

# 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の semi-wave について

出原 浩史\* 宮崎大学工学教育研究部

物部 治徳† 大阪公立大学大学院理学研究科

Yong-Jie Syu‡ National Yang Ming Chiao Tung University

Chang-Hong Wu§ National Yang Ming Chiao Tung University

## 1 はじめに

Fisher-KPP 方程式は、ロジスティック成長項と拡散項をもつ方程式であり、生物の個体群の拡がりなどを記述する方程式として数理生物分野において広く研究されてきた。このモデルは

$$u_t = du_{xx} + \gamma u(1 - u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

として表され、 $u(x, t)$  は場所  $x$ 、時間  $t$  でのある生物種の個体群密度を表し、 $d > 0$  は拡散係数を、 $\gamma > 0$  は内的自然増殖率を表している。生物の個体群の空間的な拡がりを表す解としてしばしば考えられるものとして進行波解が挙げられる。進行波解は一定波形、一定速度をもつ解であり、 $c$  を進行波解の速度としたとき  $u(x, t) = U(x + ct)$  をみたく。Fisher-KPP 方程式の場合、境界条件は  $U(-\infty) = 0$ 、 $U(+\infty) = 1$  であり、速度が  $c \geq c^* := 2\sqrt{d\gamma}$  に対して正値かつ単調増加な進行波解が存在することが知られている [4, 7]。ここで、 $c^*$  は最小速度と呼ばれる。

本研究では、次の遅延を含む Fisher-KPP 方程式を考える：

$$u_t = du_{xx} + \gamma u(1 - u(t - \tau)), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1)$$

ここで、 $\tau > 0$  は時間遅れを表している。この方程式は、生物個体群の増殖率が  $\tau$  時間前の個体群密度に依存しているモデルとみなすことができる。この遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解について、いくつかの結果が得られている。例えば、Wu と Zou は、任意の  $c > 2\sqrt{d\gamma}$  に対して、 $\tau_c > 0$  が存在して、 $\tau \leq \tau_c$  ならば速度  $c$  をもつ正値単調進行波解が (1) に存在することを示している [9]。言い換えれば、時間遅れ  $\tau$  が小さいときは遅延のない Fisher-KPP 方程式の進行波解と同じ性質をもつことを意味している。進行波解のプロファイルについては図 1(a) を参照。

一方、 $\tau$  が大きいときは、単調でない進行波解の存在が示されている [3, 5]。単調でない進行波解が現れる理由は次のことから容易に想像できるだろう。拡散項がない場合の方程式を考える。

$$u' = \gamma u(1 - u(t - \tau)), \quad t > 0$$

\*宮崎市学園木花台西 1-1, Email: izuhara@cc.miyazaki-u.ac.jp

†堺市中区学園町 1-1, Email: monobe@omu.ac.jp

‡Hsinchu 30010, Taiwan

§Hsinchu 30010, Taiwan, Email: changhong@math.nctu.edu.tw

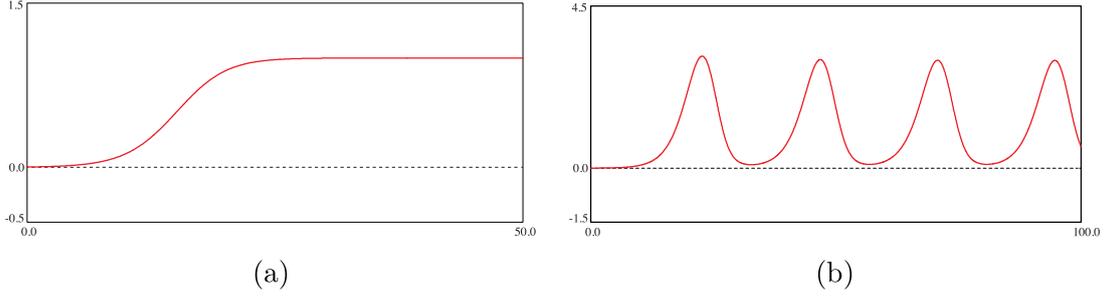


図 1: 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解のプロファイル. (a), (b) ともにパラメータは  $d = \gamma = 1$ ,  $c = 3.0$  であり,  $\tau$  のみを変えている. (a)  $\tau = 0.3$ . (b)  $\tau = 2.0$ .

この方程式はロジスティック方程式に遅延が含まれたものであり, Hutchinson 方程式とも呼ばれる. この方程式には, 平衡点  $u = 1$  が存在し, その点で線形化し, 線形安定性解析をすることによって次のことがわかる.

平衡点  $u = 1$  は

- $\tau < \pi/(2\gamma)$  のとき漸近安定
- $\tau > \pi/(2\gamma)$  のとき不安定であり, 周期解が現れる.

このことから, 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解を考えたとき,  $\tau$  が大きいとき  $u = 1$  の近くで振動するような進行波解が示唆される. 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解の理論的な結果として, 進行波解が速度  $c \geq c^*$  に対して存在することが部分的に示されている. 図 1(b) は,  $u = 1$  の近くで大きく振動している進行波解のプロファイルの例である. これらのことから, 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解は遅延を含まないものよりも多彩になっていることがわかるだろう.

本研究では, 上記のような  $\mathbb{R}$  全体で定義される進行波解とは異なるタイプの進行波解を考える. つまり, 動座標  $\xi := x + ct$  を導入した (1) に対し, 次の形の解  $u(x, t) = U(\xi)$  を考える.

$$U(\xi) \begin{cases} = 0 & \xi \leq 0 \\ > 0 & \xi > 0 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad U(\xi) \text{ は有界.}$$

このような半直線  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$  で定義された進行波解については, Du と Lin によって遅延のない Fisher-KPP 方程式で議論されており, そこでは semi-wave 解と名付けられている [2]. 本研究は, 遅延バージョンの Fisher-KPP 方程式の semi-wave 解の探索とみなすこともできる. 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の semi-wave 解についてももう少し細かく分類する.

**定義 1.**  $U \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$  が

$$\begin{cases} cU'(\xi) = dU''(\xi) + \gamma U(\xi)[1 - U(\xi - c\tau)] & \xi > 0 \\ U(\xi) = 0 & \xi \leq 0 \\ U(\xi) > 0 & \xi > 0 \\ 0 < \liminf_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi) \leq \limsup_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi) < \infty \end{cases} \quad (2)$$

をみたすならば,  $U(\xi)$  を速度  $c$  をもつ semi-wave 解と呼ぶ. さらに,  $U \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$  が (2) をみたし, かつ  $U(+\infty)$  が存在し, 正值であるならば,  $U(\xi)$  を速度  $c$  をもつ semi-wavefront 解と呼ぶ. ただし,  $U'(0)$  (resp.  $U''(0)$ ) は  $U$  の  $\xi = 0$  での右微分 (resp. 右 2 階微分) である.

この定義より, Hutchinson 方程式の  $u = 1$  での振る舞いを考慮すると, semi-wavefront 解はさらに 2 つの場合に分けることができ, 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の semi-wave 解は次の 3 種類に分類される:

- (A)  $U' > 0$  かつ  $U(+\infty) = 1$  をみたす単調な semi-wavefront 解
- (B)  $U'$  は符号を変え, かつ  $U(+\infty) = 1$  をみたす非単調な semi-wavefront 解
- (C)  $U'$  は符号を変え, かつ  $U(+\infty)$  が存在しない非単調な semi-wave 解

図 2 はこの 3 種類の分類に対応する semi-wave 解のプロファイルを示している. 図 2 ではいずれのプロファイルも  $\xi \geq 0$  のみを描いており, 省略しているが,  $\xi < 0$  では  $U(\xi) = 0$  である.

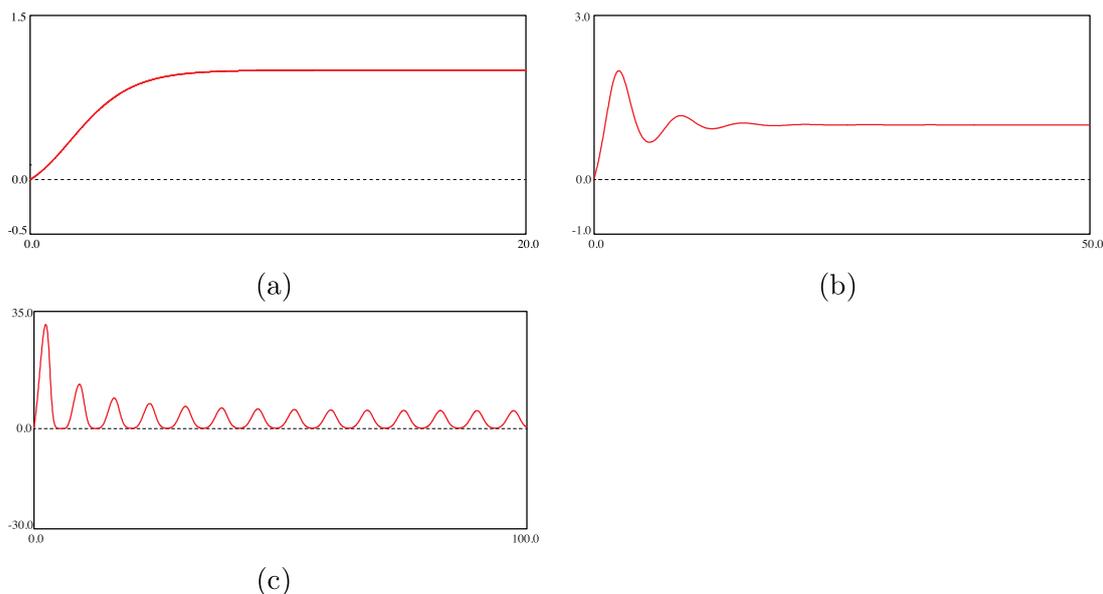


図 2: 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の semi-wave 解のプロファイル. (a), (b), (c) ともにパラメータは  $d = \gamma = 1$ ,  $c = 1.0$  であり,  $\tau$  のみを変えている. (a)  $\tau = 0.4$  のときの単調な semi-wave 解. (b)  $\tau = 2.0$  のときの非単調な semi-wavefront 解. (c)  $\tau = 3.0$  のときの非単調な semi-wave 解.

次の節では, 理論解析によって単調な semi-wavefront 解の存在について得られた結果を紹介する. 第 3 節では, 数値計算で得られた上記で分類した (A), (B), (C) 3 種類の semi-wave 解の存在範囲を紹介する.

## 2 単調な semi-wavefront 解の存在・非存在

本節では、理論解析によって得られた単調な semi-wavefront 解の存在・非存在の結果について簡潔に述べる。

$\eta \geq \gamma$  に対し、関数  $Q(\eta)$  を  $Q(\eta) := \frac{1}{\eta} \log\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)$  とし、 $\hat{\tau}(c)$  を

$$\hat{\tau}(c) = \frac{1}{c} \left[ \sup_{\eta \geq \max\{\gamma, \frac{1}{d}\}} Q(\eta) \right]$$

で定義する。  $Q(\eta)$  のグラフの形状より、 $\hat{\tau}(c)$  を次のように表現することも可能である。

$$\hat{\tau}(c) := \begin{cases} \frac{1}{c\gamma e} & \gamma e \geq \frac{1}{d} \text{ のとき} \\ \frac{d}{c} \log\left(\frac{1}{d\gamma}\right) & \gamma e < \frac{1}{d} \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし、 $\hat{\tau}(0) := \infty$  と定義する。

また、関数  $F(\sigma)$  を

$$F(\sigma) := (2d\sigma^2 + c\sigma)(1 - \tanh(\sigma c \hat{\tau}(c))), \quad \sigma \geq 0$$

とし、次の仮定をおく。

(M)  $\max_{\sigma \geq 0} F(\sigma) \geq \gamma$

仮定 (M) は、後ほど説明する単調な semi-wavefront 解の存在証明で必要となるテクニカルな仮定である。(M) をみたすパラメータの集合が空ではないことは簡単な計算からわかる。実際、例えば  $d = \gamma = 1$  のとき、 $c$  の値によらず  $F(\sigma) > 1$  となる  $\sigma$  の存在が計算によりわかる。

以下が理論的な解析の主結果である。

**定理 1.**  $c \geq 0$  を定数とする。このとき、

- (i)  $c \geq 2\sqrt{d\gamma}$  ならば、任意の  $\tau \geq 0$  に対して、(2) は解をもたない。
- (ii)  $c < 2\sqrt{d\gamma}$  ならば、 $\tau \in [0, \hat{\tau}(c)]$  かつ (M) が成り立つとき、(2) は単調な semi-wavefront 解をもつ。

上の定理を  $d = \gamma = 1$  のときに制限すると、結果がもう少しわかりやすくなる。

**系 1.**  $d = \gamma = 1$ ,  $c \geq 0$  とする。このとき、

- (i)  $c \geq 2$  ならば、任意の  $\tau \geq 0$  に対して、(2) は解をもたない。
- (ii)  $c < 2$  ならば、 $0 \leq \tau \leq \frac{1}{ce}$  とき、(2) は単調な semi-wavefront 解をもつ。

これらの結果から、Fisher-KPP 方程式の最小速度  $c^*$  よりも速度が大きいとき、どのような時間遅れ  $\tau$  に対しても semi-wave 解は存在せず、一方、 $c^*$  よりも速度が小さいとき、時間遅れ  $\tau$  が十分小さければ単調な semi-wavefront 解が存在することが理論的に示された。

## 2.1 定理の証明の概略

このサブセクションでは、定理 1 の証明の概要について簡潔に述べる。定理 1 の (i) については背理法で比較的簡単に示せるため、主に (ii) について述べる。なお、証明の詳細については [6] を参照のこと。

次の問題 **(P)** を考える。

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} cU'(\xi) = dU''(\xi) + \gamma U(\xi)[1 - U(\xi - c\tau)], & \xi \geq 0 \\ U \text{ は } \xi \geq 0 \text{ において有界} \\ U(\xi) = 0, & \xi \leq 0 \end{cases}$$

ここで、 $U'(0)$  は  $U$  の  $\xi = 0$  での右微分を意味するものとする。

**定義 2.**  $\bar{U}$  と  $\underline{U}$  はそれぞれ  $\mathbb{R}_+$  において有界な連続関数であり、有限個の点  $s_1, s_2, \dots, s_m$  を除いて  $\mathbb{R}_+$  において連続な第 2 次導関数をもつとする。さらに次の 2 つが成り立つ:

(i)  $\bar{U}$  と  $\underline{U}$  は以下の不等式をみたす:

$$\begin{cases} d\bar{U}''(\xi) - c\bar{U}'(\xi) + \gamma\bar{U}(\xi)[1 - \bar{U}(\xi - c\tau)] \leq 0, & \xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{s_i > 0 \mid i = 1, 2, \dots, m\}, \\ \bar{U}(\xi) = 0, & \xi \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\underline{U}''(\xi) - c\underline{U}'(\xi) + \gamma\underline{U}(\xi)[1 - \underline{U}(\xi - c\tau)] \geq 0, & \xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{s_i > 0 \mid i = 1, 2, \dots, m\}, \\ \underline{U}(\xi) = 0, & \xi \leq 0 \end{cases}$$

(ii)  $i = 1, 2, \dots, m$  に対し、 $\underline{U}'(s_i^-) \leq \underline{U}'(s_i^+)$  かつ  $\bar{U}'(s_i^+) \leq \bar{U}'(s_i^-)$

これらをみたす  $\bar{U}$  と  $\underline{U}$  をそれぞれ問題 **(P)** の upper 解, lower 解と呼ぶ。

細かいことは省くが、おおまかには次の命題が成り立つ。

**命題 1.** 問題 **(P)** は upper 解  $\bar{U}$  と lower 解  $\underline{U}$  をもち、ある  $M \geq 1$  に対し、

$$0 \leq (\neq) \underline{U}(\xi) \leq \bar{U}(\xi) \leq M, \quad \xi \geq 0$$

をみたすとする。このとき、問題 **(P)** は  $\xi > 0$  において正となる解  $U$  をもつ。

命題 1 によって、結局は upper 解  $\bar{U}$  と lower 解  $\underline{U}$  を構成することに帰着される。具体的には、upper 解  $\bar{U}$  を

$$\bar{U}(\xi) = \begin{cases} \tanh(\sigma_0 \xi) & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

とする。ここで、 $\sigma_0 > 0$  は  $F(\sigma_0) = \max_{\sigma \geq 0} F(\sigma)$  をみたすものである。詳細は述べないが、この upper 解の構成において先の仮定 **(M)** を使う。また、lower 解  $\underline{U}$  として

$$\underline{U}(\xi) = \begin{cases} \delta e^{a\xi} \sin(b_\epsilon \xi), & 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ 0, & \xi \geq \xi_1, \end{cases}$$

とする。ここで、 $\xi_1 = \pi/b_\epsilon$ ,  $a = \frac{c}{2d}$ ,  $b_\epsilon = \frac{\sqrt{4d(\gamma-\epsilon)-c^2}}{2d}$  であり、 $\epsilon$  と  $\delta$  は適当に選ぶ正の定数である。これらの upper 解  $\bar{U}$  と lower 解  $\underline{U}$  の構成によって、それらの間に semi-wavefront 解が存在することを示すことができる。

ここでは証明の概略のみを述べたが、詳細については [6] を参照されたい。また、ここで使った手法は遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解の存在証明において [9, 8] などによって発展されてきたものである。ℝ 全体で定義された進行波解の証明を、半直線  $\mathbb{R}_+$  で定義された semi-wave 解に適用するために幾つかの修正を加えている。

また、本研究では単調な semi-wavefront 解の存在・非存在に対して証明を与えたが、これは第 1 節で述べた 3 種類に分類される semi-wave 解のうちの『(A)  $U' > 0$  かつ  $U(+\infty) = 1$  をみたす単調な semi-wavefront 解』の部分的な解明となっている。ここでの証明ではテクニカルな仮定 (M) を課しており、単調な semi-wavefront 解の全容はまだ完全には解明されていない。更なる研究が期待される。また、『(B)  $U'$  は符号を変え、かつ  $U(+\infty) = 1$  をみたす非単調な semi-wavefront 解』や『(C)  $U'$  は符号を変え、かつ  $U(+\infty)$  が存在しない非単調な semi-wave 解』に関する理論的な結果はまだない。この難しさは upper 解  $\bar{U}$  の構成にある。非単調な semi-wavefront 解や非単調な semi-wave 解の存在証明には別の手法を用いる必要があることも考えられる。

次の第 3 節では、数値計算を用いて、3 種類の単調・非単調な semi-wave 解の存在範囲について考えてみたい。

### 3 数値計算

第 1 節の (A), (B), (C) の 3 種類に分類される semi-wave 解の違いは、 $\xi \rightarrow \infty$  における  $U(\xi)$  の振る舞いが由来である。このことを  $U = 1$  での線形化方程式から調べてみよう。詳細は [1, 5, 6] を参照のこと。

(2) の動座標系の方程式において、 $U(\xi) = 1 + W(\xi)$  を代入し、2 次以上の項を無視すると次の線形化方程式が得られる。

$$cW'(\xi) = dW''(\xi) - \gamma W(\xi - c\tau)$$

$U = 1$  での線形安定性を調べたいので、 $W = e^{\lambda\xi}$  を上記の線形化方程式に代入すると、特性方程式

$$d\lambda^2 - c\lambda - \gamma e^{-c\tau\lambda} = 0$$

を得る。ここで、

$$P(\lambda; \tau) := d\lambda^2 - c\lambda - \gamma e^{-c\tau\lambda} \quad Q(\lambda) := d\lambda^2 - c\lambda \quad R(\lambda; \tau) := \gamma e^{-c\tau\lambda}$$

を導入する。  $P(\lambda; \tau) = 0$  をみたす  $\lambda$  は、2 つのグラフ  $y = Q(\lambda)$  と  $y = R(\lambda; \tau)$  の交点に対応する。グラフを用いて解析することによって、固有値  $\lambda$  は図 3 のような 3 つの特徴的な状況に分けることができる。ここで、赤い曲線は  $y = Q(\lambda)$  を、青い曲線は  $y = R(\lambda; \tau)$  を表している。  $\tau$  が変化すると、  $y = R(\lambda; \tau)$  のグラフのみが変化する。図 3 (a) は、  $\tau$  がある程度小さいときの 2 つのグラフの状況である。  $y = Q(\lambda)$  と  $y = R(\lambda; \tau)$  が 3 つの異なる点で交わり、このときの固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  とするといずれも実数となる。  $\tau$  を大きくしていくと、第 2 象限において  $y = R(\lambda; \tau)$  のグラフが次第に  $y$  方向に上がっていき、  $\lambda_2$  と  $\lambda_3$  が近づく。そして、ある  $\tau = \tau^*$  で、図 3 (b) のように  $\lambda_2 = \lambda_3$  となる。この  $\tau = \tau^*$  を境に  $\lambda_2$  と  $\lambda_3$  は共役複素数となるが、実部は負のままである。  $\tau$  をさらに大きくしていくと、  $\tau = \tau^{**}$  で、共役複素数  $\lambda_2, \lambda_3$  はともに虚軸を渡る (図 3 (c))。これ以降では共役複素数  $\lambda_2$  と  $\lambda_3$  の実部は正となる。

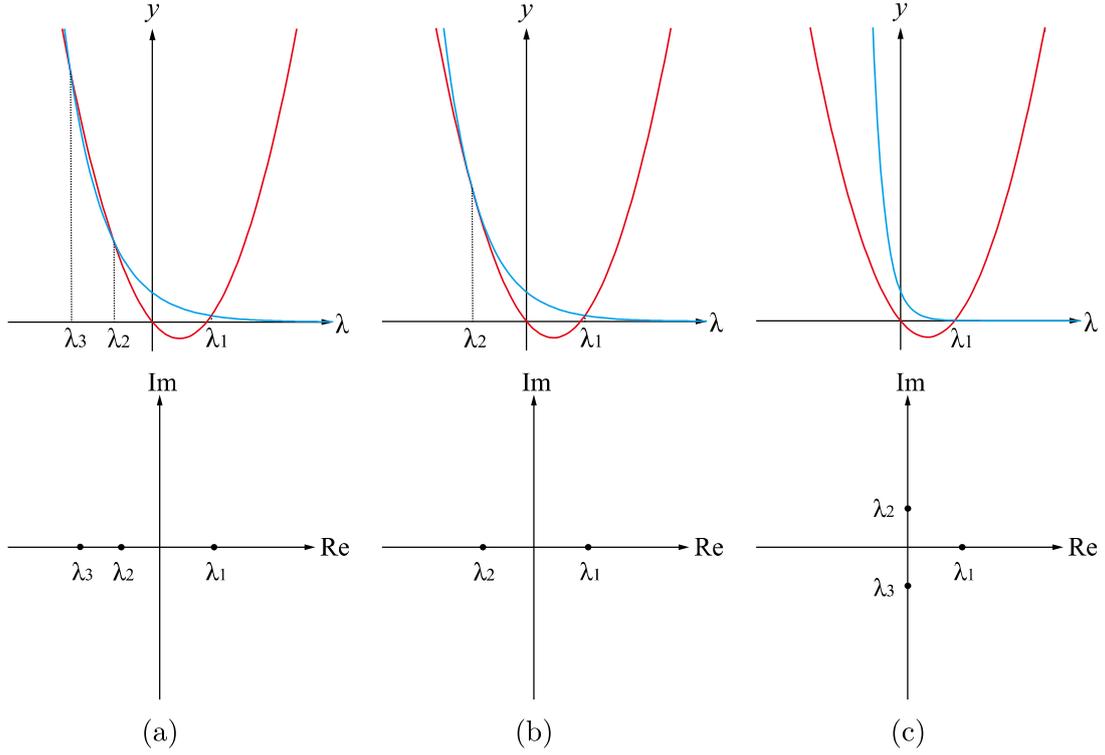


図 3: 3 種類の固有値の分布. (a) 2 つのグラフが異なる 3 点で交わる時. (b) 2 つのグラフが接するとき ( $\lambda_2 = \lambda_3$ ). (c)  $\lambda_2$  と  $\lambda_3$  は共役な純虚数.

これらのことから、固有値の分布が図 3 (a) のようなときは、単調な semi-wavefront 解 (図 2 (a)) になり、図 3 (b) のような状況を境に非単調な semi-wavefront 解 (図 2 (b)) へと変化し、さらに共役な複素固有値が虚軸を渡ると (図 3 (c)), 非単調な semi-wave 解 (図 2 (c)) へと遷移することが予想される. もちろんこの安定性解析は  $U = 1$  近傍のダイナミクスしか扱っていないので、この議論から semi-wave 解全体のプロファイルまで説明できるわけではないが、分類に対する示唆を与えるものであろう. 図 3 (b) と図 3 (c) が起こるパラメータの関係式は具体的に得ることができる. 実際、パラメータが

$$\frac{-2d - \sqrt{4d^2 + c^4\tau^2}}{c\tau} + \gamma c\tau e^{-\frac{c^2\tau - 2d - \sqrt{4d^2 + c^4\tau^2}}{2d}} = 0$$

をみたすとき、図 3 (b) のような 2 つのグラフが接するような状況となり、

$$\tau = \frac{\sqrt{2d}}{c\sqrt{-c^2 + \sqrt{c^4 + 4d\gamma^2}}} \cos^{-1} \left( \frac{c^2 - \sqrt{c^4 + 4d\gamma^2}}{2\gamma} \right)$$

をみたすとき、図 3 (c) のような共役な純虚数が現れる. 後ほどの議論のために、 $(c, \tau)$  平面でのこれらの曲線を次のように定義する.

$$\Gamma_1 := \left\{ (c, \tau) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \frac{-2d - \sqrt{4d^2 + c^4\tau^2}}{c\tau} + \gamma c\tau e^{-\frac{c^2\tau - 2d - \sqrt{4d^2 + c^4\tau^2}}{2d}} = 0 \right\}$$

$$\Gamma_2 := \left\{ (c, \tau) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \tau = \frac{\sqrt{2d}}{c\sqrt{-c^2 + \sqrt{c^4 + 4d\gamma^2}}} \cos^{-1} \left( \frac{c^2 - \sqrt{c^4 + 4d\gamma^2}}{2\gamma} \right) \right\}$$

以上のことに基づいて、単調・非単調な semi-wave 解や進行波解の存在範囲がどのようになっているのかを数値計算を用いて明らかにする。そのため、ここではパラメータを

$$d = \gamma = 1$$

の場合に制限する。このとき進行波解の最小速度は  $c = 2$  である。

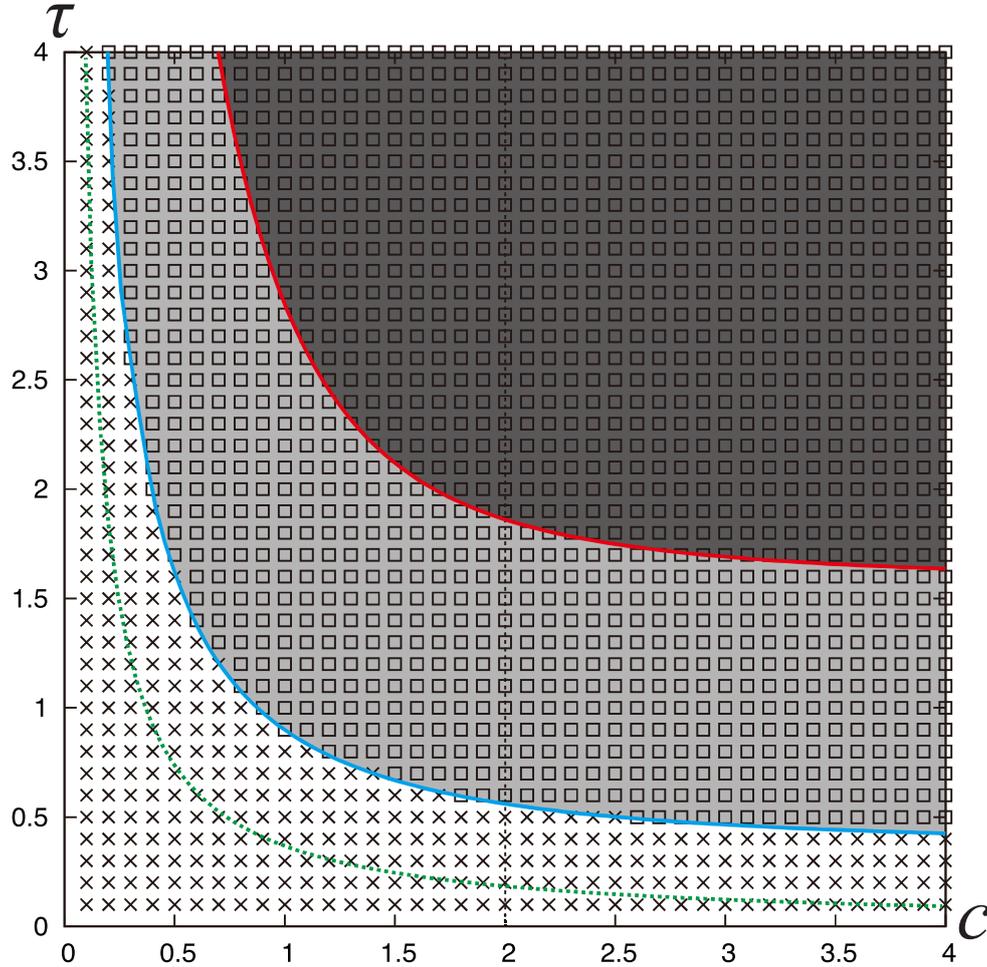


図 4:  $d = \gamma = 1$  のときの semi-wave 解や進行波解の相図。横軸が速度  $c$ 、縦軸が時間遅れ  $\tau$  である。× の印は単調な semi-wavefront 解や進行波解が観察された点、□ の印は非単調な semi-wave 解や進行波解が観察された点を表している。青い曲線は  $\Gamma_1$  を、赤い曲線は  $\Gamma_2$  を表している。  $c < 2$  は semi-wave 解の領域、  $c \geq 2$  は進行波解の領域である。

図 4 は semi-wave 解と進行波解の  $(c, \tau)$  平面における相図を表している。図中の  $c < 2$  における × は単調な semi-wave 解が観察された点を、  $c \geq 2$  における × は単調な進行波解が観察された点を表している。一方、  $c < 2$  における □ は非単調な semi-wave 解が、  $c \geq 2$  における □ は非単調な進行波解がそれぞれ観察された点を表している。  $c = 2$  を境に進行波解と semi-wave 解が切り替わっている。また、図中の青い曲線は  $U = 1$  の近くの挙動が減衰振動を始める  $\Gamma_1$  を描いており、数値計算の結果である × と □ の境界となっていることがわかる。このことから、非単調な semi-wavefront 解や進行波解が出現することと  $U = 1$  の近

くで減衰振動することには関係があることが示唆される。また、図 4 の赤い曲線は  $\Gamma_2$  を表している。この曲線よりも上の領域 (濃い灰色の領域) において、 $U = 1$  の近くで減衰しない振動が続くような非単調な semi-wave 解や進行波解が観察されることが期待される。これを確かめるため、 $c = 1.0$  と固定し、 $\tau$  を変化したときの semi-wave 解のプロファイルを表したものが図 5 である。 $\tau = 0.4$  のときは単調な semi-wavefront 解、 $\tau = 1.2$  と  $\tau = 2.0$  の

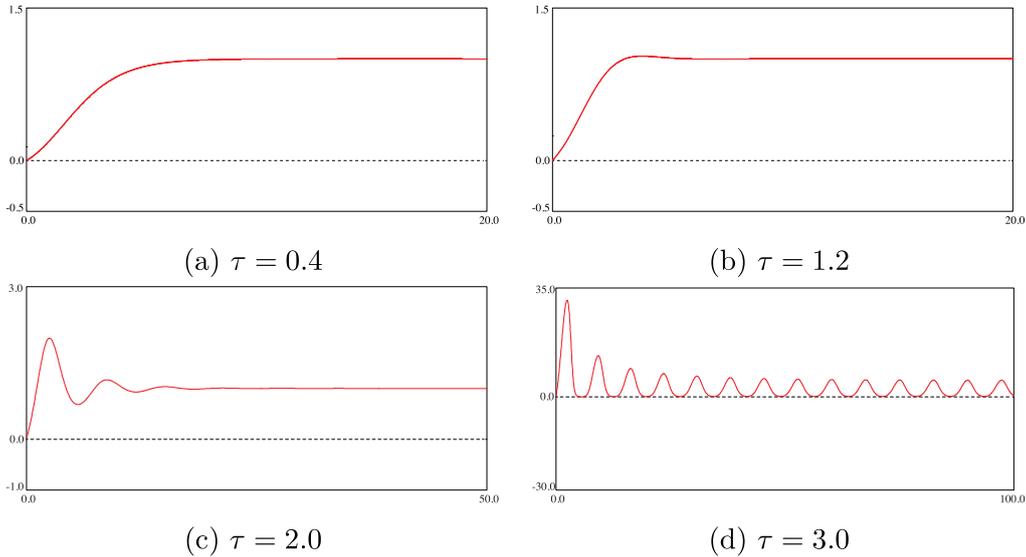


図 5:  $c = 1.0$  のときの semi-wave 解のプロファイル。 $\tau$  の値は各図の下に記載。

ときは非単調な semi-wavefront 解、 $\tau = 3.0$  のときは  $\xi$  が無限大で減衰振動しない非単調な semi-wave 解がそれぞれ得られた。また、 $\tau = 2.0$  と固定し、 $c$  を変化したときの semi-wave

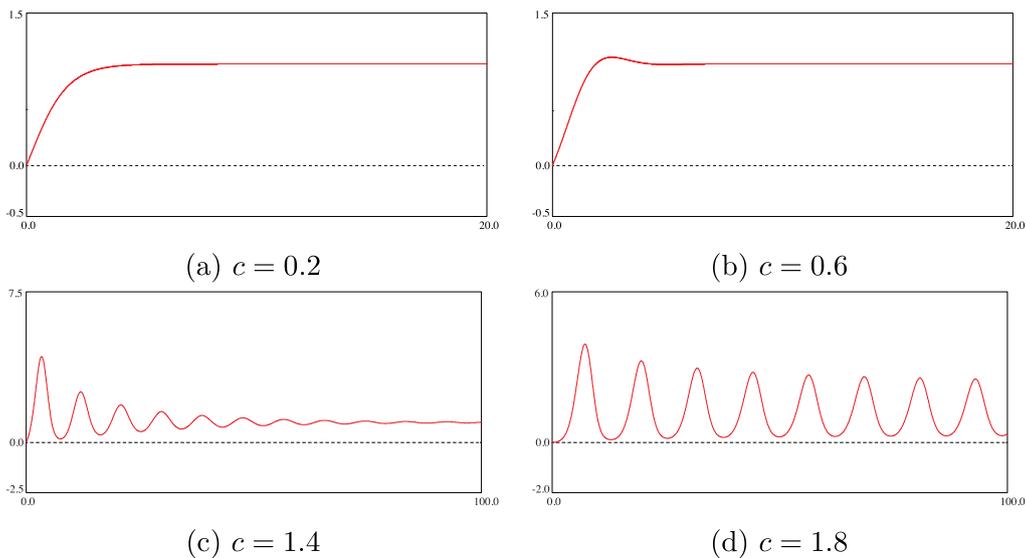


図 6:  $\tau = 2.0$  のときの semi-wave 解のプロファイル。 $c$  の値は各図の下に記載。

解のプロファイルを表したものが図 6 である。 $c = 0.2$  のときは単調な semi-wavefront 解、

$c = 0.6$  と  $c = 1.4$  のときは非単調な semi-wavefront 解,  $c = 1.8$  のときは  $\xi$  が無限大で減衰振動しない非単調な semi-wave 解がそれぞれ得られた.

$U = 1$  の周りでの線形安定性解析と数値計算の結果を合わせると,  $c < 2$  のとき, 図 4 の白い領域は (A) に対応する semi-wavefront 解が観察される領域, 薄い灰色の領域は (B) に対応する semi-wavefront 解が観察される領域, そして濃い灰色の領域は (C) に対応する semi-wave 解が観察される領域に分類されることが示唆される. さらに, 図 4 の緑の波線より下の領域は, 系 1 により単調な semi-wavefront 解の存在が示すことができた領域である.

$c \geq 2$  の領域においても  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  を境に進行波解のプロファイルが変わることが図 7 から示唆される. 図 7 では,  $c = 3.0$  と固定し,  $\tau$  を変化したときの進行波解のプロファイルを

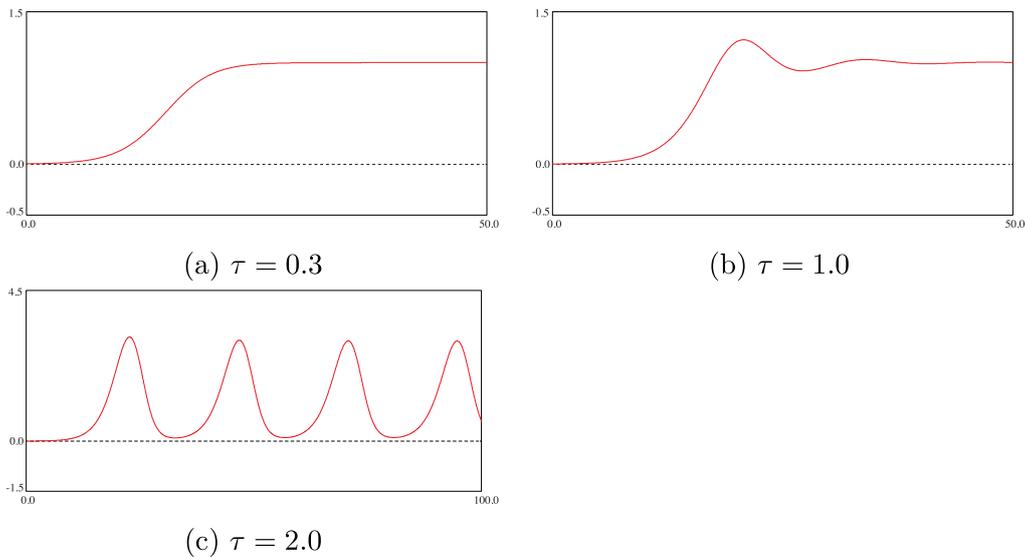


図 7:  $c = 3.0$  のときの進行波解のプロファイル.  $\tau$  の値は各図の下に記載.

示している.  $\tau = 0.3$  のときは単調な進行波解,  $\tau = 1.0$  のときは  $\xi$  が無限大で  $U = 1$  に収束する非単調な進行波解,  $\tau = 2.0$  のときは  $\xi$  が無限大で振動し続ける非単調な進行波解がそれぞれ観察される.

## 4 おわりに

本研究では, (1) のタイプの遅延を含む Fisher-KPP 方程式の semi-wave 解について考察してきた. 理論的な解析では, パラメータに制限はあるが, 単調な semi-wavefront 解の存在に関する結果を得た. 図 4 も合わせて考えると, 単調な semi-wavefront 解の存在範囲はさらに広いことが示唆される. また, 得られた結果にはテクニカルな仮定 (M) が課されている. 特に, upper 解を改良することによってさらに良い結果が得られる可能性もあり, そのような研究の方向性も考えられるだろう. また, 本研究では単調な semi-wavefront 解の存在についての結果を与えたが, 非単調な semi-wavefront 解の存在などについてはまだ未解明である. 進行波解に比べて, semi-wave 解については多くのことがまだわかっていない.

## 参考文献

- [1] P. Ashwin, M. Bartuccelli, T. Bridges & S. Gourley, Traveling fronts for the KPP equation with patio-temporal delay, *Z. Angew. Math. Phys.*, **53** (2002) 103–122.
- [2] Y. Du & Z. G. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, *SIAM J. Math. Anal.*, **42** (2010) 377–405.
- [3] A. Ducrot and G. Nadin, Asymptotic behaviour of travelling waves for the delayed Fisher-KPP equation, *J. Differential Equations*, **256** (2014) 3115–3140.
- [4] R. A. Fisher, The wave of advance of advantage genes, *Ann. Eugenics*, **7** (1937) 335–369.
- [5] K. Hasik & S. Trofimchuk, Slowly oscillating wavefronts of the KPP-Fisher delayed equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst. A*, **34** (2014) 3511–3533.
- [6] H. Izuhara, H. Monobe, Y.-J. Syu & C.-H. Wu, Semi-waves for delayed Fisher-KPP equations without quasimonotonicity, submitted.
- [7] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky & N. S. Piskunov, Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biological problem., *Bull. Univ. Etat. Moscow Ser. Internat. Math. Mec. Sect. A*, **1** (1937) 1–29.
- [8] S. Ma, Traveling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem, *J. Differential Equations*, **171** (2001) 294–314.
- [9] J. Wu & X. Zou, Traveling wave fronts of reaction diffusion systems with delay, *J. Dynam. Differential Equations*, **13** (2001) 651–687.
- [10] X. Zou & J. Wu, Existence of traveling wavefronts in delayed reaction-diffusion system via monotone iteration method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997) 2589–2598.