遅れのフィードバック制御を伴った離散線形周期系の安定領域 (II)
(Stability Regions of Discrete Linear Periodic Systems with Delayed Feedback Controls (II))

静岡大学　**申 正善 (Jong Son Shin)**
Graduate School of Enjineering Shizuoka University
shinjongson@jcom.home.ne.jp [1]

1 Introduction

本研究は前回 [8] の研究の続きである。前回では不安定なゼロ解を漸近安定化するための安定領域を考えたが今回は不安定なゼロ解を安定化するための安定領域を考える。今後、ゼロ解の安定 (または安定化) という場合は単なる安定で、漸近安定 (漸近安定化) ではないとする。考える方程式は前回と同様、離散線形周期系

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}, \tag{L}$$

である。ここで列ベクトル $x(\cdot)$ は d 次元複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^d$ に属し $A(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) は $d \times d$ 複素行列関数で周期 $\omega \in \mathbb{Z}_3^\infty$ である。ただし、$\mathbb{Z}_m^\infty = \{m, m+1, \cdots\}, m \in \mathbb{Z}$ である。$\omega = 2$ に対しては [4] の結果を用いれば良いがここでは扱わない。

離散線形系に対して一つの解が安定 (または漸近安定) であるとは他の異なる解の安定 (または漸近安定) と同値である。したがって方程式 (L) のゼロ解の安定は周期解の安定性に帰着される。そのためには周期解の存在、すなわち、方程式 (L) の特性乗数が 1 を持つことを前提にしなければならない。この前提の下で、ここでは方程式 (L) の不安定なゼロ解の安定化問題を扱う。

文献 [8] において方程式 (L) のゼロ解の安定領域を調べるため摂動 (制御) 項

$$K(y(n-\omega+1) - A(n)y(n))$$

(簡単に、DFC と呼ぶ) を付加した方程式 (参照 [1])

$$y(n+1) = A(n)y(n) + K(y(n-\omega+1) - A(n)y(n)), \tag{LF}$$

を考えた。ここで $d \times d$ 実行列 K はフィードバック ゲインと呼ばれている。漸近安定化に関する研究は文献 [6,10,11] を参照してください。[8] では特に、方程式 (L) と方程式 (LF) の特性乗数の関係を示す C-写像に基づき或る領域を決めた。その領域は安定領域といわれ方程式 (L) のすべての特性乗数がその領域の内部に属するならば、不安定なゼロ解を安定化させることを示した ([4,7,8] 参照)。

方程式 (L) が特性乗数 1 を持つことと方程式 (LF) が特性乗数 1 を持つことは同値である (補題 2.3 を見よ)。したがって方程式 (L) の不安定な ω-周期解を安定化するために方程式 (LF) の特性乗数 1 を考えなければならない。

---

[1] 共同研究者
ソウル大学、名誉教授, **金 道漢 (Dohan Kim)**, Department of Mathematics, Seoul National University, Korea, dhkim@snu.ac.kr
静岡大学、数理システム工学科, **宮崎 倫子**, Graduate School of Enjineering Shizuoka University, miyazaki.rinko@shizuoka.ac.jp

残念ながら方程式 (L) の特性乗数 1 は [8] で与えた安定領域の境界か外部に属するため [8, 定理 7] は適用できない。これを解決するために方程式 (LF) の特性乗数 1 のインデックスが 1 となる条件を見出すことが重要である。

本研究は次のように構成される。

2 節では本研究を行うための仮定及び幾つかの準備、特に、方程式 (LF) の特性乗数、C-map 定理について簡単に述べる。

3 節では方程式 (LF) の特性乗数 1 のインデックスが 1 となる条件をゲイン K と方程式 (L) の特性乗数 1 とその固有空間を用いて導く。

4 節では方程式 (LF) の ω-周期解が安定となる領域を決定する。

付録 I では定理 1 と命題 4.7 の証明を与える。

付録 II では仮定 (K) の中の条件 (K-3) を一般化する。

2 準備

この節では本研究を行うための幾つかの準備を行う。特に、方程式 (L) と方程式 (LF) の特性乗数の基礎的な性質、以後用いられる用語、記号及び仮定、さらに C-map 定理について述べる。

X をバナッハ空間空間とし有界線形作用素 $H : X \to X$ に対して $P_\sigma(H)$ は H の固有値の集合を表す。$\eta \in P_\sigma(H)$ に対して固有空間を $W_\eta(H) := \mathcal{N}(H - \eta I)$ と表す。ここで I は X 上の恒等写像、$\mathcal{N}(H) := \{x \in X \mid Hx = 0\}$ は H の null 空間である。

$X = \mathbb{C}^d$ ならば、H は行列でその固有値の集合を $\sigma(H)$ と表すならば $\sigma(H) = P_\sigma(H)$ である。$G_\eta(H)$ は固有値 $\eta \in \sigma(H)$ に対する一般固有空間を表し、それは

$$G_\eta(H) := \mathcal{N}((H - \eta E)^{h_\eta(H)})$$

と表される。ここで E は $d \times d$ 単位行列で $h_\eta(H)$ は $\eta \in \sigma(H)$ のインデックス (または ascent) である。

1) 初めに、方程式 (L) の特性乗数について述べる。任意の $m, n \in \mathbb{Z}, m \le n$ に対して $\mathbb{Z}_m^n = \{m, m+1, \dots, n\}$ と定める。次の仮定を置く

(A) すべての $n \in \mathbb{Z}_0^{\omega-1}$ 対して $A(n)$ は正則である。

この仮定の下で初期点 $(m, x^0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^d$ を通る方程式 (L) の一意的な解が存在しそれを $x(n; m, x^0)$ と表す。方程式 (L) の解作用素 $T(n, m)$ を $x(n; m, x^0) = T(n, m)x^0$ によって定める。$T(n) := T(n + \omega, n)$, $(n \in \mathbb{Z})$ と置き $T(0)$ を方程式 (L) の周期作用素と呼ぶ。このとき $T(0)$ は以下のように表現される。

$$T(0) = A(\omega - 1)A(\omega - 2) \cdots A(1)A(0) = \prod_{i=0}^{\omega-1} A(i). \tag{1}$$

さらに $\sigma(T(n)) = \sigma(T(0))$ で仮定 (A) により $T(0)$ は正則である。$\mu \in \sigma(T(0))$ を方程式 (L) の特性乗数という。

次の結果の証明は [2] から得られる。

補題 2.1. $x(n)$ は方程式 (L) の非自明解とする。このとき次の命題は同値である:

1) $\mu \in \sigma(T(0))$.

2) $x(n + \omega) = \mu x(n), \quad n \in \mathbb{Z}$.

3) $x(\omega) = \mu x(0)$.

4) $x(0) \in W_\mu(T(0))$.

$\sigma_S(T(0)) = \{\mu \in \sigma(T(0)) \mid |\mu| < 1\}$ と定める. 次の結果は [2, Corollary 4.16] の特殊な場合である。

定理 A　次の主張が成り立つ。

1) 方程式 (L) のゼロ解が安定であるとは条件 $\sigma(T(0)) = \sigma_S(T(0)) \setminus \{1\}$ の下で $h_1(T(0)) = 1$ が成り立つことである。

2) 方程式 (L) のゼロ解が漸近安定であるとは $\sigma(T(0)) = \sigma_S(T(0))$ が成り立つことである。

これより次の結果が得られる。

定理 1.　条件 $\sigma(T(0)) = \sigma_S(T(0)) \setminus \{1\}$ を仮定する。

1) $h_1(T(0)) = 1$ ならば, 方程式 (L) のゼロ解は安定である。

2) $h_1(T(0)) \neq 1$ ならば, 方程式 (L) のゼロ解は不安定である。

直接的な証明は付録 I で与える。

2) 次に、方程式 (LF) の特性乗数について述べる。 $\mathcal{C}_{\omega-1}$ は $\mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$ から $\mathbb{C}^d$ へのすべての写像の集合とする。$\mathbb{C}^d$ における任意のノルムを $\|\cdot\|$ 表せば、ノルム $|\varphi|_{\mathcal{C}_{\omega-1}} = \sup_{s\in\mathbb{Z}^0_{-\omega+1}} \|\varphi(s)\|$ により $\mathcal{C}_{\omega-1}$ はバナッハ空間となる。明らかに, $\dim \mathcal{C}_{\omega-1} = \omega d$. 任意の関数 $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^d$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して要素 $y_n \in \mathcal{C}_{\omega-1}$ を

$$y_n(s) = y(n+s),\ s \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$$

と定める。今、$m \in \mathbb{Z}$ かつ $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega-1}$ とする。任意の $n \in \mathbb{Z}^\infty_m$ に対して初期点 $(m, \varphi) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{C}_{\omega-1}$ を通る方程式 (LF) の一意的な解を $y_n := y_n(m, \varphi) \in \mathcal{C}_{\omega-1}$ と表す。任意の $m, n \in \mathbb{Z}, n \geq m$ に対して方程式 (LF) の解作用素 $U_K(n, m) : \mathcal{C}_{\omega-1} \to \mathcal{C}_{\omega-1}$ を $y_n(m, \varphi) = U_K(n, m)\varphi$ によって定める。すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $U_K(n) := U_K(n+\omega, n)$ と置き $U_K(0)$ を 方程式 (LF) の周期作用素と、$\nu \in \sigma(U_K(0))$ を特性乗数という。$K = kE$ ならば、$U_K(n, m)$ および $U_K(0)$ それぞれ $U_k(n, m)$ および $U_k(0)$ と表す。作用素 $I : \mathcal{C}_{\omega-1} \to \mathcal{C}_{\omega-1}$ は恒等作用を表す。

次の補題は [8, 補題 2.1] の別証明である。

補題 2.2. $\det K \neq 0$ ならば、各 $\nu \in \sigma(U_K(0))$ に対して $\nu \neq 0$ である。さらに $U_K(0)\varphi = 0$ ならば、$\varphi = 0 \in \mathcal{C}_{\omega-1}$ が成り立つ。

証明 初めに $\det K \neq 0$ かつ $U_K(0)\varphi = 0$ ならば、$\varphi = 0 \in \mathcal{C}_{\omega-1}$ であることを示す。$y_n(0, \varphi) = U_K(n, 0)\varphi$ $(n \in \mathbb{Z}^\infty_0)$ は方程式 (LF) の解とする。 $y_\omega(0, \varphi) = 0$ であるから $y(\omega + s; 0, \varphi) = 0$ $(s \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1})$ である。したがって

$$y(n; 0, \varphi) = 0\ (n \in \mathbb{Z}^\omega_1) \tag{2}$$

を得る。さらにそれは方程式 (LF) を満たす、すなわち、すべての $n \in \mathbb{Z}^\omega_1$ に対して

$$Ky(n+1-\omega) = (K-E)A(n)y(n) + y(n+1) \tag{3}$$

を満たすから各 $n \in \mathbb{Z}^{\omega-1}_1$ に対して $Ky(n+1-\omega) = 0$ を得る。仮定 $\det K \neq 0$ によりすべての $m \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+2}$ に対して $y(m) = 0$ を得る。

他方、$n = 0$ を (3) に代入すれば $Ky(-\omega+1) = y(1)$ を得る。(2) により $y(-\omega+1) = 0$ である。これは各 $m \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$ に対して $y(m) = 0$ である。これは $\varphi = 0 \in \mathcal{C}_{\omega-1}$ を意味する。したがって、すべての $n \in \mathbb{Z}^\infty_0$ に対して $U_K(n, 0)\varphi = 0$.

次に、各 $\nu \in \sigma(U_K(0))$ に対して $\nu \neq 0$ であることを確かめる。.$\nu \in \sigma(U_K(0))$ であるから $\varphi \neq 0$ かつ $U_K(0)\varphi = \nu\varphi$ となる $\varphi \in \mathcal{C}_{-\omega+1}$ が存在する。このとき

$\nu \neq 0$ である。実際、$\nu = 0$ と仮定すれば、$U_K(0)\varphi = 0$ で, その結果 $\varphi = 0$ を得る。これは矛盾である。したがって、$\nu \neq 0$ である。 □

条件 $\det K \neq 0$ により方程式 (LF) の初期値問題の解の存在及び一意性が保障される。

次の仮定を置く。

(K) フィドバック ゲイン K は次の条件を満たすとする。

(K-1) $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$,
(K-2) すべての $\kappa \in \sigma(K)$ に対して $0 < |\kappa| < 1$,
(K-3) $\sigma(U_K(0)) \cap \sigma(K) = \emptyset$.

(C) 可換条件 $KA(n) = A(n)K$, $(n \in \mathbb{Z}_0^{\omega-1})$.

今後, 本研究では条件 (A), (K) 及び (C) を常に仮定する。

補題 2.3. $x(n)$ が方程式 (L) の ω-周期解ならばそれは方程式 (LF) の ω-周期解であり逆も成り立つ: $1 \in \sigma(T(0)) \Longleftrightarrow 1 \in \sigma(U_K(0))$.

証明 方程式 (L) の ω-周期解 $x(n)$ を方程式の右辺に代入すれば、

$$\begin{aligned} A(n)x(n)+&K(x(n-\omega+1) - A(n)x(n)) \\ &= x(n+1) + K(A(n-\omega)x(n-\omega) - x(n+1)) \\ &= x(n+1) + K(A(n)x(n) - x(n+1)) = x(n+1) \end{aligned}$$

となる。逆に、方程式 (LF) の ω-周期解 $y(n)$ において $y(n+\omega) = y(n)$ であるから n に $n+\omega$ を代入すれば、

$$y(n+\omega+1) = A(n+\omega)y(n+\omega) + K(y(n+1) - A(n+\omega)y(n+\omega)).$$

したがって $y(n+1) = A(n)y(n) + K(y(n+1) - A(n)y(n))$, すなわち、

$$(K-E)y(n+1) = (K-E)A(n)y(n).$$

$1 \in \sigma(K)$ であるから $y(n+1) = A(n) = y(n)$ を得る。 □

次に方程式 (LF) の特性乗数について述べる。

補題 2.4. [7, Proposition 1.1] ν が方程式 (LF) の特性乗数であるとは

$$y(n+\omega) = \nu y(n), \ n \in \mathbb{Z}_{-\omega+1}^{\infty} \tag{4}$$

の形の方程式 (LF) の非自明解 $y_n, n \in \mathbb{Z}_0^{\infty}$ が存在することである。

補題 2.2 と補題 2.4 から任意の $\nu \in \sigma(U_K(0))$ に対して

$$y(n+1) = \nu y(n-\omega+1), (n \in \mathbb{Z}_0^{\infty})$$

を満たす方程式 (LF) の非自明解 $y(n)$ が存在する。これを方程式 (LF) に代入すれば、次の方程式を得る。

$$y(n+1) = A(n)y(n) + K(\nu^{-1}y(n+1) - A(n)y(n)). \tag{5}$$

仮定 (K-2) により $E-K$ は正則である。よって

$$K(\nu) = \nu^{-1}(\nu E - K)(E-K)^{-1}, \nu \in \sigma(U_K(0)) \tag{6}$$

とおけば、

$$K(\nu)y(n+1) = A(n)y(n) \tag{RE}$$

を得る (付録 II 参照)。

仮定 (K-3) は $\nu \notin \sigma(K)$ を意味する。よって方程式 (5) は

$$y(n+1) = K^{-1}(\nu)A(n)y(n),\ n \in \mathbb{Z}_0^\infty \tag{CE}$$

に帰着される。

補題 2.1 から $\mathbb{Z}_0^\infty$ の範囲は仮定 (A) と (K-2) の下で $\mathbb{Z}$ に拡張される。

$\nu = 1$ ならば、$K(1) = E$ であり、このとき方程式 (L) に帰着される。

方程式 (CE) の解作用素及び周期作用素をそれぞれ $T_C(n, m; \nu)$ および $T_C(0; \nu)$ と表す。これらは

$$T_C(n, m; \nu) = [K^{-1}(\nu)]^{n-m}T(n, m),\ T_C(0; \nu) = [K^{-1}(\nu)]^\omega T(0)$$

と表される。特に、$\nu = 1$ ならば、

$$T_C(0; 1) = T(0) \tag{7}$$

である。

3) 方程式 (LF) と方程式 (CE) の特性乗数らの関係を示す。

補題 2.5. $y(n),\ n \in \mathbb{Z}_{-\omega+1}^\infty$ は (4) を満たすとする。このとき $y_n, n \in \mathbb{Z}_0^\infty$ が方程式 (LF) の非自明解であることは $y(n), n \in \mathbb{Z}_{-\omega+1}^\infty$ が方程式 (CE) の非自明解であることは同値である。

証明 y_n が方程式 (LF) の非自明解ならば、補題 2.2 により $\nu \in \sigma(U_K(0)), \nu \neq 0$ である。上述と同様にして $y(n)$ が方程式 (CE) の非自明解であることが分かる。

逆に、$y(n)$ が方程式 (CE) の非自明解であるならば,

$$\begin{aligned} y(n+1) = A(n)y(n) &+ K(y(n+1-\omega) - A(n)y(n)) \\ &- K(y(n+1-\omega) - \nu^{-1}y(n+1)). \end{aligned}$$

$y(n+1-\omega) = \nu^{-1}y(n+1)$ であるから y_n は方程式 (LF) の非自明解である。□

命題 2.6. $\nu \in \sigma(U_K(0))$ と $\nu \in \sigma(T_C(0; \nu))$ は同値である。

証明 補題 2.4 より $\nu \in \sigma(U_K(0))$ であることと (4) を満たす方程式 (LF) の非自明解 $y_n,\ n \in \mathbb{Z}_0^\infty$ が存在することは同値である。さらに 補題 2.5 は $y(n)$ が方程式 (CE) の非自明解であることを示している。さらに (4) により $y(\omega) = T_C(0; \nu)y(0) = \nu y(0)$ である。したがって補題 2.1 から $\nu \in \sigma(T_C(0; \nu))$ が成り立つ、しかも逆も成立する。□

次の結果は 命題 2.6 の特別な場合である。証明には (7) が用いられる。

系 2.7. $1 \in \sigma(T(0))$ と $1 \in \sigma(U_K(0))$ は同値である。すなわち、$y(n)$ が方程式 (L) の非自明な ω-周期解であることと y_n が方程式 (LF) の非自明な ω-周期解であることは同値である。

次の補題は $\nu \in \sigma(U_K(0))$ に対して二つの固有空間 $W_\nu(U_K(0))$ と $W_\nu(T_C(0; \nu))$ の間の関係を示している。

補題 2.8. $\nu \in \sigma(U_K(0))$ 及び $y(\cdot):\mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1} \to \mathbb{C}^d$ とする。このとき $y_n,\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_0$ は $y_0 \in W_\nu(U_K(0))$ を満たす方程式 (LF) の解であることと $y(n), n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1}$ が $y(0) \in W_\nu(T_C(0;\nu))$ を満たす方程式 (CE) の解であることは同値である。

証明 $y_n, n \in \mathbb{Z}^{\infty}_0$ は $y_0 \in W_\nu(U_K(0))$ を満たす方程式 (LF) の解とする。$y_0 = 0$ ならば、証明は明らか。よって $y_0 \neq 0$ の場合を考える。このとき $y_{n+\omega} = \nu y_n,\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_0$ である。実際、$U_K(0)y_0 = \nu y_0$ で $y_n = U_K(n,0)y_0$ であるから解作用素 $U_K(n,0)$ の性質を用いて

$$y_{n+\omega} = U_K(n+\omega,0)y_0 = U_K(n,0)U_K(0)y_0 = \nu U_K(n,0)y_0 = \nu y_n$$

を得る。補題 2.5 により $y(n)$ は $\mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1}$ で定義された方程式 (CE) の非自明解である。補題 2.1 から $\nu \in \sigma(T_C(0;\nu)$ でかつ $y(0) \in W_\nu(T_C(0;\nu))$ である。

逆に、$y(n),\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1}$ は $y(0) \in W_\nu(T_C(0;\nu))$ を満たす方程式 (CE) の解であるとする。このとき $y(m) = T_C(m,0;\nu)y(0),\ m \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$ である。$y(0) = 0$ ならば $y(n) \equiv 0,\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1}$ である。よって証明は明らかである。$y(0) \neq 0$ ならば $y(n+\omega) = \nu y(n),\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1}$ が補題 2.1 から導かれる。よって補題 2.5 から y_n は $\mathbb{Z}^{\infty}_0$ 上で定義された方程式 (LF) の非自明解である。したがって $y_0 \in W_\nu(U_K(0))$ を得る。 □

系 2.9. $\nu \in \sigma(U_K(0))$ とする。このとき $\varphi \in W_\nu(U_K(0))$ であることと $\varphi(m) = T_C(m,0;\nu)\varphi(0),\ m \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$ で $\varphi(0) \in W_\nu(T_C(0;\nu))$ であることは同値である。特に、$\varphi \in W_1(U_K(0))$ であることと $\varphi(m) = T(m,0)\varphi(0),\ m \in \mathbb{Z}^0_{-\omega+1}$ かつ $\varphi(0) \in W_1(T(0))$ であることは同値である。

系 2.10. $\nu \in \sigma(U_K(0))$ かつ $\varphi \in W_\nu(U_K(0))$ とする。このとき $\varphi = 0$ は $\varphi(0) = 0$ と同値である。

$\nu \in \sigma(U_K(0))$ に対して線形写像 $M(\nu)$ を

$$M(\nu) : \psi \in W_\nu(U_K(0)) \mapsto \psi(0) \in W^0_\nu(U_K(0))$$

と定める。ここで

$$W^0_\nu(U_K(0)) = \{\varphi(0) \mid \varphi \in W_\nu(U_K(0))\}.$$

写像 $M(\nu)$ は全単射である。実際、系 2.10 は $\dim \mathcal{N}(M(\nu)) = 0$ を示している。このとき次の結果が成り立つ。

命題 2.11. $\nu \in \sigma(U_K(0))$ ならば、

$$M(\nu)(W_\nu(U_K(0))) = W^0_\nu(U_K(0)) = W_\nu(T_C(0;\nu))$$

かつ

$$\dim W_\nu(U_K(0)) = \dim W_\nu(T_C(0;\nu)).$$

とくに, $\nu = 1 \in \sigma(U_K(0))$ ならば、

$$M(1)(W_1(U_K(0))) = W^0_1(U_K(0)) = W_1(T(0))$$

かつ

$$\dim W_1(U_K(0)) = \dim W_1(T(0)).$$

証明 $W_\nu^0(U_K(0)) = W_\nu(T_C(0;\nu))$ であることは系 2.9 より明らか。$\dim \mathcal{N}(M(\nu)) = 0$ であるから線形代数学の次元定理より $\dim W_\nu(U_K(0)) = \dim W_\nu^0(U_K(0))$ を得る。残りは (7) から出てくる。 □

4) 最後に C-map 定理を述べる。これは方程式 (L) と方程式 (LF) の特性乗数との関係を示している。二つの行列 A と B が可換であれば、その積と差は

$$\sigma(AB) = \{\alpha\beta \mid \alpha \in \sigma(A),\ \beta \in \sigma(B),\ W_\alpha(A) \cap W_\beta(B) \neq \{0\}\}$$

及び

$$\sigma(A-B) = \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \sigma(A),\ \beta \in \sigma(B),\ W_\alpha(A) \cap W_\beta(B) \neq \{0\}\}$$

となる ([5, Lemma A.1] と [3, Lemma 2.11] を参照)。 C-map 定理を導入するため、次の同値命題を述べる。

補題 2.12. [5, Lemma A.2] と [3] 二つの行列 A と B が可換であるとする。$\alpha \in \sigma(A)$ と $\beta \in \sigma(B)$, ならば、次の命題は同値である。
(1) $\alpha\beta \in \sigma(AB)$,
(2) $\alpha - \beta \in \sigma(A-B)$,
(3) $W_\alpha(A) \cap W_\beta(B) \neq \{0\}$.
(4) $G_\alpha(A) \cap G_\beta(B) \neq \{0\}$.

可換行列 A と B に対して

$$\sigma[AB] = \{(\alpha,\beta) \in \sigma(A) \times \sigma(B) \mid \alpha\beta \in \sigma(AB)\}$$

と置く。
まず C-map を定める。方程式 (LF) より (6) で定められた $K(\nu)$ を考慮して C-map を以下のように定める:

$$g(k,z) = \left(\frac{z-k}{(1-k)z}\right)^\omega : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \text{and}\ C_{\omega,k}(z) = zg(k,z),$$

ここで $\omega \in \mathbb{Z}_3^\infty$ で $0 < |k| < 1$ である。
C-map 定理は以下で与えられる。

補題 2.13. (C-map 定理) [8, 定理 2] $\nu \in \sigma(U_K(0))$ であることと $\mu = C_{\omega,k}(\nu)$ 満たす $(k,\mu) \in \sigma[KT(0)]$ が存在することは同値である。

C-map $\mu = C_{\omega,k}(z)$ は次のように表現される:

$$P_{\omega,k}(z;\mu) = (z-k)^\omega - \mu(1-k)^\omega z^{\omega-1} = 0. \tag{8}$$

この方程式の右辺は ω 次多項式であるからすべての k と μ に対して解を持つ。
次の結果は [7, Corollary 2.6] の中のを拡張している。

命題 2.14. [8, 命題 4.3] 任意の $(k,\mu) \in \sigma[KT(0)]$ に対して $\mu = C_{\omega,k}(\nu)$ のすべての解は $\sigma(U_K(0))$ に属する。

先に $(k,\mu) \in \sigma[KT(0)]$ を与える。このとき z に関する方程式 $\mu = C_{\omega,k}(z)$ のすべての解の集合を $\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ と表す。
次の結果は補題 2.13 と命題 2.14 から出てくる。

定理 2. 次の命題が成り立つ: $\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0)) \neq \emptyset$ 及び

$$\begin{aligned}\sigma(U_K(0)) &= \{\nu \mid \mu = C_{\omega,k}(\nu) \text{ for all } (k,\mu) \in \sigma[KT(0)]\} \\ &= \bigcup_{(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]} \sigma_{(k,\mu)}(U_K(0)).\end{aligned}$$

証明 命題 2.14 より $\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0)) \neq \emptyset$ が成り立つ。$\nu \in \sigma(U_K(0))$ とする。このとき補題 2.13 から $\mu = C_{\omega,k}(\nu)$ を満たす $(k,\mu) \in \sigma[KT(0)]$ が存在する。したがって、$\nu \in \sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$。逆は、明らかである。 □

3 インデックス $h_1(U_K(0))$ の特徴づけ

系 2.7 より方程式 (L) が特性乗数 1 をもつならば、方程式 (LF) もそうである。この節では $h_1(U_K(0)) = 1$, すなわち、$G_1(U_K(0)) = W_1(U_K(0))$ を満たす条件を見出す。これは方程式 (LF) の周期解の安定性を研究する上で非常に重要である。これは文献 [5] の着想から出てくる。

3.1 補題

初めに、$h_1(U_K(0)) = 1$ を示す上で重要となる補題を与える。

補題 3.1. $\nu \in \sigma(U_K(0))$、$\phi \in \mathcal{N}((U_K(0) - \nu I)^2)$ 及び $\psi = (U_K(0) - \nu I)\phi$ とする。このとき

$$(T_C(0;\nu) - \nu E)\psi(0) = 0 \tag{9}$$

及び

$$(\nu E + (\omega - 1)K)\,\psi(0) = (\nu E - K)\,(T_C(0;\nu) - \nu E)\,\phi(0). \tag{10}$$

証明 $y_n = U_K(n,0)\phi$ と $z_n = U_K(n,0)\psi$ は方程式 (LF) の解とする。補題 2.2 より $\nu \neq 0$ である。$\psi \in W_\nu(U_K(0))$ であるから補題 2.8 より

$$z(n) = T_C(n,0;\nu)z(0), \tag{11}$$

及び $z(0) = \psi(0) \in W_\nu(T_C(0;\nu))$、すなわち、(9) が成り立つ。再度 補題 2.8 と補題 2.1 を用いて

$$z(n+\omega) = \nu z(n),\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1}. \tag{12}$$

他方、

$$\begin{aligned} z_n &= U_K(n,0)\psi = U_K(n,0)U_K(\omega,0)\phi - \nu U_K(n,0)\phi \\ &= U_K(n+\omega,0)\phi - \nu U_K(n,0)\phi \\ &= y_{n+\omega} - \nu y_n,\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_0 \end{aligned}$$

であるから

$$z(n) = y(n+\omega) - \nu y(n),\ n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\omega+1}. \tag{13}$$

(12) と (13) を合わせてそして補題 2.2 を用いて

$$y(n-\omega) = \nu^{-1}y(n) - \nu^{-1}z(n-\omega) = \nu^{-1}y(n) - \nu^{-2}z(n).$$

その結果、

$$y(n-\omega+1)=\nu^{-1}y(n+1)-\nu^{-2}z(n+1).$$

これを方程式 (LF) に代入すれば、以下の関係式:

$$(\nu E-K)y(n+1)=\nu(E-K)A(n)y(n)-\nu^{-1}Kz(n+1),$$

すなわち、

$$y(n+1)=K(\nu)^{-1}A(n)y(n)-\nu^{-1}K(\nu E-K)^{-1}z(n+1),\ n\in\mathbb{Z}_0^{\infty}$$

を得る。さらに (11) より $z(i+1)=T_C(i+1,0;\nu)z(0)$ を得る。よって

$$\begin{aligned}T_C(n,i+1;\nu)z(i+1)&=T_C(n,i+1;\nu)T_C(i+1,0;\nu)z(0)\\&=T_C(n,0;\nu)z(0)=z(n).\end{aligned}$$

定数変化法の公式を用いて

$$\begin{aligned}y(n)&=T_C(n,0;\nu)y(0)\\&\qquad-\nu^{-1}K(\nu E-K)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}T_C(n,i+1;\nu)z(i+1),\ n\in\mathbb{Z}_1^{\infty}\\&=T_C(n,0;\nu)y(0)-\nu^{-1}K(\nu E-K)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}z(n)\\&=T_C(n,0;\nu)y(0)-n\nu^{-1}K(\nu E-K)^{-1}z(n)\end{aligned}$$

を得る。直接

$$\begin{aligned}y(n+\omega)&=T_C(n+\omega,0;\nu)\phi(0)-(n+\omega)\nu^{-1}K(\nu E-K)^{-1}z(n+\omega)\\&=T_C(n,0;\nu)T_C(0;\nu)\phi(0)-(n+\omega)K(\nu E-K)^{-1}z(n),\ n\in\mathbb{Z}_{-\omega+1}^{\infty}\end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned}z(n)&=y(n+\omega)-\nu y(n)\\&=T_C(n,0;\nu)T_C(0;\nu)\phi(0)-\nu T_C(n,0;\nu)\phi(0)\\&\quad+nK(\nu E-K)^{-1}z(n)-(n+\omega)K(\nu E-K)^{-1}z(n)\\&=T_C(n,0;\nu)\left(T_C(0;\nu)-\nu E\right)\phi(0)-\omega K(\nu E-K)^{-1}z(n).\end{aligned}$$

結局、

$$\left(E+\omega K(\nu E-K)^{-1}\right)z(n)=T_C(n,0;\nu)\left(T_C(0;\nu)-\nu E\right)\phi(0)$$

を得る。$n=0$ ならば、上の関係式は

$$\left(E+\omega K(\nu E-K)^{-1}\right)\psi(0)=\left(T_C(0;\nu)-\nu E\right)\phi(0)$$

となる。この関係式に $\nu E-K$ を掛けて (10) を得る。 □

次の結果は補題 3.1 の直接的な帰結である。

系 3.2. $1 \in \sigma(U_K(0))$, $\phi \in \mathcal{N}((U_K(0)-I)^2)$ 及び $\psi = (U_K(0)-I)\phi$ とする。このとき

$$(T(0)-E)\psi(0) = 0, \tag{14}$$

$$(T(0)-E)^2\,\phi(0) = 0, \tag{15}$$

及び

$$(E + (\omega-1)K)\,\psi(0) = (E-K)\,(T(0)-E)\,\phi(0). \tag{16}$$

さらに, $\psi(0) \in W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K)$ ならば, $(T(0)-E)\phi(0) = 0$. 特に、$K = -\frac{1}{\omega-1}E$ ならば、$(T(0)-E)\,\phi(0) = 0$.

証明 (14) と (16) は (7) と補題 3.1 から容易に導かれる。(16) の両辺に $T(0)-E$ をかけ掛けて (14) を用いれば (15) が得られる。特に、$\psi(0) \in W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K)$ ならば、(16) の右側は $(T(0)-E)\phi(0) = 0$ となる。残りは明らかである。 □

3.2 $h_1(U_K(0)) = 1$ であるための十分条件

$h_1(U_K(0)) = 1$ であるための十分条件を与える。

命題 3.3. $1 \in \sigma(T(0))$ とし

$$W_1(T(0)) \cap W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K) = \{0\} \tag{17}$$

を仮定する。$h_1(T(0)) = 1$ ならば、$h_1(U_K(0)) = 1$ である。

証明 系 2.7 より $1 \in \sigma(T(0))$ と $1 \in \sigma(U_K(0))$ は同値である。$h_1(U_K(0)) = 1$ を示すため

$$\mathcal{N}((U_K(0)-I)^2) = \mathcal{N}(U_K(0)-I)$$

を示せば十分である。$\phi \in \mathcal{N}((U_K(0)-I)^2)$ とし $\psi = (U_K(0)-I)\phi$ とおく。系 3.2 を適用して

$$\psi(0) \in W_1(T(0)) \tag{18}$$

と $(T(0)-E)^2\,\phi(0) = 0$ を得る。$h_1(T(0)) = 1$ であるから $(T(0)-E)\phi(0) = 0$ を得る。よって (16) から $(E+(\omega-1)K)\psi(0) = 0$, 言い換えれば、

$$\psi(0) \in W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K). \tag{19}$$

さらに (18) と (19) を合わせて $\psi(0) \in W_1(T(0)) \cap W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K) = \{0\}$ より $\psi(0) = 0$ を得る。系 2.10 より $\psi = 0$、すなわち $(U_K(0)-I)\phi = 0$ である。したがって $\mathcal{N}((U_K(0)-I)^2) = \mathcal{N}(U_K(0)-I)$ を得る。 □

系 3.4. $1 \in \sigma(T(0))$ で $-\frac{1}{\omega-1} \notin \sigma(K)$ を仮定する。このとき $h_1(T(0)) = 1$ ならば、$h_1(U_K(0)) = 1$ である。

証明 If $-\frac{1}{\omega-1} \notin \sigma(K)$ ならば、 $W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K) = \{0\}$ である。(17) が成り立つので証明は命題 3.3 から導かれる。 □

命題 3.5. $1 \in \sigma(T(0))$ を仮定する。このとき

$$W_1(T(0)) \subset W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K)$$

であれば、$h_1(U_K(0)) = 1$ が成立する。

証明 矛盾を導くため $h_1(U_K(0)) > 1$ が成り立つと仮定する。すなわち、$\phi \in \mathcal{N}((U_K(0) - I)^2)$ かつ $\phi \notin \mathcal{N}(U_K(0) - I)$ を満たす $\phi \neq 0$ が存在すると仮定する。 $\psi = (U_K(0) - I)\phi$ と置けば、明らかに、$\psi \neq 0$ が成り立つ。 Since $\psi \in W_1(U_K(0))$ であるから系 2.10 により $\psi(0) \neq 0$ を得る。 さらに命題 2.11 により $W_1^0(U_K(0)) = W_1(T(0))$ であるから $\psi(0) \in W_1(T(0)) \subset W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K)$ が成り立つ。したがって、系 3.2 から $(T(0) - E)\phi(0) = 0$、すなわち、再度 命題 2.11 より $\phi(0) \in W_1(T(0))$ を得る。 再度 命題 2.11 より $\phi \in W_1(U_K(0))$ が生じる。これは矛盾である。 □

命題 3.5 において仮定 $W_1(T(0)) \subset W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K)$ より $-\frac{1}{\omega-1} \in \sigma(K)$ が導かれる。

系 3.6. $1 \in \sigma(T(0))$ とし $K = -\frac{1}{\omega-1}E$ を仮定する。このとき $h_1(U_K(0)) = 1$ である。.

証明 $-\frac{1}{\omega-1} \in \sigma(K)$ であるから $W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K) = \mathbb{C}^d$、すなわち、$W_1(T(0)) \subset \mathbb{C}^d$ を得る。したがって. 命題 3.5 から $h_1(U_K(0)) = 1$ が導かれる。 □

命題 3.3 と命題 3.5 を合わせてこの節の主結果を得る。

定理 3. $1 \in \sigma(T(0))$ とする。このとき次の命題が成立する:

1) $W_1(T(0)) \cap W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K) = \{0\}$ を仮定する。$h_1(T(0)) = 1$ ならば、$h_1(U_K(0)) = 1$ である。

2) $W_1(T(0)) \subset W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K)$ ならば、$h_1(U_K(0)) = 1$ である。

$K = kE$ の場合は次の結果が成り立つ。

系 3.7. $1 \in \sigma(T(0))$ かつ $K = kE$ とする。

1) $k \neq -\frac{1}{\omega-1}$ で $h_1(T(0)) = 1$ ならば、$h_1(U_K(0)) = 1$ が成り立つ。

2) $k = -\frac{1}{\omega-1}$ ならば、$h_1(U_K(0)) = 1$ が成り立つ。

証明 証明は定理 3 から、または系 3.4 と系 3.6 から出てくる。 □

4 安定領域

この節では 3 節の結果を用いて方程式 (LF) の周期解の安定領域を決める。それは本論文の主結果である。

$$B_{\omega,k}(\theta) := C_{\omega,k}(e^{i\theta}) = \left(\frac{1 - ke^{-i\theta}}{1-k}\right)^{\omega} e^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi, i = \sqrt{-1}$$

とおく。$\beta(k,\theta)$ を

$$\tan\beta(k,\theta) = \frac{k\sin\theta}{1 - k\cos\theta},\ |\beta(k,\theta)| < \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

と定める。 このとき (20) より以下を得る。

(1) $0 < k < 1$ であることと任意の $\theta \in (0, \pi)$ に対して $0 < \beta(k, \theta) < \frac{\pi}{2}$ であることは同値である。

(2) $-1 < k < 0$ であることと任意の $\theta \in (0, \pi)$ に対して $-\frac{\pi}{2} < \beta(k, \theta) < 0$ であることは同値である。

さらに $B_{\omega,k}(\theta)$ の表現は

$$B_{\omega,k}(\theta) = \frac{(1 - 2k\cos\theta + k^2)^{\frac{\omega}{2}}}{(1-k)^{\omega}} e^{i\varphi_k(\theta)},\ \theta \in (-\pi, \pi] \tag{21}$$

で与えられる ([8, 補題 5.1] 参照)。ここで

$$\varphi_k(\theta) = \omega\beta(k, \theta) + \theta,\ -\pi < \theta \le \pi \tag{22}$$

. これより $B_{\omega,k}(0) = 1$, $B_{\omega,k}(\pi) = -\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\omega}$ 及び $B_{\omega,k}(\theta) = \overline{B_{\omega,k}(-\theta)}$. これより次の結果を得る:

1) $\frac{1}{\omega-1} < k < 1$ ならば、 $\varphi_k'(0) > 0$ かつ $\varphi_k'(\pi) < 0$;

2) $-1 < k < -\frac{1}{\omega-1}$ ならば、 $\varphi_k'(0) < 0$ かつ $\varphi_k'(\pi) > 0$

([7, Corollary 4.3] を参照).

[8] に従って正の数 $\gamma \in (0, \pi]$ を次のように定める:

$$\gamma := \gamma(\omega, k) = \begin{cases} \pi, & (0 < |k| \le \frac{1}{\omega-1}), \\ \min\{\theta \in (0, \pi) \mid \varphi_k(\theta) = \pi\}, & (\frac{1}{\omega-1} < k < 1), \\ \max\{\theta \in (0, \pi) \mid \varphi_k(\theta) = 0\}, & (-1 < k < -\frac{1}{\omega-1}). \end{cases}$$

このとき $\Im B_{\omega,k}(\gamma) = 0$.

上記の正の数 $\gamma \in (0, \pi]$ は次の補題によって保障される。

補題 4.1. $k \in \sigma(K)$ とする。 このとき次の命題が成り立つ:

1)$0 < |k| \le \frac{1}{\omega-1}$ であれば、$\gamma = \pi$ で $\varphi_k(\gamma) = \pi$; $\Re B_{\omega,k}(\pi) = -\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\omega} < 0$.

2)$\frac{1}{\omega-1} < k < 1$ ならば、$\varphi_k(\gamma) = \pi$ かつすべての $\theta \in (0, \gamma)$ に対して $\varphi_k(\theta) < \pi$ を満たす $\gamma \in (0, \pi)$ が存在する; $\Re B_{\omega,k}(\gamma) < -1$.

3)$-1 < k < -\frac{1}{\omega-1}$ ならば、$\varphi_k(\gamma) = 0$ かつすべての $\theta \in (\gamma, \pi)$ に対して $\varphi_k(\theta) < \pi$ を満たす $\gamma \in (0, \pi)$ が存在する; $0 < \Re B_{\omega,k}(\gamma) < 1$.

証明 1) $0 < |k| \le \frac{1}{\omega-1}$ ならば、[7, Theorem 4.4] より主張は正しい

2) $\frac{1}{\omega-1} < k < 1$ ならば、$0 < \beta(k, \theta) < \frac{\pi}{2}$ が成り立ち、さらに, すべての $\theta \in (0, \pi)$ に対して $\varphi_k(\theta) = \omega\beta(k, \theta) + \theta > 0$ が成り立つ。$\varphi_k'(\pi) < 0$ であるから $\varphi_k(\delta) > \pi$ となる $\delta \in (0, \pi)$ が存在する。さらに $\varphi_k(0) = 0$ であるから中間値の定理は $\varphi_k(\eta) = \pi$ となる $\eta \in (0, \delta)$ が存在する。$\gamma = \min\{\eta \in (0, \pi) \mid \varphi_k(\eta) = \pi\}$ とする。このときすべての $\theta \in (0, \gamma)$ に対して $0 < \varphi_k(\theta) < \pi$ が成り立つ。に不等式 $\Re B_{\omega,k}(\gamma) < -1$ も容易に得られる。

3)$-1 < k < -\frac{1}{\omega-1}$ ならば、$-\frac{\pi}{2} < \beta(k, \theta) < 0$ が成り立つ。 $\varphi_k'(0) < 0$ かつ $\varphi_k(\pi) = \pi$ であるから, 中間値の定理のより $\varphi_k(\eta) = 0$ を満たす $\eta \in (0, \pi)$ が存在する。$\gamma = \max\{\eta \in (0, \pi) \mid \varphi_k(\eta) = 0\}$ とする。このときすべての $\theta \in (\gamma, \pi)$ に対して $0 < \varphi_k(\theta) < \pi$ が成り立つ。実際、$\varphi_k(\eta_0) \ge \pi$ となる $\eta_0 \in (\gamma, \pi)$ が存在すると仮定する。$\omega\beta(k, \eta_0) + \eta_0 \ge \pi$ であるから $\pi < \omega\beta(k, \eta_0) + \pi$ である。したがって $0 < \beta(k, \eta_0) < 0$ である。これは矛盾である。さらさらに不等式 $0 < \Re B_{\omega,k}(\gamma) < 1$ も容易に得られる。 □

$$I(\gamma)=\begin{cases}[0,\pi], & (0<|k|\le \frac{1}{\omega-1}),\\ [0,\gamma],\gamma\neq\pi, & (\frac{1}{\omega-1}<k<1),\\ [\gamma,\pi],\gamma\neq\pi, & (-1<k<-\frac{1}{\omega-1}).\end{cases} \tag{23}$$

とする。

上記の結果は区間 $I(\gamma)$ の存在を保証する。明らかに、$B_{\omega,k}(\gamma)\in\mathbb{R}$ である。直線 $\mathbb{R}$ と曲線 $B_{\omega,k}(\theta)$ の $I(\gamma)$ への制限によって閉曲線による領域を $B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ によって表す。さらに、領域 $B^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ と直線 $\mathbb{R}$ によるその対称領域の和集合を $D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ([8, p.21] 中の図 1 を参照) で表す。その上領域 $D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ の境界を $\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ その内部及び外部をそれぞれ $int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ 及び $ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ で表す。方程式 (L) の ω-周期解の存在は $1\in\sigma(T(0))$ と同値である。しかしながら、$1\in\sigma(T(0))$ は $\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ かまたは $ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ である。.

次の補題は補題 4.1 と $D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ の定義より明らかである。.

補題 4.2. $1\in\sigma(T(0))$ で $k\in\sigma(K)$ とする。このとき次の命題が成り立つ:
1) $-\frac{1}{\omega-1}\le k<1$ ならば、$1\in\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$.
2) $-1<k<-\frac{1}{\omega-1}$ ならば、$1\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$.

DFC よる方程式 (L) の不安定なゼロ解の安定化に関する判定基準を与える。次の結果は本研究において重要な役割を果たす。

補題 4.3. [8, 定理 6] $(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ とする。このとき次の命題 g 成立する:
1)$\mu\in int\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、$|\nu|<1\ for\ all\ \nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$.
2)$\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、$|\nu|\ge 1\ for\ all\ \nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$.

次に補題 4.3 において $|\nu|>1$ となるための十分条件を与える。

命題 4.4. $(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ とする。$\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ で方程式 $\mu=B_{\omega,k}(\theta)$ が解をもたないならば、すべての $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に対して $|\nu|>1$ が成り立つ。

証明 $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ であるから補題 4.3 によりすべての $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に対して $|\nu|\ge 1$ が成り立つ。今 $|\nu_0|=1$, すなわち、$\nu_0=e^{i\theta_0}$ を満たす $\nu_0\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ が存在したと仮定する。このとき命題 2.14 により $\mu=C_{\omega,k}(\nu_0)=B_{\omega,k}(\theta_0)$ が成り立つ。これは命題の仮定と矛盾する。したがって、すべての $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_K(0))$ に対して $|\nu|>1$ が成り立つ。 □

特別な場合として $0<|k|\le\frac{1}{\omega-1}$ の場合を考える。

系 4.5. $(k,\mu)\in\sigma[KT(0)]$ で $0<|k|\le\frac{1}{\omega-1}$ とする。$\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ となる $\mu\in\sigma(T(0))$ が存在するならば、すべての $\nu\in\sigma_{(k,\mu)}(U_k(0))$ に対して $|\nu|>1$ が成り立つ。

証明 $0<|k|\le\frac{1}{\omega-1}$ であるから補題 4.1 と性質 $B_{\omega,k}(\theta)=\overline{B_{\omega,k}(-\theta)}$ により $\{B_{\omega,k}(\theta)\mid\theta\in(-\pi,\pi]\}=\partial D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ が成立する。これは $\mu\in ext\ D^{\gamma}_{\omega,k}(0)$ ならば、方程式 $\mu=C_{\omega,k}(\nu)$ は解をもたないことを意味する。したがって、命題 4.4 から系の結果が出る。 □

定義 4.6. 方程式 (L) (resp. (LF)) のゼロ解が安定であるとは任意に与えられた $\varepsilon>0$ と $n_0\ge 0$ に対して或る $\delta=\delta(\varepsilon,n_0)$ が存在し、$\|w\|<\delta$ ($|\varphi|_{\mathcal{C}_{\omega-1}}<\delta$, resp.) ならば、すべての $n\ge n_0$ に対して $\|x(n;n_0,w)\|<\varepsilon$ ($|y_n(n_0,\varphi)|_{\mathcal{C}_{\omega-1}}<\varepsilon$, resp.) が成り立つことを意味する。そうでなければ、ゼロ解は不安定であるという。

$y^0(n)$ が ω-周期解だとするならば、方程式 (LF) の解 $y(n)$ に対して変数変換 $z(n) = y(n) - y^0(n)$ を行えば $z(n)$ は方程式 (LF) の解である。

方程式 (LF) において

$$y(n-(\omega-1)) = z(1;n),\ y(n-(\omega-2)) = z(2;n),\ \ldots,\ y(n) = z(\omega;n)$$

と変換し $z(n) = {}^t({}^tz(1;n), {}^tz(2;n), \ldots, {}^tz(\omega;n))$ とおけば、次の系

$$z(n+1) = B_K(n)z(n),\ n \in \mathbb{Z}_0^\infty, \tag{BE}$$

が得られる。ここで

$$B_K(n) = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & E \\ K & 0 & 0 & \cdots & 0 & (E-K)A(n) \end{pmatrix}.$$

方程式 (BE) の解作用素を $T_B(n,m)$ $(n,m \in \mathbb{Z}_0^\infty)$ と表し $T_B(n) := T_B(n+\omega, n)$ とすれば $T_B(0)$ は周期作用素である。 このとき $\sigma(U_K(0)) = \sigma(T_B(0))$ ([8, 補題 1.5] 参照) で、さらに $h_\nu(U_K(0)) = 1$ と $h_\nu(T_B(0)) = 1$ は同値である。したがって方程式 (LF) に対して定理 1 に対応する結果を得る。

命題 4.7. $\sigma(U_K(0)) = \sigma_S(U_K(0)) \cup \{1\}$ を仮定する。

1) $h_1(U_K(0)) = 1$ ならば、方程式 (LF) の ω-周期解は安定である。

2) $h_1(U_K(0)) > 1$ ならば、方程式 (LF) の不安定な ω-周期解が存在する。

以上より本研究の主定理を述べる。証明は定理 3 と命題 4.7 に基づかれる。

定理 4. $1 \in \sigma(T(0))$ とする。条件 $\sigma(T(0)) \setminus \{1\} \subset int \cap_{k\in\sigma(K)} D^\gamma_{\omega,k}(0)$ を仮定する。次の条件の一つが満たされるならば、方程式 (LF) の ω-周期解は安定である:

1) $h_1(T(0)) = 1$ 及び $W_1(T(0)) \cap W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K) = \{0\}$.

2) $W_1(T(0)) \subset W_{-\frac{1}{\omega-1}}(K)$.

証明 $\sigma(T(0)) \setminus \{1\} \subset int \cap_{k\in\sigma(K)} D^\gamma_{\omega,k}(0)$ であるから補題 4.3 により すべての $\nu \in \sigma_{(k,\mu)}(U_K(0)), \mu \neq 1$ に対して $|\nu| < 1$ が成り立つ。さらに系 2.7 より $1 \in \sigma(T(0))$ と $1 \in \sigma(U_K(0))$ は同値である。定理 3 を用いて $h_1(U_K(0)) = 1$ である。命題 4.7 により証明が完了する。 □

$K = kE$ の場合は系 3.7 より次の結果が得られる。

系 4.8. $K = kE$ で $1 \in \sigma(T(0))$ とする。条件 $\sigma(T(0)) \setminus \{1\} \subset int\ D^\gamma_{\omega,k}(0)$ を仮定する。次の条件の一つが満たされるならば、方程式 (LF) の ω-周期解は安定である:

1) $k \neq -\frac{1}{\omega-1}$ かつ $h_1(T(0)) = 1$.

2) $k = -\frac{1}{\omega-1}$.

このとき方程式 (LF) の ω-周期解は安定である。

5 付録 I: 定理 1 及び命題 4.7 の証明

方程式 (L) の ω-周期解を考える。$Q_\mu(T(0)) : \mathbb{C}^d \to G_\mu(T(0))$ は直和分解

$$\mathbb{C}^d = \bigoplus_{\mu\in\sigma(T(0))} G_\mu(T(0))$$

による射影を表すとする。このとき

$$E = \sum_{\mu \in \sigma(T(0))} Q_\mu(T(0)) \tag{24}$$

が成り立つ。$\mu \in \sigma(T(0))$ に対して $Q_\mu(n) = Q_\mu(P(n))$ とおけば、 $Q_\mu(n+\omega) = Q_\mu(n)$ かつ $Q_\mu(n)T(n,m) = T(n,m)Q_\mu(m)$ が成り立つ。さらに次の事実も成り立つ。

1) $\sigma(T(n)) = \sigma(T(0))$.

2) $h_\mu(T(0)) = h_\mu(T(n))$, $T(n,0)G_\mu(T(0)) = G_\mu(T(n))$ 及び $\dim G_\mu(T(n)) = \dim G_\mu(T(0))$ ([9, 第 3 章] 参照)。

正の整数 n を $n = k(n)\omega + r(n),\ 0 \le r(n) < \omega$ と表せば、次の関係式

$$T(n,n_0) = T(r(n),0)T(0)^{k(n)}T(0,n_0)$$

成り立つ。これと $x(n;n_0,w) = T(n,n_0)w$ より

$$\begin{aligned} Q_\mu(n)x(n;n_0,w) &= Q_\mu(n)T(n,n_0)w \\ &= T(r(n),0)T(0)^{k(n)}T(0,n_0)Q_\mu(n_0)w \\ &= T(r(n),0)T(0)^{k(n)}Q_\mu(0)T(0,n_0)w. \end{aligned} \tag{25}$$

スペクトル分解定理より次の結果を得る。

補題 5.1. [9, 第 3 章] $\mu \in \sigma(T(0))$ とする。このとき

$$T(0)^m Q_\mu(0) = \sum_{j=0}^{h_\mu(T(0))-1} \binom{m}{j} \mu^{m-j}(T(0)-\mu E)^j Q_\mu(0). \tag{26}$$

ここで m は正の整数で $\binom{m}{j}$ は 2 項係数である。

定理 1 の証明

1) 方程式 (L) の ω-周期解 $x^*(n;n_0,w_0)$ に対して $x(n;n_0,w) = y(n;n_0,w_1) - x^*(n;n_0,w_0), w = w_1 - w_0$ とおく。$n = k(n)\omega + r(n)$ であるから (24) と (25) より

$$\begin{aligned} x(n;n_0,w) &= \sum_{\mu \in \sigma(T(0))} Q_\mu(n)x(n;n_0,w) \\ &= \sum_{\mu \in \sigma(T(0))} T(r(n),0)T(0)^{k(n)}Q_\mu(0)T(0,n_0)w \end{aligned}$$

を得る。さらに $M(n_0) = \|T(0,n_0)\| \max_{i \in \{0,1,\cdots,\omega-1\}} \|T(i,0)\|$ とおけば、

$$\|Q_\mu(n)x(n;n_0,w)\| \le M(n_0)\|T(0)^{k(n)}Q_\mu(0)\|\|w\| \tag{27}$$

となる。 $h_\mu = h_\mu(T(0)), \mu \in \sigma(T(0))$ とおき補題 5.1 を用いれば、

$$T(0)^{k(n)}Q_\mu(0) = \sum_{j=0}^{h_\mu-1} \binom{k(n)}{j} \mu^{k(n)-j}(T(0)-\mu E)^j Q_\mu(0)$$

となる。ゆえに

$$\|T(0)^{k(n)}Q_\mu(0)\| \le \left(\sum_{j=0}^{h_\mu-1}\frac{(k(n))_j}{j!}|\mu|^{k(n)-j}\right)\max_{0\le j\le h_\mu-1}\|(T(0)-\mu E)^j\|\|Q_\mu(0)\| \tag{28}$$

を得る。ここで $m>k>0$ のとき $(m)_k := m(m-1)\cdots(m-k+1)$。さらに $C(\mu)=h_\mu \max_{0\le j\le h_\mu-1}\|(T(0)-\mu E)^j\|$ とおく。

まず $\mu\in\sigma_S(T(0))$ 場合は、(27) と (28) から $n\to\infty$ のとき

$$\|Q_\mu(n)x(n;n_0,w)\| < M(n_0)|\mu|^{k(n)-h_\mu}(k(n))_{h_\mu-1}C(\mu)\|w\| \to 0 \tag{29}$$

を得る。

次に、$\mu=1\in\sigma(T(0)), h_1=1$ 場合を考える。このとき (25) は

$$Q_1(n)x(n;n_0,w)=T(r(n),0)T(0)^{k(n)}Q_1(0)T(0,n_0)w$$

となる。$G_1(T(0))=W_1(T(0))$ であるから

$$T(0)^{k(n)}Q_1(0)=\binom{k(n)}{0}1^{k(n)}(T(0)-E)^0Q_1(0)=Q_1(0)$$

である。よって

$$Q_1(n)x(n;n_0,w)=T(r(n),0)Q_1(0)P(0,n_0)w.$$

その結果、

$$\|Q_1(n)x(n;n_0,w)\|\le M_1(n_0)\|w\|$$

を得る。任意の $\varepsilon>0$ と $n_0\ge 0$ に対して $\delta=\frac{\varepsilon}{M(n_0)}$ と取る。このとき $\|w\|<\delta$ ならば、

$$\begin{aligned}\|Q_1(n)x(n;n_0,w)\| &\le M_1(n_0)\|w\|\le M(n_0)\delta\\ &< M(n_0)\frac{\varepsilon}{M(n_0)}=\varepsilon.\end{aligned} \tag{30}$$

したがって (29) と (30) を合わせれば、方程式 (L) の ω-周期解 $x^*(n:n_0,w_0)$ は安定である。

2) $h_1(T(0))>1$ の場合。 $G_1(T(0))\ne W_1(T(0))$ であるから

$$\begin{aligned}&Q_1(n)x(n;n_0,w)\\ &=T(r(n),0)\left[\sum_{j=0}^{h_1-1}\binom{k(n)}{j}\mu^{k(n)-j}(T(0)-E)^j\right]Q_1(0)T(0,n_0)w.\end{aligned}$$

したがって、或る $d, 1<d\le h_1$ に対して

$$Q_1(0)T(0,n_0)w\in\mathcal{N}((T(0)-E)^d),\ Q_1(0)T(0,n_0)w\notin\mathcal{N}((T(0)-E)^{d-1})$$

を満たす w が存在する。その結果、

$$\begin{aligned}&Q_1(n)x(n;n_0,w)\\ &=T(r(n),0)\sum_{j=0}^{d-1}\binom{k(n)}{j}(T(0)-E)^jQ_1(0)T(0,n_0)w\\ &=T(r(n),0)\binom{k(n)}{d-1}(T(0)-E)^{d-1}Q_1(0)T(0,n_0)w+o\left(\binom{k(n)}{d-1}\right),\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

が得られる。ここで o はスモール オーである。 これより証明が完了する。 □

写像 $S_{\omega-1} : \mathcal{C}_{\omega-1} \to \mathbb{C}^{\omega d} := \overbrace{\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \cdots \times \mathbb{C}^d}^{\omega}$ を

$$\varphi \in \mathcal{C}_{\omega-1} \mapsto {}^t({}^t\varphi(-\omega+1), {}^t\varphi(-\omega+2), \ldots, {}^t\varphi(-1), {}^t\varphi(0)) \in \mathbb{C}^{\omega d}.$$

によって定める。このとき $S_{\omega-1}$ は全単射である。$y_n(m,\varphi) = U_K(n,m)\varphi$ であるから $S_{\omega-1}U_K(n,m)\varphi = T_B(n,m)S_{\omega-1}\varphi$. したがって

$$S_{\omega-1}U_K(n,m) = T_B(n,m)S_{\omega-1}\ (n \geq m, m, n \in \mathbb{Z}_0^\infty), S_{\omega-1}U_K(0) = T_B(0)S_{\omega-1}. \tag{31}$$

$U_K(0)$ と $T_B(0)$ は相似であるから次の関係が成り立つ。

$$U_K(0)\varphi = \nu\varphi \iff S_{\omega-1}U_K(0)\varphi = \nu S_{\omega-1}\varphi \iff T_B(0)S_{\omega-1}\varphi = \nu S_{\omega-1}\varphi. \tag{32}$$

補題 5.2. [8, 補題 1.5] $\sigma(U_K(0)) = \sigma(T_B(0))$.

補題 5.3. $\nu \in \sigma(U_K(0))$ とする。このとき $h_\nu(U_K(0)) = 1$ と $h_\nu(T_B(0)) = 1$ は同値である。

証明 $h_\nu(U_K(0)) = 1$ とする。このとき任意の $\phi \in G_1(U_K(0))$ に対して $U_K(0)\phi = \nu\phi$ が成り立つ。$U_K(0)$ と $T_B(0)$ は (31) により相似であるから

$$S_{\omega-1}G_\nu(U_K(0)) = G_\nu(T_B(0))$$

が成り立つ。(32) より $T_B(0)S_{\omega-1}\phi = \nu S_{\omega-1}\phi$ 及び $S_{\omega-1}\phi \in G_\nu(T_B(0))$ である。したがって、$h_\nu(T_B(0)) = 1$ を得る。逆の証明も明らかである。 □

命題 4.7 の証明

補題 5.2 と補題 5.3 より $\sigma(U_K(0)) = \sigma(T_B(0))$ および $h_1(U_K(0)) = 1$ と $h_1(T_B(0)) = 1$ の同値性が出てくる。方程式 (BE) に対して定理 1 成立する。よって方程式 (LF) に対しても成り立つ。x_n^* は方程式 (LF) の ω-周期解とし $y(n) = x(n) - x^*(n)$ とおく。ここで x_n は方程式 (LF) の解である。このとき y_n もやはり方程式 (LF) の解である。方程式 (LF) のゼロ解の安定性は方程式 (LF) の ω-周期解の安定性を意味する。 □

6 付録 II

(K) の中の条件 (K-3):$\sigma(U_K(0)) \cap \sigma(K) = \emptyset$ を次の条件で置き換える:

(K-4) すべての $k \in \sigma(U_K(0)) \cap \sigma(K) \neq \emptyset$ に対して $h_k(K) \leq \omega$ が成立する。

$K = kE, 0 < |k| < 1, k \in \mathbb{R}$ と条件 (A) を仮定する。このとき条件 (K-3) が満たされる ([8, 補題 1.3] 参照). しかし残念ながら $K \neq kE$ ならば、一般に条件 (K-3) は満たされない。このとき条件 (K-4) の下で次の命題が成り立つ。これは [7, Proposition 2.2] の一般化である。

定理 5. 次の命題は同値である:

1) $\nu \in \sigma(U_K(0))$.

2) (4)、すなわち、$y(n+\omega) = \nu y(n),\ n \in \mathbb{Z}_{-\omega+1}^\infty$ を満たす方程式 (LF) の非自明解 $y(n), n \in \mathbb{Z}_{-\omega+1}^\infty$ が存在する。

3) $\nu K(\nu)^\omega z(0) = T(0)z(0),\ z(0) \notin G_\nu(K)$ を満たす方程式 (RE) の非自明解 $z(n), n \in \mathbb{Z}_0^\infty$ が存在する。

証明 1) $\Longleftrightarrow$ 2): 補題 2.4 より明らかである。

2) $\Longrightarrow$ 3): 2) で与えられた $y(n), n \in \mathbb{Z}$ を方程式 (LF) に代入すれば方程式 (RE) を得る。このとき方程式 (RE) から $(\nu E - K)y(1) = \nu(E-K)A(0)y(0)$ と $(\nu E - K)y(2) = \nu(E-K)A(1)y(1)$ が成り立つ。両辺に $\nu E - K$ を掛ければ

$$\begin{aligned}(\nu E - K)^2 y(2) &= \nu(\nu E - K)(E-K)A(1)y(1) \\ &= \nu^2 (E-K)^2 A(1)A(0)y(0)\end{aligned}$$

となる。帰納的に $(\nu E - K)^\omega y(\omega) = \nu^\omega (E-K)^\omega A(\omega-1)\cdots A(1)A(0)y(0)$ を得る。さらに $y(\omega) = \nu y(0)$ と (1) から

$$\nu(\nu E - K)^\omega y(0) = \nu^\omega (E-K)^\omega T(0)y(0) \tag{33}$$

または同じく $\nu K(\nu)^\omega y(0) = T(0))y(0)$ を得る。$y(0) \notin G_\nu(K)$ を示すため $y(0) \in G_\nu(K), y(0) \neq 0$ と仮定する。このとき $\nu \in \sigma(U_K(0)) \cap \sigma(K)$ であるから (K-4) は $(\nu E - K)^\omega y(0) = 0$ を示している。その結果 $\nu K(\nu)^\omega y(0) = 0$ である。よって $T(0)y(0) = 0$、すなわち、$y(0) = 0$ を得る。これは矛盾である。よって $y(0) \notin G_\nu(K)$ である。したがって 3) は 2) から導かれる。

3) $\Longrightarrow$ 2): $z(n)$ は初期条件 $z(0) = \eta$ を満たす非自明な方程式 (RE) の解とする。ここで $\eta \in \mathbb{C}^d$ は $\nu K(\nu)^\omega \eta = T(0)\eta,\ \eta \notin G_\nu(K)$ を満たす。上記の議論を繰り返せば方程式 (RE) の解 $z(n)$ は

$$(\nu E - K)^n z(n) = \nu^n (E-K)^n A(n-1)A(n-2)\cdots A(1)A(0)\eta \tag{34}$$

をみたす。$\eta \neq 0$ であるから $z(n) \notin G_\nu(K)$ である。実際、$z(n) \in G_\nu(K)$、すなわち、$(\nu E - K)^\omega z(n) = 0$ とすれば、条件 (A), (K) と (34) から $\eta = 0$ が成り立つ。これは矛盾である。

(33) 及び (34) を用いて

$$\begin{aligned}&(\nu E - K)^{n+\omega} z(n+\omega) \\ &\quad = \nu^{n+\omega}(E-K)^{n+\omega} \\ &\qquad\qquad \times A(n+\omega-1)A(n+\omega-2)\cdots A(\omega)A(\omega-1)\cdots A(1)A(0)\eta \\ &\quad = \nu^{n+\omega}(E-K)^{n+\omega}A(n+\omega-1)A(n+\omega-2)\cdots A(\omega)T(0)\eta \\ &\quad = \nu^n (E-K)^n A(n+\omega-1)A(n+\omega-2)\cdots A(\omega)\nu^\omega (E-K)^\omega T(0)\eta \\ &\quad = \nu^n (E-K)^n A(n-1)A(n-2)\cdots A(\omega)\nu(\nu E - K)^\omega \eta \\ &\quad = \nu(\nu E - K)^\omega [\nu^n (E-K)^n A(n-1)A(n-2)\cdots A(0)\eta] \\ &\quad = \nu(\nu E - K)^\omega [(\nu E - K)^n z(n)] \\ &\quad = \nu(\nu E - K)^{n+\omega} z(n).\end{aligned}$$

したがって $(\nu E - K)^{n+\omega}[z(n+\omega) - \nu z(n)] = 0$. (K-4) により $h_\nu(K) \le \omega$ であるから $(\nu E - K)^\omega [z(n+\omega) - \nu z(n)] = 0$. $y(n) = (\nu E - K)^\omega z(n)$ と置けば、方程式 $(\nu E - K)^\omega z(n+\omega) = \nu(E-K)^\omega z(n)$ より

$$y(n+\omega) = \nu y(n), n \in \mathbb{Z}_0^\infty$$

を得る。さらに $z(n) \notin G_\nu(K)$ であるから $y(n) \neq 0$ を確認することは容易である。$z(n)$ は方程式 (RE) の非自明解であるから $y(n)$ もやはり非自明解である。

実際、

$$\begin{aligned}(\nu E-K)y(n+1)&=(\nu E-K)(\nu E-K)^{\omega}z(n+1)\\&=(\nu E-K)^{\omega}[(\nu E-K)z(n+1)]\\&=(\nu E-K)^{\omega}[\nu(E-K)A(n)z(n)]\\&=\nu(E-K)A(n)[(\nu E-K)^{\omega}z(n)]\\&=\nu(E-K)A(n)y(n)\end{aligned}$$

であるから $y(n)$ は方程式 (RE) の解である。したがって、$y_n, n\in\mathbb{Z}_0^{\infty}$ は方程式 (LF) の (4) の形の非自明解である。 $\square$

References

[1] T. Buchner and J. J. Żebrowski, Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time-delay control of chaos, *Phys. Rev. E* **63** (2000), 06210.

[2] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations, 3rd Ed.*, Springer–Verlag, New York, (2005). doi:10.1007/978-1-4757-9168-6

[3] D. Kim, R. Miyazaki and J. S. Shin, Boundedness of solutions of periodic linear differential equations under commuting conditions for coefficient matrices, to appear in Hiroshima Math. J.

[4] D. Kim and J. S. Shin, Stability region of discrete linear periodic systems with periodic 2 via delayed feedback control, in preparation.

[5] R. Miyazaki, T. Naito and J. S. Shin, Delayed feedback control by commutative gain matrices, *SIAM J. Math. Anal.,* **43** (2011), 1122–1144. doi:10.1137/090779450

[6] K. Pyragas, Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A* **170** (1992), 421–428.

[7] J. S. Shin, R. Miyazaki and D. Kim, Stability region of discrete linear periodic systems with delayed feedback controls, *Advances in Continuous and Discreate Models*, (2023) 2023-35, https:doi.org/10.1186/s13662-023-03781-5

[8] 申, 宮崎, 金, 遅れのフィードバック制御を伴った離散線形周期系の安定領域, 数理解析研究所講究録 2288, (2024) 6,1-26.

[9] 申, 内藤, 線形微分方程式序説 第 1 巻 (2007)、第 2 巻 (2010)、牧野書店。

[10] J. Zhu and Y.-P. Tian, Necessary and sufficient conditions for stabilizability of discrete-time systems via delayed feedback control, *Physics Letters A* **343** (2005), 95–107. https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.03.029

[11] D. Yang and J. Zhou, Connections among several chaos feedback control approaches and chaotic vibration control of mechanical systems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*. **19** (2014), 3954–3968. doi:10.1016/j.cnsns.2014.04.001