

特殊な微分方程式の共振を引き起こす解と Lambert 関数の関係

大平健太
名古屋大学大学院情報学研究科

2025年3月21日

当初, 上記題目に基づいて発表を行う予定であったが, 研究の進展に伴い新たな発見および方向性が見出されたため, 発表内容を変更した. 本稿では, その内容を報告する. なお, より詳しい内容については下記論文に記載している.

K. Ohira, “An exact solution for a non-autonomous delay differential equations,” arXiv:2411.11402 (2024).

主結果 遅延微分方程式 (以下 DDE)

$$\frac{dX(t)}{dt} + atX(t) = bX(t - \tau) \quad t \in \mathbb{R}, \quad a, b, \tau \in \mathbb{R} \quad (1)$$

の $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\tau \neq 0$ における一般解は次で表せる.

$$X(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n e^{-\frac{1}{2}a(t-n\tau)^2} \quad (2)$$

非自励系の遅延微分方程式において, このように解が得られるのは初めてなのではないかと考えている.

主結果の導出 この DDE の解は $a > 0$, $\tau \neq 0$ で $|t| \rightarrow \infty$ で 0 に収束するため, $t \in \mathbb{R}$ でフーリエ変換可能である. よって, このパラメータ範囲でフーリエ変換及び逆変換をすれば, 以下の一般解の積分形を得ることができる,

$$X(t) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2a}\omega^2 + \frac{b}{a\tau}e^{-i\tau\omega} + it\omega\right] d\omega \quad (3)$$

さらにこれを変形すると以下となる.

$$X(t) = \frac{C\sqrt{a}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}at^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}s^2 + \frac{b}{a\tau}e^{a\tau t - i\sqrt{a\tau}s}\right] ds \quad (4)$$

積分形のまま計算を進めることは難しいが、この結果より、解 $X(t)$ は次の形であると予想できる。ここで $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は解析関数。

$$X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} f(e^{at}) \quad (5)$$

これを元の DDE に代入すれば、 f は以下を満たす。

$$f'(e^{at}) = \frac{b}{a\tau} e^{-\frac{1}{2}a\tau^2} f(e^{a\tau(t-\tau)}) \quad (6)$$

したがって $\alpha = e^{-a\tau^2}$, $\beta = \frac{b}{a\tau} e^{-\frac{1}{2}a\tau^2}$ とすれば、 f は $x \in \mathbb{R}$ について次の微分方程式を満たす。

$$f'(x) = \beta f(\alpha x) \quad (7)$$

この $f(x)$ は初等関数では表せないが、この式を用いて $f^{(n)}(0)$ を求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \beta f(\alpha x), & f'(0) &= \beta f(0) \\ f''(x) &= \alpha\beta f'(\alpha x) = \alpha\beta^2 f(\alpha^2 x), & f''(0) &= \alpha\beta^2 f(0) \\ f^{(3)}(x) &= \alpha^2\beta f''(\alpha x) = \alpha^3\beta^3 f(\alpha^3 x), & f^{(3)}(0) &= \alpha^3\beta^3 f(0) \\ f^{(4)}(x) &= \alpha^3\beta f^{(3)}(\alpha x) = \alpha^6\beta^4 f(\alpha^4 x), & f^{(4)}(0) &= \alpha^6\beta^4 f(0) \\ &\dots & & \\ &\dots & & \\ f^{(n)}(x) &= \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} \beta^n f(\alpha^n x), & f^{(n)}(0) &= \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} \beta^n f(0) \end{aligned} \quad (8)$$

したがって、任意定数 $C = f(0)$ として α, β の値を代入して整理すれば、 $f(x)$ は以下のように $x = 0$ でテイラー展開できる。

$$f(x) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n (e^{-\frac{1}{2}a\tau^2})^{n^2} (x)^n \quad (9)$$

この級数の収束性はコーシー・アダマールの定理により示される。この級数の係数を γ_n 収束半径を r とすれば以下を得る。

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\gamma_n|}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \left|\frac{b}{a\tau}\right| (e^{-\frac{1}{2}a\tau^2})^n}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } a \leq 0 \text{ or } \tau = 0 \\ \infty & \text{if } a > 0 \text{ and } \tau \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

よってこの級数は、 $a \leq 0$ または $\tau = 0$ では任意の $x \in \mathbb{R}$ について発散し、 $a > 0$ かつ $\tau \neq 0$ では任意の $x \in \mathbb{R}$ について収束する。すなわち f は、このパラメータの範囲でのみ定義される。

以上から $a > 0$ かつ $\tau \neq 0$ の時、この $X(t)$ は以下となる。

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-\frac{1}{2}at^2} f(e^{a\tau t}) \\ &= C e^{-\frac{1}{2}at^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n (e^{-\frac{1}{2}a\tau^2})^{n^2} (e^{a\tau t})^n \end{aligned} \quad (11)$$

これをさらに整理すると以下となる。これは $n = 0, 1, 2, \dots$ について、中心 $t = n\tau$ で値 $\frac{C}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n$ をとるガウシアンを重ね合わせである。

$$X(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n e^{-\frac{1}{2}a(t-n\tau)^2} \quad (12)$$

実際に、この $X(t)$ は元の DDE を満たすため、これは DDE の $a > 0$, $\tau \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$ における一般解となっている。解 $X(t)$ の時間軌道の例として、以下のグラフを載せる。

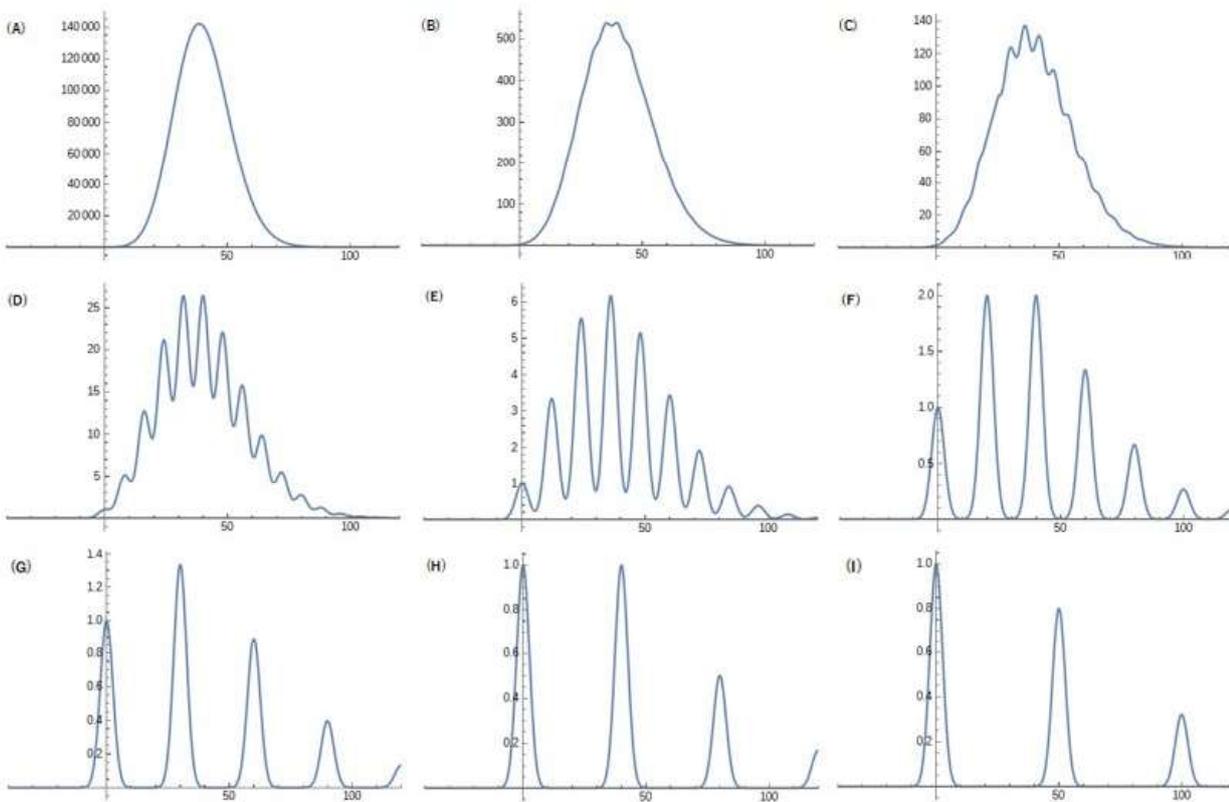


Figure 1: 級数解の $t - X(t)$ グラフで遅れ τ を変化させたもの. 任意定数は $C = 1$, パラメータは $a = 0.15, b = 6$ で, τ はそれぞれ (A)3, (B)5, (C)6, (D)8, (E)12, (F)20, (G)30, (H)40, (I)50. 級数は $n = 500$ まで和をとっている.

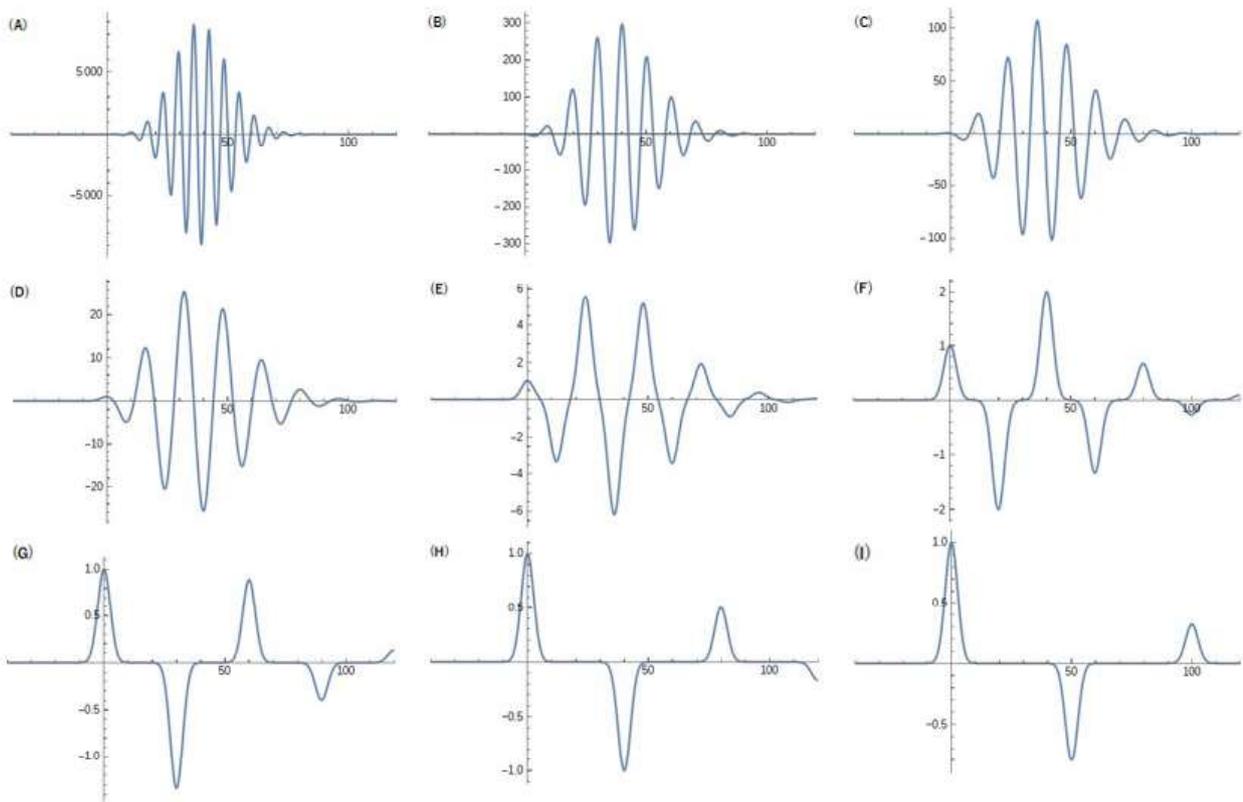


Figure 2: 級数解の $t - X(t)$ グラフで遅れ τ を変化させたもの. 任意定数は $C = 1$, パラメータは $a = 0.15, b = -6$ で, τ はそれぞれ (A)3, (B)5, (C)6, (D)8, (E)12, (F)20, (G)30, (H)40, (I)50. 級数は $n = 500$ まで和をとっている.

主結果から導かれる系 以降では $a > 0$ かつ $\tau \neq 0$ とする. DDE の級数解と解の積分形の関係として以下が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2a}\omega^2 + \frac{b}{a\tau}e^{-i\tau\omega} + it\omega\right]d\omega = \sqrt{2\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n e^{-\frac{1}{2}a(t-n\tau)^2} \quad (13)$$

以下の式で表される級数中のガウシアン $X_n(t)$ を独立に並べて出来た図形を囲む曲線 (t 軸は除く) を $G(t)$ とする. これはある程度大きい τ について, $G(t)$ は $X(t)$ の時間軌道の近似とできる. 以下のグラフにその近似性が表されている.

$$X_n(t) = \frac{C}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n e^{-\frac{1}{2}a(t-n\tau)^2} \quad (14)$$

Figure 3

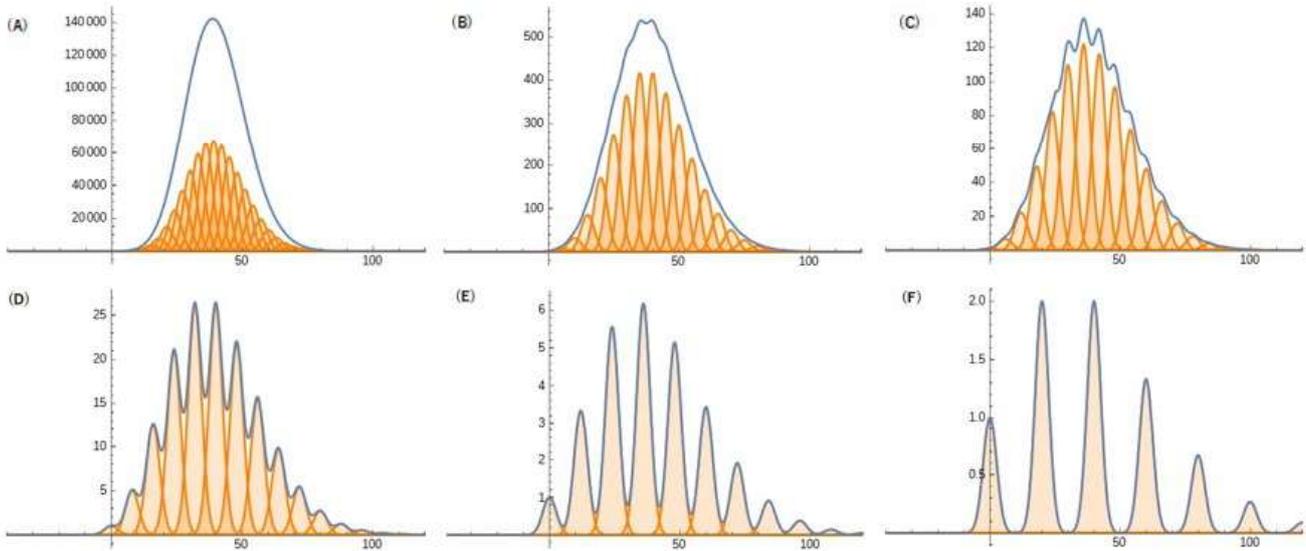
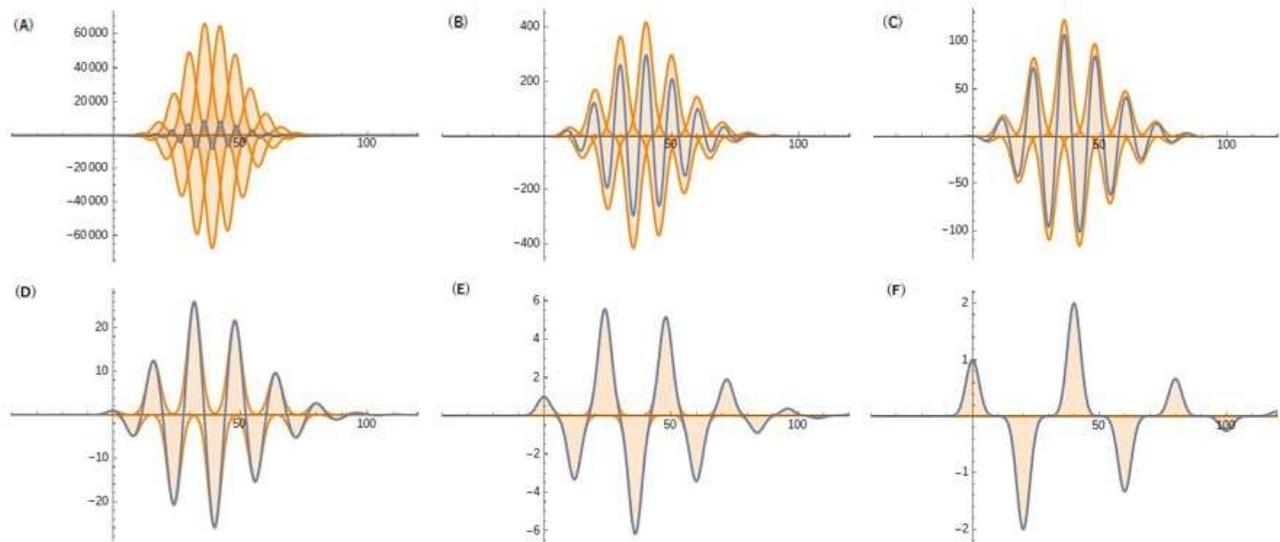


Figure 4



$X(t)$ (青) と $G(t)$ (オレンジ) の軌道. $G(t)$ は図形の周りの曲線で定義される. Figure 3 ではパラメータは $a = 0.15, b = 6$, Figure 4 では $a = 0.15, b = -6$ である. τ は共にそれぞれ (A)3, (B)5, (C)6, (D)8, (E)12, (F)20.

ガウシアン $X_n(n\tau) = \frac{C}{n!} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^n$ を $n = t/\tau$ として実数関数に拡張しそれを $E(t)$ とすれば, ある程度大きい τ では, $E(t)$ は $X(t)$ の波形の包絡線の近似とできる. ここで Γ はガンマ関数である. なお, $b/\tau = 0$ の場合は $X(t) = Ce^{-\frac{1}{2}at^2}$ より, $X_0(0) = C$ の 1 点のみとなるため除外する. 以下にグラフで表している.

$$E(t) = \begin{cases} \frac{C}{\Gamma(\frac{t}{\tau}+1)} \left(\frac{b}{a\tau}\right)^{\frac{t}{\tau}} & \text{if } b/\tau > 0 \\ \pm \frac{C}{\Gamma(\frac{t}{\tau}+1)} \left(-\frac{b}{a\tau}\right)^{\frac{t}{\tau}} & \text{if } b/\tau < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Figure 5

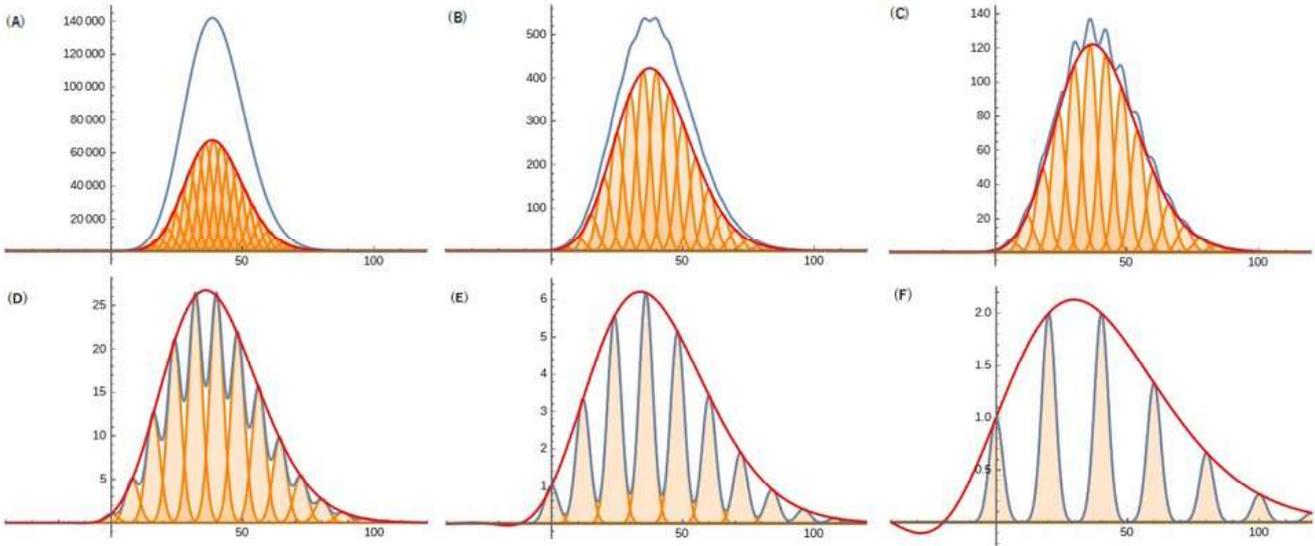
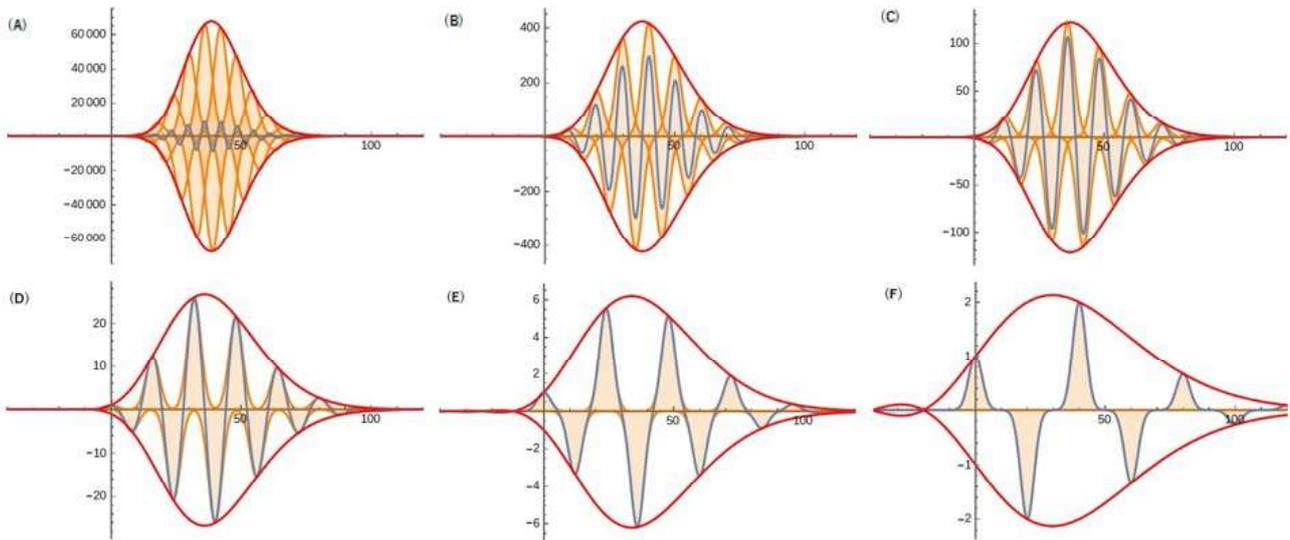


Figure 6



$X(t)$ (青), $G(t)$ (オレンジ) と $E(t)$ (赤) の軌道. Figure 5 ではパラメータは $a = 0.15, b = 6$, Figure 6 では $a = 0.15, b = -6$ である. τ は共にそれぞれ (A)3, (B)5, (C)6, (D)8, (E)12, (F)20.

今後の課題 課題としてはこの一般解の一意性である. 数値計算などもふくめて一意であると予想しているが, 厳密な証明には至っていない.