する. このとき, 条件

$$u'(s) < 0 \ (s > -1), \quad u(-1) = \eta, \quad u(0) = \frac{\eta}{2}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} u(s)e^{as/c} > 0 \quad (7)$$

の下で, (5) と (6) を  $s > -1$  で考える. さて, (3) で  $\beta \rightarrow \infty$  とすることで得られる階段関数を OV 関数として用いた場合, 自己誘導関数は  $g(u) = g_0(u) \equiv aV_0\chi_{[\eta/2, \eta]}(u)$  となる. ここで,  $\chi_{[\eta/2, \eta]}(u)$  は

$$\chi_{[\eta/2, \eta]}(u) = \begin{cases} 1, & \frac{\eta}{2} < u < \eta, \\ 0, & u \leq \frac{\eta}{2}, \eta \leq u \end{cases}$$

を満たす定義関数である.  $g = g_0$  の場合には (6) を直接解くことができるため, (5)–(7) を満たす解  $(u_*, c_*)$  を具体的に構成できる. また,  $(\zeta - 2)e^\zeta + 2 = 0$  の一意解  $\bar{\zeta} > 0$  に対して,  $\bar{\eta} \equiv 2V_0\bar{\zeta}/a$  とするとき,  $\eta > \bar{\eta}$  であれば  $u'_*(-1) < 0$ ,  $\eta = \bar{\eta}$  であれば  $u'_*(-1) = 0$  が成り立つ (補題 1). なお,  $\eta = \bar{\eta}$  に対する  $(u_*, c_*)$  は, [8] で構成されているものと本質的に一致することに注意する.

$(u_*, c_*)$  から得られる情報を用いて, 任意の  $\eta > \bar{\eta}$  に対して以下の定理 1 を証明することを目標とする. 定理では,  $V \in C^1(\mathbb{R})$  に次を仮定する.

- (A1)  $V$  はパラメータ  $\beta$  に依存し, ある  $l, V_0 > 0, V_1 \in \mathbb{R}$  に対して, 各点  $x \in \mathbb{R}$  で  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} V(x) = V_0H(x-l) + V_1$  を満たす. ここで  $H$  は,  $x < 0$  で  $H(x) = 0$ ,  $x > 0$  で  $H(x) = 1$  を満たす階段関数である. さらに, 任意の  $\delta_0 > 0$  に対して,  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sup_{|x-l| \geq \delta_0} |V'(x)| = 0$  が成り立つ.
- (A2)  $x \in \mathbb{R}$  で  $V'(x) > 0$  である. また,  $\beta$  に依存しないある定数  $m_1, m_2$  が存在して,  $m_1 \leq V(x) \leq m_2$  を満たす.

**定理 1.**  $V \in C^1(\mathbb{R})$  が (A1), (A2) を満たすとす. 任意に  $\eta > \bar{\eta}$  を与え,  $X_2 = l + \eta/2$  とする. もし  $\beta$  が十分大きければ, (5)–(7) を満たす解  $(u, c, g)$  が存在する.

次節で定理 1 を証明する. ここで, 証明の概略について述べる. まず,  $(u_*, c_*)$  を具体的に構成する (補題 1). 次に,  $(u_*, c_*)$  を用いてある関数のクラス  $\mathcal{G}$  を定義し, 自己誘導関数  $g$  が満たすべき条件を示す. 次に, 任意の  $g \in \mathcal{G}$  に対して (6) と (7) の解  $(u, c)$  が一意に存在することを示す (補題 6). この議論において, (6) を (16) に置き換え,  $\phi = \phi(u)$  を導入することが重要である. ここでも  $u(s)$  の単調性が必要である. (16) の導入の際, まずは  $u = 0$  付近での (6) における解の振る舞いを詳細に決定する必要がある. しかしながら,  $g \in \mathcal{G}$  に対しては連続性のみが仮定され,  $C^1$  級は保証されないため, 詳細な情報を得ることは一般に困難である. この点を解消するため, パラメータ  $\delta > 0$  を持つカットオフ関数  $\chi_\delta$  を自己誘導関数に人工的に加える ((12) や (20) を参照). 補題 6 で得られた

$(u, c)$  を用いて新たに自己誘導関数を導入することで, (20) で写像  $T$  を定義する. 最後に, この写像に対して Schauder の不動点定理 ([5]) を適用し, (23) と (7) を満たす  $(u, c)$  の存在を保証する (定理 2). ここまでの議論では, カットオフ関数  $\chi_\delta$  が自己誘導関数に付与されていた. そこで,  $\delta \rightarrow 0$  と極限を取ることでカットオフ関数を取り除き, 最終的に定理 1 を示す.

### 3 定理 1 の証明

まず  $(u_*, c_*)$  を具体的に構成し,  $\bar{\eta}$  の導出過程を明示する. 前節で述べたように,  $(\zeta - 2)e^\zeta + 2 = 0$  を正の範囲で考えたとき, 一意解  $\bar{\zeta} > 0$  が存在することに注意する.

**補題 1.** もし  $\eta \geq \bar{\eta}$  であれば,  $g = g_0$  に対する (6) と (7) は一意に解  $(u_*, c_*)$  を持つ. さらに,  $u_*$  は  $s \geq -1$  で単調減少であり,  $\eta = \bar{\eta}$  のとき  $u'_*(-1) = 0$ ,  $\eta > \bar{\eta}$  のとき  $u'_*(-1) < 0$  を満たす.

*Proof.*  $v(z) = u(cz)$  と変数変換することで,  $g = g_0$  に対する (6) は

$$v'' + g_0(v) + av' = 0 \quad (8)$$

と書き換えられる. (8) の解  $v$  が,  $v(0) = \eta/2$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = 0$  であり, かつ, ある  $z_0 < 0$  に対して  $v(z_0) = \eta$  を満たすとすると,

$$v(z) = \begin{cases} \frac{V_0}{a}(1 - e^{-az}) - V_0z + \frac{\eta}{2}e^{-az}, & z_0 \leq z < 0, \\ \frac{\eta}{2}e^{-az}, & z \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

と表される. ただし,  $\eta, z_0$  は

$$\eta = \frac{V_0}{a}(1 - e^{-az_0}) - V_0z_0 + \frac{\eta}{2}e^{-az_0}$$

を満たさなければならない. これを  $\eta$  について解くと,

$$\eta = \frac{2V_0}{a} \frac{e^{-az_0} - 1 + az_0}{e^{-az_0} - 2} \quad (10)$$

を得る. ここで関数  $h(\zeta) \equiv (e^\zeta - 1 - \zeta)/(e^\zeta - 2)$  を定めると, (10) は  $\eta = 2V_0h(-az_0)/a$  と同値である. 簡単な計算から,

$$h'(\zeta) \equiv \frac{(\zeta - 2)e^\zeta + 2}{(e^\zeta - 2)^2} = 0 \quad (11)$$

は一意解  $\bar{\zeta} \approx 1.59$  を持つ. ここで,  $\bar{\eta} = 2V_0h(\bar{\zeta})/a > 0$ ,  $\bar{z}_0 = -\bar{\zeta}/a < 0$  とおく. 一方,  $\tilde{z}_0 = -(\log 2)/a < 0$  とすると,  $e^{-az_0} - 2 = 0$  を満たす.  $\log 2 \approx 0.69$  に注意すれば,  $\bar{z}_0 < \tilde{z}_0$  である. したがって,  $\bar{z}_0 \leq z_0 < \tilde{z}_0$  である場合に限り, (9) で与えられる  $v$  は, (8) を満たす  $z \geq z_0$  で単調減少な解であり,  $\eta$  は (10) で与えられ,  $\eta \geq \bar{\eta}$  を満たす. 最後に,  $c = -1/z_0$ ,  $u(s) = v(s/c)$  とすることで, 補題が成り立つことが分かる.  $\square$

**注意 1.** (11) は [8] の式 (15) と本質的に同じである.

$\eta > \bar{\eta}$  を任意に与える.  $u_*$  は  $s \geq -1$  で単調減少であるので,  $u_*$  は逆関数  $u_*^{-1}$  を持つ. ここで  $g_*$  を

$$g_*(u) = a\chi_\delta(u)(V(l + \frac{\eta}{2} - u_*(u_*^{-1}(u) + 1)) - V(l + \frac{\eta}{2} - u)), \quad (12)$$

及び,  $g_*(0) = 0$  で与える. ここで  $\delta > 0$  は十分小さいパラメータであり,  $\chi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$  はカットオフ関数で,  $u < \delta$  に対して  $\chi_\delta(u) = 0$ ,  $u > 2\delta$  に対して  $\chi_\delta(u) = 1$  を満たすとする. (12) で  $u = u_*(s)$  を代入すれば,

$$g_*(u_*(s)) = a\chi_\delta(u_*(s))(V(l + \frac{\eta}{2} - u_*(s + 1)) - V(l + \frac{\eta}{2} - u_*(s))) \quad (13)$$

が成り立つことに注意する.

次に,  $\beta, \delta$  と独立な定数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  を十分小さくとる.  $\beta, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  と独立な  $\bar{u}_1 \in (\delta, \eta/2)$ ,  $\bar{u}_2 \in (\eta/2, \eta)$  を任意にとる.  $\bar{u}_2$  が  $\eta$  に十分近いとする (補題 5 参照). 区間  $I$  上の連続関数  $g$  に対して与えられる連続関数ノルムを  $\|g\|_{C(I)} \equiv \sup_{u \in I} |g(u)|$  で与え,

$$\mathcal{G} \equiv \{g \in C([0, \eta]) \mid 0 \leq g(u) \leq a(m_2 - m_1) \ (u \in [0, \eta]), \quad g(u) \equiv 0 \ (u \in [0, \delta]), \\ g(u) \leq \varepsilon_1 u \ (u \in [0, \bar{u}_1]), \quad \|g - g_*\|_{C([0, \bar{u}_2])} \leq \varepsilon_2\}$$

を定義する. 以下の補題で示すように  $g_* \in \mathcal{G}$  であるため,  $\mathcal{G}$  は空ではない.  $C([0, \eta])$  上のノルムによって  $\mathcal{G}$  に距離を与えると,  $\mathcal{G}$  は有界な閉凸集合である.

**補題 2.**  $\eta \geq \bar{\eta}$  を任意に与えると, 以下が成り立つ.

- (i)  $g_*$  は  $[0, \eta]$  上で連続で, 非負である.
- (ii)  $u \in [0, \delta]$  に対して  $g_*(u) \equiv 0$  である.
- (iii)  $u \in [0, \eta]$  に対して  $g_*(u) \leq a(m_2 - m_1)$  である.
- (iv)  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} g_*(u) = g_0(u)$ .
- (v)  $\beta, \delta$  と独立な定数  $\varepsilon_1$  を十分小さく与える.  $\beta, \delta, \varepsilon_1$  と独立な定数  $\bar{u}_1 < \eta/2$  を任意に与える. このとき  $\beta$  が十分大きければ,  $u \in [0, \bar{u}_1]$  に対して  $g_*(u) \leq \varepsilon_1 u$  が成り立つ.

*Proof.*  $s \geq -1$  で  $u_*(s)$  は連続で, 単調減少, かつ  $\lim_{s \rightarrow \infty} u_*(s) = 0$  であるので, (i) が成り立つことは明らかである. カットオフ関数  $\chi_\delta$  により, (ii) が成り立つことも明らか. (iii) は (A2) より成り立つ. (A1) により,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} g_*(u_*(s)) = a\chi_\delta(u_*(s))(H(\frac{\eta}{2} - u_*(s+1)) - H(\frac{\eta}{2} - u_*(s))). \quad (14)$$

が成り立つ.  $u_*$  が単調減少で  $u_*(0) = \eta/2$  であるので, (iv) を得る.

$u_*(s_1) = \bar{u}_1$  を満たす  $s_1 > 0$  を取る.  $u_*$  は単調減少であるので,  $s \geq s_1$  で  $u_*(s+1) < u_*(s) \leq \bar{u}_1$  が成り立つ.  $\beta$  が十分大きいとすれば, (A1) により  $\sup_{u \in (0, \bar{u}_1)} aV'(l + \eta/2 - u) \leq \varepsilon_1$  を得る. 平均値の定理により, ある  $\theta \in (u_*(s+1), u_*(s))$  が存在して,

$$g_*(u_*(s)) = a\chi_\delta(u_*(s))V'(l + \frac{\eta}{2} - \theta)(u_*(s) - u_*(s+1)) \leq \varepsilon_1 u_*(s)$$

が成り立つため, (v) を得る. □

$g \in \mathcal{G}$  を任意に与える.  $c > 0$  とする.  $c$  は後で決まる定数である.  $u \in [0, \delta]$  で  $g(u) \equiv 0$  であるので, (6) の解  $u(s)$  は,  $u(s) \leq \delta$  である限り  $u(s) = \hat{u}e^{-as/c}$  と表される. ここで  $\hat{u}$  はある正定数である.  $u$  は単調減少であるので,

$$\phi(u(s)) = -cu'(s) \quad (15)$$

によって関数  $\phi = \phi(u)$  を定義できる.  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = 0$  を考慮し,  $\phi(0) = 0$  とすることで,  $\phi$  は  $u \in [0, \delta]$  上で well-defined である. (15) の両辺を微分することで  $\phi'(u(s))u'(s) = -cu''(s)$  を得る. したがって,  $\phi$  は

$$\frac{d\phi}{du} = a - \frac{g(u)}{\phi} \quad (16)$$

と  $\phi(\delta) = a\delta$  の解とみなせる. (16) の右辺は,  $\phi \neq 0$  で  $C^1$  であるので,  $\phi > 0$  である限り, 解  $\phi$  を  $u > \delta$  に延長することができる. ここで,  $g$  が局所リプシッツ関数とは限らないため, (6) における解の存在と一意性は, [2] にあるような常微分方程式の一般論では保証されないことに注意する. 以下で, 解  $\phi$  は  $u = \eta$  まで連続的に延長でき, 正であることを示す.

まず次の補題で,  $\phi_u(u) \equiv au$  が (16) における優解であることを示す.

**補題 3.**  $u \geq 0$  に対して  $\phi(u) \geq 0$  である限り,  $\phi(u) \leq \phi_u(u)$  が成り立つ.

*Proof.*  $\psi \equiv \phi - \phi_u$  とする. 明らかに  $0 \leq u \leq \delta$  で  $\psi \equiv 0$  である. 一方,  $u \geq \delta$  で

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{g(u)}{\phi} \leq 0$$

が成り立つ。したがって  $\psi(u) \leq \psi(\delta) = 0$  を得る。  $\square$

区間  $[0, \eta]$  を

$$[0, \eta] = [0, \bar{u}_1] \cup [\bar{u}_1, \bar{u}_2] \cup [\bar{u}_2, \eta]$$

の3つに分割する。第1区間における(16)の劣解を与えよう。 $\kappa = (a + \sqrt{a^2 - 8\varepsilon_1})/2$  に対して、 $\phi_l = \phi_l(u) \equiv \kappa u$  とする。 $\varepsilon_1 > 0$  は十分小さいので、 $\kappa$  は  $a$  に近い値を取り、 $a$  よりも小さい。また、 $\phi_l$  は  $u > 0$  で

$$\frac{d\phi_l}{du} = a - \frac{2\varepsilon_1 u}{\phi_l} \quad (17)$$

と初期条件  $\phi_l(0) = 0$  を満たす。次の補題では、 $\phi_l$  が  $[0, \bar{u}_1]$  で劣解であることを示す。

**補題 4.**  $[0, \bar{u}_1]$  で  $\phi(u) \geq \phi_l(u)$  が成り立つ。

*Proof.*  $a > \kappa$  であるので、 $0 < u \leq \delta$  で  $\phi(u) > \phi_l(u)$  が成り立つ。そこで、背理法を用いて補題を証明する。ある  $u_0 > \delta$  が存在して  $\phi(u_0) = \phi_l(u_0)$  が初めて成り立ったとする。すると  $(d\phi/du)(u_0) \leq (d\phi_l/du)(u_0)$  でなければならない。しかしながら、 $g(u) \leq \varepsilon_1 u$  であるので

$$\frac{d\phi}{du}(u_0) - \frac{d\phi_l}{du}(u_0) = \frac{2\varepsilon_1 u_0}{\phi_l(u_0)} - \frac{g(u_0)}{\phi(u_0)} = \frac{2\varepsilon_1 u_0 - g(u_0)}{\phi(u_0)} > 0$$

が成り立つが、これは矛盾である。  $\square$

(15)において  $(u, c) = (u_*, c_*)$  を考えることで、 $\phi_*$  を導入する。すると  $\phi_*$  は、 $g(u) = g_0(u)$  に対して(16)を満たす。(9)における具体的な表示を用いることで、 $[\bar{u}_1, \eta]$  で  $\phi_* > 0$  が成り立つことが分かる。すると、以下の補題で述べられるように、 $\phi$  は  $\phi_*$  で近似される。ここから補題8の証明まで、 $\beta, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, g, \bar{u}_1, \bar{u}_2$  に依存しない一般的な定数を  $C$  で表し、区別しないこととする。

**補題 5.**  $\eta - \bar{u}_2$  が十分小さいとし、 $\varepsilon_1$  が十分小さいとすると、 $\beta, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, g, \bar{u}_1, \bar{u}_2$  と独立な定数  $C > 0$  が存在して、 $[\bar{u}_1, \bar{u}_2]$  で  $|\phi(u) - \phi_*(u)| \leq C\varepsilon_2$  と、 $[\bar{u}_2, \eta]$  で  $|\phi(u) - \phi_*(u)| \leq C(\eta - \bar{u}_2)$  が成り立つ。

*Proof.*  $\psi \equiv \phi - \phi_*$  とおく。すると  $\psi$  は

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{g(u)}{\phi} + \frac{g_0(u)}{\phi_*} = \frac{g_0(u)}{\phi\phi_*}\psi + \frac{g_0(u) - g(u)}{\phi} \quad (\equiv p\psi + q)$$

を満たす。この式から

$$\psi(u) = \psi(\bar{u}_1) + \int_{\bar{u}_1}^u (p(w)\psi(w) + q(w))dw \quad (18)$$

を得る. 補題 3, 4 により,  $\varepsilon_1$  が  $\varepsilon_2$  に対して十分小さければ  $|\psi(\bar{u}_1)| \leq C\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$  が成り立つ. ここで

$$u_0 \equiv \max\{\bar{u} \in [\bar{u}_1, \bar{u}_2] \mid |\psi(u)| \leq \sqrt{\varepsilon_2} \ (u \in [\bar{u}_1, \bar{u}])\}$$

を与える.  $|\psi(\bar{u}_1)| \leq \varepsilon_2$  により,  $u_0 > \bar{u}_1$  が成り立つことが分かる. もし  $\varepsilon_2$  が十分小さければ,  $u \in [\bar{u}_1, u_0]$  で  $\phi(u) \geq \phi_*(u) - \sqrt{\varepsilon_2} \geq C$  であることが簡単に分かる. また, 補題 1, 2 によって,  $p = p(u)$  と  $q = q(u)$  が  $u \in [\bar{u}_1, u_0]$  で  $|p(u)| \leq C$ ,  $|q(u)| \leq C\varepsilon_2$  を満たすことが分かる. すると, Gronwall の不等式によって  $u \in [\bar{u}_1, u_0]$  で  $|\psi(u)| \leq C\varepsilon_2$  が成り立つため,  $u_0$  は  $\bar{u}_2$  と一致する. 補題の残りの主張も同様に成り立つ.  $\square$

補題 3-5 から,  $u \in [\delta, \eta]$  に対して, (16) の解  $\phi$  は連続的に拡張され, 正であることが分かる. この事実により以下の補題が成り立つ.

**補題 6.** 補題 5 と同じ仮定の下で, (6) と (7) を満たす解  $(u, c)$  が一意に存在する.

*Proof.* 補題 5 により, (16) の解  $\phi$  は  $u \in [\delta, \eta]$  で well-defined であり, 正である. 常微分方程式における一般論から,  $\phi$  の一意性は明らかである. 次に,

$$v'(z) = -\phi(v(z)) \tag{19}$$

を  $v(0) = \eta/2$  の下で考える.  $\phi$  が  $C^1$  級であることから, ある  $z_0 < 0 < z_1$  が存在して, (19) は  $z_0 \leq z \leq z_1$  で一意解  $v$  を持ち,  $v(z_0) = \eta$  と  $v(z_1) = \delta$  を満たすことが分かる. さらに,  $z \geq z_1$  で  $v(z) = \delta e^{-az}$  とおく.  $c = -1/z_0$  に対して  $u(s) = v(s/c)$  を与えれば,  $u$  は (6) と (7) の解であることが分かる.

次に解の一意性を示す. (6) と (7) を満たす解  $(\hat{u}, \hat{c})$  が存在したとする. (15) において  $(u, c) = (\hat{u}, \hat{c})$  を考えることで,  $\hat{\phi}$  を導入する. すると  $\hat{\phi}$  は,

$$\frac{d\hat{\phi}}{du} = a - \frac{g(u)}{\hat{\phi}}$$

と  $\hat{\phi}(\delta) = a\delta$  を満たす. (16) における解の一意性から,  $\hat{\phi}$  は  $\phi$  と一致せねばならない. したがって  $(\hat{u}, \hat{c})$  は,  $(u, c)$  と等しいことが分かる.  $\square$

**注意 2.** (16) の導出と補題 6 における証明から分かるように, 各  $g \in \mathcal{G}$  に対する (15) によって,  $(u, c)$  と  $\phi$  は 1 対 1 に対応することが分かる. ここで,  $(u, c)$  は (6) と (7) を満たす解であり,  $\phi$  は (16) の解で,  $u \in [0, \delta]$  において  $\phi(u) = au$  を満たすものである.

次に, 補題 6 で与えられた解  $(u, c)$  に対して,  $c > 0$  を評価する.

**補題 7.** 補題 5 と同じ仮定の下で,  $\beta, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, g, \bar{u}_1, \bar{u}_2$  と独立なある  $\bar{c}_1, \bar{c}_2 > 0$  が存在して,  $\bar{c}_1 \leq c \leq \bar{c}_2$  が成り立つ.

*Proof.*  $[-1, 0]$  で (15) の両辺を積分すると,

$$c \left( \frac{\eta}{2} - \eta \right) = - \int_{-1}^0 \phi(u(s)) ds$$

を得る. 補題 5 により  $\phi$  は  $u \in [\eta/2, \eta]$  で一様有界である. よって, 補題 7 が成り立つ.  $\square$

補題 6 で与えられた解  $(u, c)$  に対して,  $u(\bar{s}) = \bar{u}_1$  を満たす  $\bar{s} > 0$  が唯一つ定まる. 次に, この  $\bar{s}$  を評価する.

**補題 8.** 補題 5 と同じ仮定の下で,  $\beta, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, g, \bar{u}_2$  と独立な  $\bar{s}_1, \bar{s}_2 > 0$  が存在して,  $\bar{s}_1 \leq \bar{s} \leq \bar{s}_2$  が成り立つ.

*Proof.*  $[0, \bar{s}]$  で (15) の両辺を積分すると,

$$c(\bar{u}_1 - \frac{\eta}{2}) = - \int_0^{\bar{s}} \phi(u(s)) ds$$

が成り立つ. 前の補題と同様にすれば  $\bar{s}$  に対する評価を得る.  $\square$

$g \in \mathcal{G}$  に対して, 補題 6 で与えられる解を  $(u, c)$  とする.  $g$  への依存性を強調するために,  $u = u_g$  と表す.  $u_g(s)$  は  $s$  について狭義単調減少であるので,  $u \in (0, \eta]$  に対して  $\sigma(u; g) = u_g(u_g^{-1}(u) + 1)$  を定義できる. また  $\sigma(0; g) = 0$  とする. ここで, 写像  $T$  を

$$[Tg](u) \equiv a\chi_\delta(u)(V(l + \frac{\eta}{2} - \sigma(u; g)) - V(l + \frac{\eta}{2} - u)) \quad (20)$$

で定義する. (5) と同様に,

$$[Tg](u_g(s)) = a\chi_\delta(u_g(s))(V(l + \frac{\eta}{2} - u_g(s + 1)) - V(l + \frac{\eta}{2} - u_g(s))) \quad (21)$$

が  $s \geq -1$  で成り立つことに注意する. 次に  $T$  の性質を調べる.

**補題 9.** 補題 5 と同じ仮定の下で,  $T : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  は連続である.

*Proof.* まず,  $g \in \mathcal{G}$  に対して  $Tg \in \mathcal{G}$  が成り立つことを示す. (6) の解  $u_g(s)$  は  $C^2([-1, \infty))$  で単調減少である. したがって,  $Tg \in C([0, \eta])$  である. また,  $[0, \eta]$  において  $0 \leq [Tg](u) \leq a(m_2 - m_1)$  が成り立つことは, (A2) により明らかである. カットオフ関数  $\chi_\delta$  により,  $[0, \delta]$  で  $[Tg](u) \equiv 0$  であることも自明である.

次に  $u \in (0, \bar{u}_1]$  に対して  $[Tg](u) < \varepsilon_1 u$  を示す. まず,  $[Tg](u) \equiv 0$  であるので,  $u \in (0, \delta]$  でこの不等式が成り立つことは明らかである. 次に, 不等式が成り立つことを背理法によって示そう. ある  $u_0 \in (\delta, \bar{u}_1]$  が存在して,  $[Tg](u_0) = \varepsilon_1 u_0$  が初めて成り立ったとする. 平均値の定理から, ある  $\bar{u} \in (\sigma(u_0; g), u_0)$  が存在して,

$$\varepsilon_1 u_0 = a\chi_\delta(u_0)(V'(l + \frac{\eta}{2} - \bar{u})(u_0 - \sigma(u_0; g))) \leq aV'(l + \frac{\eta}{2} - \bar{u})u_0$$

が成り立つ. したがって  $\varepsilon_1 \leq aV'(l + \frac{\eta}{2} - \bar{u})$  である. 一方で, (A1) により, この不等式の右辺は  $\beta \rightarrow \infty$  で 0 に収束するため, 矛盾である.

次に  $[\delta, \bar{u}_2]$  で  $|[Tg](u) - g_*(u)|$  を評価する. 以下,  $C$  は  $\beta, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, g, \bar{u}_1, \bar{u}_2$  と独立で, 一般的な定数とする.  $u_g$  と  $u_*$  は  $[-1, \infty)$  から  $(0, \eta]$  への全単射な関数であるので, 各  $s$  に対して  $u_g(s) = u_*(s_*)$  を満たす  $s_*$  が唯 1 つ存在する. ここで  $\delta_0 = \eta - \bar{u}_2$  とおき,  $u_g(s) = u_*(s_*) \in [\delta, \bar{u}_2]$  が成り立つ場合に  $u_g(s+1) \leq \eta/2 - C\delta_0$  であることを示す.  $u = u_g$  に対して  $\phi = \phi(u)$  を (15) により定義する.  $[-1, s]$  で (15) の両辺を積分すると,

$$c(\eta - \delta_0 - \eta) \geq - \int_{-1}^s \phi(u_g(\theta))d\theta$$

を得る. したがって, 補題 5 により  $C\delta_0 \leq s+1$  を得る.  $u_g$  が単調減少で  $u_g(0) = \eta/2$  であることから, 平均値の定理によりある  $\tilde{s} \in (0, C\delta_0)$  が存在して

$$u_g(s+1) \leq u_g(C\delta_0) = u_g(0) + u_g'(C\delta_0) - u_g(0) = \frac{\eta}{2} + u_g'(\tilde{s})C\delta_0 \leq \frac{\eta}{2} - C\delta_0$$

が成り立つ. 上と同様に,  $u_*(s_*+1) \leq \eta/2 - C\delta_0$  も成り立つ. 以上により,  $\beta$  が十分大きければ, (A2) により

$$\begin{aligned} |[Tg](u_g(s)) - g_*(u_*(s_*))| &\leq a|V(l + \frac{\eta}{2} - u_g(s+1)) - V(l + \frac{\eta}{2} - u_*(s_*+1))| \\ &\leq a \sup_{u \in (C\delta_0, \infty)} |V'(l+u)| |u_g(s+1) - u_*(s_*+1)| \leq \varepsilon_2 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって  $Tg \in \mathcal{G}$  であることが分かる.

$T$  の連続性を示すために, まずは準備をする.  $g_n, g \in \mathcal{G}$  を取り,  $n \rightarrow \infty$  で  $g_n \rightarrow g$  が  $C([0, \eta])$  で成り立つと仮定する. これ以降,  $C$  は  $n$  にも依存しない一般的な定数であるとする.  $g_n$  と  $g$  に対して補題 6 で与えられる  $(u, c)$  を, それぞれ  $(u_n, c_n)$  と  $(u_g, c)$  と表す. 簡単のため,  $u_{g_n}$  の代わりに  $u_n$  と表していることに注意する. 次に,  $(u_n, c_n)$  と  $(u_g, c)$  に対して (15) を用いることで,  $\phi_n$  と  $\phi$  を与える. ここで  $u_n$  と  $\phi_n$  について調べる. まず  $[0, \delta]$  で  $g_n(u) = g(u) = 0$  であるので,  $\phi_n(u) = \phi(u) = au$  が成り立つ. 一方,

補題 4, 5 により, もし  $\varepsilon_2$  と  $\eta - \bar{u}_2$  が十分小さければ,  $[\delta/2, \eta]$  で  $\phi_n \geq C$  と  $\phi \geq C$  が成り立つ.  $n \rightarrow \infty$  において  $g_n$  が  $g$  に収束することから, (16) により  $\phi_n \rightarrow \phi$  が  $C([0, \eta])$  で成り立つことが分かる. (15) と補題 7, および,  $[\delta/2, \eta]$  で  $\phi_n \geq C$  であることから,  $n$  に依存しないある  $s_R > 0$  に対して  $u_n(s_R) \leq \delta$  が成り立つ. すると, ある  $s_n \in [\bar{s}_1, s_R]$  が存在して,  $u_n(s_n) = \delta$  が成り立つ. ここで  $\bar{s}_1$  は補題 8 で与えられたものである. したがって,  $s > s_n$  に対して  $u_n(s) = \delta e^{a(s-s_n)/c_n}$  と表される.

以上の準備の下で  $T$  の連続性を示す. 補題 5 と 7 により,  $(u_n, c_n)$  は

$$\|u_n\|_{C([-1, \infty))} + \|u'_n\|_{C([-1, \infty))} + |c_n| \leq C$$

を満たすことが分かる. したがって, Ascoli-Arzelà の定理により, 部分列  $(u_{n_k}, c_{n_k}, s_{n_k})$  と  $(\tilde{u}, \tilde{c}, \tilde{s})$  が存在して,  $k \rightarrow \infty$  に対して  $u_{n_k} \rightarrow \tilde{u}$  in  $C([-1, s_R])$ ,  $c_{n_k} \rightarrow \tilde{c}$ ,  $s_{n_k} \rightarrow \tilde{s}$  が成り立つ.  $s > \tilde{s}$  では  $\tilde{u}(s) = \delta e^{a(s-\tilde{s})/\tilde{c}}$  と書き下せることに注意すれば,  $u_{n_k}$  が  $C([-1, \infty))$  で  $\tilde{u}$  に収束することが分かる.  $n \rightarrow \infty$  に対して  $\phi_n$  は  $\phi$  に収束するので,  $(\tilde{u}, \tilde{c}, \phi)$  は (15) を満たすことが分かる. したがって  $(\tilde{u}, \tilde{c})$  は,  $g$  に対する (6) と (7) の解となるが, 補題 6 で示した一意性の結果から,  $(\tilde{u}, \tilde{c}) = (u, c)$  が成り立つ. これは  $n \rightarrow \infty$  で  $(u_n, c_n)$  が  $(u, c)$  に収束することを示しており,  $Tg_n \rightarrow Tg$  を得る.  $\square$

次に  $T$  がコンパクトであることを示す.

**補題 10.** 補題 5 と同じ仮定の下で,  $T$  はコンパクトである.

*Proof.*  $g_n \in \mathcal{G}$  を取る. 簡単のため,  $C$  は  $n$  に依存しない一般的な定数を表すとする.  $Tg_n \in \mathcal{G}$  であるので,  $n$  に対して  $Tg_n$  は  $u \in [0, \eta]$  で一様有界である. ここで,  $d[Tg_n]/du$  も同様に一様有界であることを示す.  $g_n$  に対して補題 6 で与えられる解を  $(u_n, c_n)$  と表す.  $u_{g_n}$  の代わりに  $u_n$  と表していることに注意する.  $\phi_n$  を,  $(u_n, c_n)$  に対して (15) で与えられるものとする.  $g = g_n$  と  $u_g = u_n$  に対する (21) において, 両辺を  $s$  で微分すると,

$$\begin{aligned} & \frac{d[Tg_n]}{du}(u_n(s))u'_n(s) \\ &= -a\chi_\delta(u_n(s))(V'(l + \frac{\eta}{2} - u_n(s+1))u'_n(s+1) - V'(l + \frac{\eta}{2} - u_n(s))u'_n(s)) \quad (22) \\ &+ a\chi'_\delta(u_n(s))u'_n(s)(V(l + \frac{\eta}{2} - u_n(s+1)) - V(l + \frac{\eta}{2} - u_n(s))) \end{aligned}$$

を得る. ここで  $s_n$  を  $u_n(s_n) = \delta$  によって与える. もし  $s \geq s_n$  であれば,  $u_n(s) = \delta e^{a(s-s_n)/c_n}$  と表され,  $u_n(s)$  は  $\delta$  以下である. したがって,  $\chi_\delta(u_n(s)) = \chi'_\delta(u_n(s)) = 0$  が成り立ち,  $(d[Tg_n]/du)(u_n(s_n)) = 0$  である. 一方, 補題 9 における議論と同様に考

えることで,  $u \in [\delta, \eta]$  では  $\phi_n \geq C$  である. これは, 補題 7 により,  $|u'_n(s)| \geq C$  を意味する. したがって,  $(d[Tg_n]/du)(u)$  は  $n$  に対して  $u \in [0, \eta]$  で一様有界である. すると, Ascoli-Arzelà の定理により, ある  $g \in C([0, \eta])$  が存在して,  $n \rightarrow \infty$  に対して  $\|[Tg_n] - g\|_{C([0, \eta])} \rightarrow 0$  が成り立つとできる. もし必要であれば,  $g_n$  に対する部分列を取るものとする.  $\mathcal{G}$  は閉であるので,  $g \in \mathcal{G}$  である. したがって  $T$  はコンパクトである.  $\square$

ここまでで得られた結果をまとめると, 以下の定理が得られる.

**定理 2.** (A1), (A2) を仮定する.  $\eta > \bar{\eta}$  を満たす  $\eta$  を任意に与える. もし  $\beta$  が十分大きく  $\delta > 0$  が十分小さいのであれば, ある  $(u, c)$  が存在して,

$$c^2 u'' + a\chi_\delta(u)(V(l + \frac{\eta}{2} - \sigma u) - V(l + \frac{\eta}{2} - u)) + acu' = 0, \quad s > -1 \quad (23)$$

と (7) を満たす.

*Proof.* 補題 9, 10 と Schauder の不動点定理を用いれば,  $T$  の不動点  $g$ , すなわち,

$$g(u) = a\chi_\delta(u)(V(l + \frac{\eta}{2} - \sigma(u; g)) - V(l + \frac{\eta}{2} - u)) \quad (24)$$

を満たす  $g$  が存在する. 補題 6 により, この  $g$  に対して (6) の解  $(u, c)$  が存在する. 以上により,  $(u, c)$  は (23) と (7) を満たすことが分かる.  $\square$

ここまで (5) にカットオフ関数  $\chi_\delta$  を考慮したものを考えることで, 定理 2 を示した. 最後に, 定理 2 で与えられた解に対して  $\delta \rightarrow 0$  と極限を取ることで, 定理 1 を示そう.

*Proof.* 定理 2 で与えられる (6), (7), (24) の解を  $(u_\delta, c_\delta, g_\delta)$  と表す.  $\phi_\delta$  は  $(u_\delta, c_\delta)$  に対する (15) により与えられるとする. まず, 補題 3, 4 により,  $u_\delta(s) \leq \bar{u}_1$  である限り  $\kappa u_\delta(s) \leq -c_\delta u'_\delta(s) \leq a u_\delta(s)$  が成り立つ. ここで  $u_\delta(\bar{s}_\delta) = \bar{u}_1$  を満たす  $\bar{s}_\delta$  を取る. すると,  $s \geq \bar{s}_\delta$  で

$$\bar{u}_1 e^{-a(s-\bar{s}_\delta)/c_\delta} \leq u_\delta(s) \leq \bar{u}_1 e^{-\kappa(s-\bar{s}_\delta)/c_\delta} \quad (25)$$

が成り立つ. さらに, 補題 5 によって,  $u_\delta$  と  $u'_\delta$  が  $\delta > 0$  に対して  $s \in [-1, \infty)$  で一様有界であることも分かる. すると, (23) により  $u''_\delta$  も一様有界である.

ここで  $\delta \rightarrow 0$  と極限をとる. 必要であれば  $\delta$  に対する部分列を取るものとするが, 新たな表記は用いないものとする. 補題 7, 8 で得られた  $c_\delta$  と  $\bar{s}_\delta$  に対する一様評価から,  $c_\delta$  と  $\bar{s}_\delta$  はある  $c$  と  $\bar{s}$  に収束することが分かる. 次に, Ascoli-Arzelà の定理により, 各  $R > 0$  に対してある  $u_R \in C^1([-1, R])$  が存在して,

$$\|u_\delta - u_R\|_{C([-1, R])} + \|u'_\delta - u'_R\|_{C([-1, R])} \rightarrow 0$$

が  $\delta \rightarrow 0$  に対して成り立つ. さらに, 対角線論法により, ある  $u \in C^1([-1, \infty))$  が存在して,  $\delta \rightarrow 0$  のとき  $u_\delta$  が  $u$  に  $C^1([-1, \infty))$  で収束することも容易に分かる. 最後に, (23) において  $\delta \rightarrow 0$  とすることで,  $u \in C^2([-1, \infty))$  であり,  $(u, c)$  が (4) と (7) を満たすことが分かる. したがって, 定理 1 が成り立つことが示された.  $\square$

## 謝辞

本研究は科研費 (課題番号 : JP20K03757, JP23K25786) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Structure stability of congestion in traffic dynamics. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 11:203–223, 1994.
- [2] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.
- [3] L. Guerrini, A. Krawiec, and M. Szydlowski. Bifurcations in an economic growth model with a distributed time delay transformed to ODE. *Nonlinear Dynamics*, 101(2):1263–1279, 2020.
- [4] K. Ikeda, P. Roux, D. Salort, and D. Smets. Theoretical study of the emergence of periodic solutions for the inhibitory NNLF neuron model with synaptic delay. *Mathematical Neuroscience and Applications*, 2, 2022.
- [5] L. Nirenberg. *Topics in nonlinear functional analysis*, volume 6. American Mathematical Soc., 1974.
- [6] F. A. Rihan, H. J. Alsakaji, and C. Rajivganthi. Stochastic SIRC epidemic model with time-delay for COVID-19. *Advances in difference equations*, 2020(1):502, 2020.
- [7] Y. Sugiyama. *Dynamics of Asymmetric Dissipative Systems*. Springer, 2023.
- [8] Y. Sugiyama and H. Yamada. Simple and exactly solvable model for queue dynamics. *Physical Review E*, 55(6):7749, 1997.