

# 管楽器の遅延方程式モデル

九州大学 情報基盤研究開発センター; 秋杣株式会社 高橋 公也

Kin'ya Takahashi

Research Institute for Information Technology, Kyushu University; AcsiomA Ltd.

## 1 はじめに

管楽器の研究は極めて長い歴史をもち、科学的な発音機構の解明に限っても少なくとも Helmholtz の著書まで遡ることができる [1-3]。管楽器を大雑把に定義すると、音響的な共鳴器を持ち、歌口 (マウスピース) から空気流を流入させることで音波を発生させ、共鳴モードに近い周波数の音波を発生する楽器と言える [1-9]。ここで、管体ではなく共鳴器としたのは、オカリナのように Helmholtz 共鳴器を持つ楽器も管楽器に含まれるからである。通常、発振する音波の周波数は完全に共鳴モードに一致せず、歌口部分で起きる各種の相互作用により若干ずれる。管楽器の発音機構を考える時に、流体である空気流が歌口でどの様にして音波が変わるか、その音波が共鳴器をどの様にして駆動するか、その結果、(ほぼ) 共鳴モードの音波がどの様にして共鳴器内に蓄積し、演奏音が共鳴器からどの様に放射されるか、等の疑問が浮かぶ。

これらの疑問に答えることは簡単ではない。なぜなら、管楽器は様々な形状を持ち、形状ごとに発音機構が大なり小なり変わるからである。例外的な場合を除き、管楽器は、木管楽器、金管楽器と複数の共鳴器を持つ楽器に別れる [1-3]。木管楽器においてもサクソフォンやフルートのように金属で作られたものもあるので、その材質で分類するのは相応しくない。むしろ形状と機能の面から分類するのが妥当である。まず、現代の木管楽器は複数の音孔 (指孔) があり、それらを開閉することで音高を調節する楽器である。さらに、図 1 に示すように、歌口の取り付けられたリード (リードバルブ) の機能によって分類される [2]。リードは、1 枚または 2 枚の振動片を持つ開閉弁で、それが発振周波数に合わせて開閉することで、楽器に流入する空気流を調整する。図 1 (a) に示す 1 枚のリードを持つ楽器はシングルリード (木管) 楽器と呼ばれ、クラリネットやサクソフォンがこれに属する。図 1 (b) に示す 2 枚のリードを持つ楽器は、ダブルリード (木管) 楽器と呼ばれ、オーボエやバスーンがこれに属する。これに対し、図 1 (c) 示すようなリードバルブを持たない楽器は、エアリード楽器と呼ばれ、リコーダー、フルート、尺八等がこれに属する。この楽器では、歌口に取り付けられたエッジに空気ジェットを吹き付けることで音波を発生させる。余談ではあるが、(西欧の) 音楽音響学会では、エアリードという言葉は好まれない。なぜなら、空気ジェットの役割は、必ずしもリードバルブの役割に一致しないからである。そのためエアリード楽器を個々の名称で呼ぶことが多く、あえて総称として呼ぶ場合は “Flue instruments” や “Air-jet (driven) instruments” が使われる [2,6]。一方、金管楽器では、図 1 (d) に示すようにカップ状のマウスピースに唇をあて、唇の筋肉を緊張させることで共鳴モード周波数に合う振動を作り出す。そのため、リップリード楽器と呼ばれ音孔を持たない。しかし、管長から決まる共鳴モードは限られているので、全ての音階を演奏することは難しい。これを補うために、(現代の) 金管楽器では、トランペットやホルンのように管の途中に別の管を付け加えるバルブ機能を持つものやトロンボーンのように管長を変化させるスライド機能を持つものがある。パイプオルガンやパンパイプは、複数の共鳴器を持つ楽器に分類される。これらの楽器では、個々の管体は特定の周波数の音しかださない。パンパイプはエアリード楽器に分類されるが、パイプオルガンはフルー管とリード管を持ち、前者はエアリード楽器、後者はシングルリード楽器に分類される。それでは、このような管楽器の発音機構の研究をどの様に進めればよいか。1 つは、管楽器を連続体力学の

問題と考える手法である。エアリード楽器では、リードバルブのような振動体がないので、管壁の微小振動を無視すれば、静止した境界を持つ問題になる。この場合、流体と音波を同時に扱える圧縮性流体を用いた解析が有効である。リードバルブのある楽器では、リードを弾性体と考えれば、圧縮性流体と弾性体の連成解析の問題になる。これらの手法を用いれば、流体から音への変化を直接再現でき、流体音響学に基礎を置く解析が可能である [10–14]。そのためには、スーパーコンピュータを用いた大規模解析が有効であり、近年この方向の研究は急速に進んで来ている。特に、エアリード楽器の解析では重要な成果が得られている [15–19]。また、シングルリード楽器の解析も行われている [20–23]。大規模解析を用いた研究では、単に現象を再現するだけでなく、発音機構の力学的な特徴を捉えるような解析手法を開発することが重要である [16, 22, 23]。

もう1つは、ある仮定のもとで管楽器の特徴を捉えた力学モデルを構築し、そのモデルの力学的な解析から発音機構を解明する手法である。McIntyre, Schumacher, Woodhouse が示したように [24]、管楽器を時間領域で捉えると遅延方程式でモデル化できる。この場合、歌口部分でのリード振動や空気流の運動を非線形振動子でモデル化し、管体内を往復する音波が時間遅れのフィードバックを作り出す。遅延方程式モデルでの共鳴モードの発振は、力学系の分岐現象として捉えられる。シングルリード楽器では、Schumacher モデルや準静的モデルのように信頼できるモデルが提案されている [4, 25, 26]。また、リップリード楽器でも足立・佐藤モデル等が提案されている [6, 27, 28]。エアリード楽器でもジェットの運動を簡易化したモデルが提案されているが、上記の2つのモデルに比べて信頼度は低い [24]。共鳴器の共鳴モードに視点を置いたモデルもある [2]。このモデルでは、リードバルブは共鳴モードを励起する駆動源であり、モードの発振可能性や定常振動状態におけるモード間の相互作用と安定性等を周波数領域で議論するのに適している。近年、共鳴モードを減衰調和振動子とみなし、それと相互作用するリードバルブを非線形振動子としたモード方程式モデルが使われている [29–31]。このモデルを用いると時間領域の解析が可能になる。

この小論では、シングルリード木管楽器の遅延方程式モデルについて解説を行う。2章では、遅延方程式モデルについて解説を行う。3章では、筆者のこれまでの研究を中心に、遅延方程式モデルから得られたシングルリード木管楽器の力学的な特徴について解説する。4章では、遅延方程式から離れ、時間領域のモード方程式モデルの可能性について考察する。5章で本稿のまとめを行う。

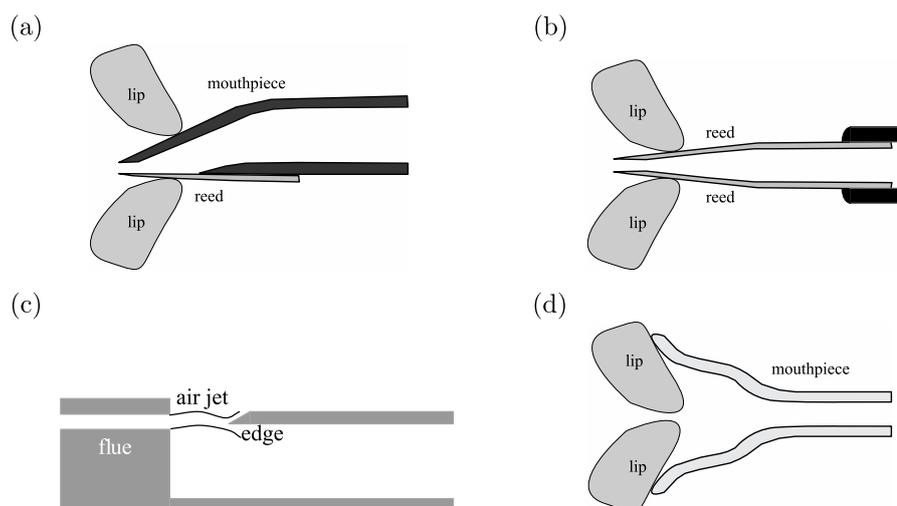


図1 リードの分類 (a) シングルリード (b) ダブルリード (c) エアリード (d) リップリード

## 2 シングルリード木管楽器のモデル

### 2.1 音波

流体的な流れのない状況における音波は、音圧  $p_a$  と音響的粒子速度  $\mathbf{v}$  で表される。この場合、音圧は圧力  $p$  と平衡状態の圧力 (大気圧)  $p_0$  の差  $p_a = p - p_0$  と考えれば良い。音響的粒子速度  $\mathbf{v}$  は、音響的な振動を表す流体粒子の速度である。流体粒子は、連続体力学の概念で、マクロな立場からは無限小と見なせる流体の塊で流体の流れに乗って移動しても他の流体粒子との区別は保たれるものである。音波の支配方程式は、圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式と連続の式を断熱過程のもとで線形近似すると求まる [11,12]。まず、Navier-Stokes 方程式を線形近似して粘性項を無視すると

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (1)$$

となる。ここで、 $\rho_0$  は平衡状態の流体の密度である。一方、連続の式の線形近似は、流体の密度を  $\rho$  とすると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

となる。音波は、断熱変化によって作られるので、断熱変化における  $p$  と  $\rho$  の関係を線形近似すると、

$$p - p_0 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) \quad (3)$$

となる。ここで、 $c_0^2 \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}$  と置くと、理想気体では、 $c_0 \propto \sqrt{T}$  ( $T$ : 絶対温度) となり、 $c_0$  は音速となる。実際、(2) 式を時間  $t$  で偏微分して、(1) 式と (3) 式を考慮すると音圧  $p_a$  の波動方程式

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = \nabla^2 p_a \quad (4)$$

が求まり、 $c_0$  が音波の位相速度 (音速) になる。音響的粒子速度  $\mathbf{v}$  に対しても以下の様な波動方程式が求まる。

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5)$$

したがって、 $p_a$  と  $\mathbf{v}$  は同じ波動方程式に従う。そこで、 $p_a = \bar{p}_a \exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 、 $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  と置いて、(1) 式に代入すると、 $\omega \rho_0 \mathbf{v} = \mathbf{k} p_a$  となり、 $\mathbf{v}$  は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と同じ向きになるので縦波である。さらに、 $c_0 = \omega/|\mathbf{k}|$  より、

$$|\bar{p}_a| = \rho_0 c_0 |\bar{\mathbf{v}}| \quad (6)$$

となり、通常、 $c_0 \gg 1$  なので音響的粒子速度は音圧に比べて極めて小さいことが分かる。

音波の境界条件について考える。固体壁面における音響的粒子速度  $\mathbf{v}$  では、その法線成分は Dirichlet 境界条件  $v_n = 0$  を満たし、粘性が無視できる場合は、壁面に対する並行成分  $v_{\parallel}$  は任意の値を取れる。完全な開口端では、法線成分は Neumann 境界条件  $\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0$  を満たし、また、 $v_{\parallel} = 0$  である。したがって、(1) 式より、音圧  $p_a$  は、固体壁面で  $\frac{\partial p_a}{\partial n} = 0$  となり、Dirichlet 境界条件ではなく Neumann 境界条件を満たす。一方、(2),(3) 式と大気への接続条件より、完全な開口端では  $p_a = 0$  となり、Dirichlet 境界条件を満たす。したがって、音圧の境界条件は媒質の変位に対する境界条件と逆になる。音波が縦波であり、音圧が固体壁面で

Neumann 境界条件を満たすことから、細い管では、管の軸に沿った 1 次元波が伝搬可能である。すなわち、周波数が低く断面上のモードは立たない場合でも、管長から決まる固有振動数  $\omega_n = c_0 k_n$  のモードが励起される。この場合、各時刻の各断面で  $p_a$  は一定値となる。断面積が緩やかに変化する場合でも、1 次元的な波は維持され、Webster 方程式を用いて近似的に表すことができる [2]。ただし、断面の寸法が音波の波長程度にまで増大するの断面上のモード成分励起され、軸方向の波に摂動として作用する。金管楽器のベルの部分では、このようなことが起きていると考えられ、1 次元波の近似が悪くなる。以下では、管を伝搬する波は 1 次元であると仮定する。この場合、軸方向の音響的粒子速度  $v$  に断面積  $S$  を掛けた体積流量  $U = Sv$  を考えるのが自然であり、(6) 式は、

$$p_a = \frac{\rho_0 c_0}{S} U = Z_0 U \quad (7)$$

と書き換えられる。 $Z_0$  を特性音響インピーダンスと言う [2]。

## 2.2 シングルリード木管楽器

現代のシングルリード木管楽器は、円筒状の管体を持つクラリネットと円錐状の管体を持つサクソフォンに分類される。クラリネットは、マウスピースと管端のベル以外はほぼ円筒状の管体を持ち、演奏時のリードスリットの開口高さは 1mm 以下になり、マウスピースはほぼ閉じているので、閉管 (片端が閉じた円筒管) と見なせる。そのため、低音領域の発振音の周波数スペクトルをみると奇数次モードが優勢になる。閉管の最低音の波長は管長の 4 倍になるので、短い管長で低い音がだせる。最もポピュラーな  $B\flat$  管は、65cm 程度の管長を持ち、その最低音は約 147Hz で音名では  $D_3$  (レ) である。ここで、音名の数字の添え字は、ピアノの鍵盤で下から 3 番目のオクターブを表し、(ソプラノ記号の) 五線譜の音域より 1 オクターブ低い音域になる。

サクソフォンは、クラリネットよりもやや小ぶりのマウスピースを持ち、マウスピースと管端のベル以外はほぼ円錐状の管体を持つ。ソプラノサクソフォン以外では演奏に便利のように管の両端が大きく曲がっているが、真っ直ぐに引き伸ばせば円錐状になる。円錐状の管体を持つ管楽器は、開管楽器 (両端が開いた円筒管を持つ楽器) と呼ばれる [2,3]。これは、円錐形状の管が開管と同じモード周波数を持つからである。円錐管の内部では平面波ではなく球面波が伝搬するので、そのモード周波数を計算すると開管と同じ周波数になることが分かる [3]。開管の最低音の波長は管長の 2 倍になるので、同じ管長を持つ場合は、クラリネットに比べてサクソフォンの最低音は高くなる。例えば、約 70cm の管長をもつソプラノサクソフォンの最低音は約 208Hz で音名は  $G_3^\#$  (ソ #) で、少し管長が短い  $B\flat$  管クラリネットよりも高い。

円筒管と円錐管の違いは、単にモード周波数だけでない。後で述べるように、楽器を遅延系としてみた時の遅延構造に大きな違いがある。円筒形状のクラリネットは、近似的に離散遅延系と見なせ、少数の音孔を開いた場合は多重遅延系と考えることができる。一方、円錐形状のサクソフォンは、広がっていく円錐側面からの連続的な反射のために、連続的な遅延を持つ。このような違いは、大域的な発音機構 (分岐の性質やアトラクターの構造) の違いを生み出す。

## 2.3 管楽器の遅延方程式モデルの概要

1981 年に、Schumacher はシングルリード木管楽器の実用的な遅延微分方程式モデルを提案した [25]。1983 年に、McIntyre, Schumacher, Woodhouse は、管楽器が遅延方程式でモデル化できることを示した [24]。図 2 に、遅延方程式モデルの概要を示す。口から流入した空気流は、リードバルブで音波に変換され管体への入射波になる。入射した音波は管体内を伝搬し、音波の大部分は開口端や音孔で反射され再びリードバルブに

戻ってくる。戻ってきた反射波に口からの空気流が作り出す音波が加わり次の入射波になる。この過程を繰り返すと定常的な発振状態になる。また、開口端や音孔から漏れ出した放射音が演奏音になる。楽器の外に漏れ出る音はわずかなので、管体内には強い共鳴音場が作られる。したがって、反射波が遅延フィードバックを作り出すので、管楽器は遅延系とみなせる。

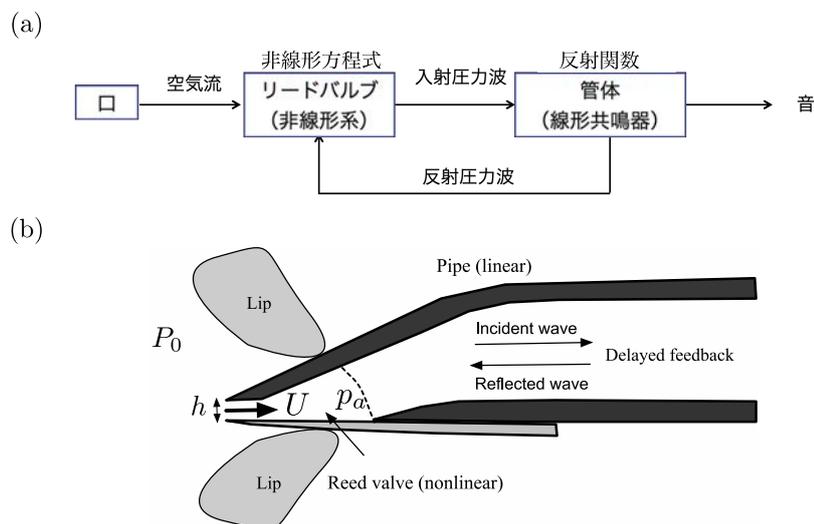


図2 シングルリード木管楽器の遅延方程式モデルの概要 (a) 管楽器のフィードバックモデル (b) 管体とリードバルブの仮想的な分離と力学量 (文献 [9] から転載)

管楽器の力学的なモデル化には次の2つの仮定が必要である。1つは、口から流入する流体的な体積流量がそのまま音響的な体積流量  $U$  に変化し、音圧  $p_a$  が (7) 式にしたがって発生すると仮定することである [4, 24, 25]。流体から発生する音波は空力音 (流体音) と呼ばれ、流体音響学の重要な問題であり [10–12]、リードバルブ内のどの場所でもどの様にして空気流が音波に変化するかを厳密に予想することは簡単ではない [22, 23]。ただし、流体的な体積流量が音響的な体積流量に変化する過程で、密度変動が小さいとすれば、近似的に運動量保存則が成り立つので、流体的な運動量が音響的な運動量に変化したと仮定すれば、(7) 式にしたがって発生音圧を予測することは可能である。この過程では、運動エネルギーは保存されないため、発生した音響的なエネルギーは流体的なエネルギーに比べて極めて小さく、多く見積もっても 10% 以下である。

もう1つの仮定は、リードバルブと管体を仮想的に分離できるとすることである [4, 24, 25]。リードバルブは、開閉する振動弁で主に口腔内吹鳴圧  $P_0$  とリード内音圧  $p_a$  の圧力差によって駆動され、管体に流入する空気流量を制御し、音圧を発生させる非線形振動子である [2, 4, 25]。管体は、リードバルブから入射波を受け取り遅延的な応答を作り出す線形素子で、その応答は反射関数と呼ばれる管体の特性関数で与えられる [25]。

## 2.4 反射関数

図3に示すように、反射関数  $r(t)$  は、管体の入力端から圧力の  $\delta$  パルス送り込み、反射してきた波を観測したものである [25]。反射波は、入力端で吸収され再び入射波になることはないとする。図3(a)に示すように、管が直管の場合は、入力端の後方と同じ断面を持つ半無限の管を繋げることで吸収条件を作り出せる。図3(b)に、円筒管に  $\delta$  パルスを入射させたときの反射関数  $r(t)$  を示す。管長を  $L$  とすると、開口端は音圧に対しては閉端のように振る舞うので、 $t = 2L/C_0$  で負のパルスが戻ってくる。この場合は、ほぼ1重遅延を作

り出す。後で示すように、管体形状が複雑でさらに音孔がある場合は、反射関数  $r(t)$  は複雑な関数になり、多重遅延や連続遅延を作り出す。開口端で音圧は  $p_a = 0$ 、すなわち圧力  $p$  が大気圧  $p_0$  になることから、管体に直流抵抗 (流体的な粘性抵抗等) が働かない場合には、

$$\int_0^{\infty} r(t)dt = -1 \quad (8)$$

となる [25]。直流抵抗を考慮しても、通常、その絶対値が数 % 程度小さくなるだけである [25]。

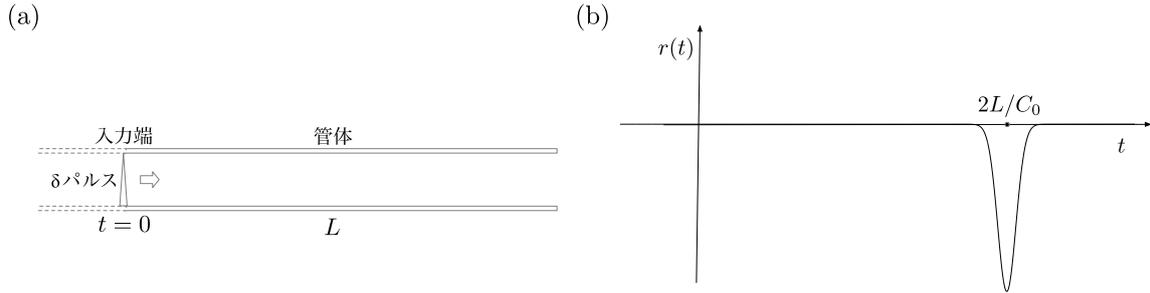


図3  $\delta$ パルスの入力した時の反射関数 (a) 管体と  $\delta$ パルスの入力 (b) 反射関数  $r(t)$ (模式図)

一般に、管体への入射波を  $p_{in}(t)$  とし反射波を  $p_{ref}(t)$  とすると、これらの関係は反射関数  $r(t)$  を用いて、

$$p_{ref}(t) = \int_0^{\infty} r(\tau)p_{in}(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

と表せる。図 2(b) に示すように、リードバルブ部分は細いスリットを除きほぼ閉じているので、反射波  $p_{ref}$  はリードバルブ内で反射する。一方、口腔からの体積流量  $U$  は (7) 式にしたがって音圧  $p_U = Z_0U$  を作り出す。したがって、 $p_{ref}$  と  $p_U$  は、以下のように入射波  $p_{in}$  を作り出す。

$$p_{in} = p_{ref} + p_U = p_{ref} + Z_0U \quad (10)$$

(9),(10) 式を使って計算すると、リードバルブ内音圧  $p_a$  は以下のように与えられる [25]。

$$\begin{aligned} p_a(t) &= p_{in}(t) + p_{ref}(t) \\ &= Z_0U(t) + \int_0^{\infty} r(\tau)(p_a(t-\tau) + Z_0U(t-\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

これは、音圧  $p_a(t)$  と体積流量  $U(t)$  を反射関数  $r(t)$  が作り出す遅延を介して関連づける式である。ここで、後の便利のために、畳み込み積分を以下のように、 $p_{inc}(t)$  と置く。

$$p_{inc}(t) \equiv \int_0^{\infty} r(\tau)(p_a(t-\tau) + Z_0U(t-\tau)) d\tau \quad (12)$$

## 2.5 リードバルブの準静的モデル

リードバルブの機能を記述するためには、リード振動と空気流の運動をモデル化しなければならない。図 2 (b) に示すように、そのために最低限必要な力学量は、口腔内吹鳴圧  $P_0$ 、リード開口高さ  $h$ 、リードを通過する体積流量  $U$ 、リードバルブ内音圧  $p_a$  である。ここで、 $P_0$  は、口腔内圧力  $P$  から大気圧  $p_0$  を引いたもの

で、 $P_0 = P - p_0$  である。また、 $U$  はリードを通過する空気流の流速  $v$  と断面積  $wh$  ( $w$ :リードの奥行き幅) の積で、 $U = h w v$  で与えられる。

この節では、準静的な仮定のもとでリード開口高さ  $h$  や流速  $v$  を記述するモデル (準静的モデル) を導入する [4,6]。そのためには、リードの固有振動数が発振周波数に比べて十分に高く、リードはリードバルブ内の圧力変動にたいして追従すると仮定する。一方、空気流はリードの変動に対し瞬時に定常流に達すると仮定する。さらに、リード通過時の空気流は、非圧縮性流体で近似できると仮定し、Bernoulli の定理を用いて流速  $v$  を近似する。リード通過時は非圧縮性流体として振る舞うので、圧縮性流体で記述される流体から音波への変化は通過直後のリードバルブ内で起きると仮定する。

楽器を吹鳴していない状態 ( $p_a = P_0 = 0$ ) では、リードは少し開いている。その時のリード開口高さを  $h = h_0$  とし、リード静止開口高さと呼ぶ。リードは、 $p_a < P_0$  で閉じる方向に動き、 $p_a > P_0$  で開く方向に動くので、このタイプのリードを「内向き発振型リード」または「内向き開閉ドア」と呼ぶ [1,2]。リードの固有振動数が発振周波数よりも十分に大きい時は、強制振動理論の弾性制御領域にあるので、リードの変位は圧力差  $p_a - P_0$  に比例すると仮定する。リードの実効バネ定数を  $k$  とすると、 $h$  は、

$$\begin{cases} k(h - h_0) = p_a - P_0 \equiv -\Delta p & (\Delta p < \Delta p_M) \\ h = 0 & (\Delta p \geq \Delta p_M) \end{cases} \quad (13)$$

で与えられる。ここで、 $\Delta p = P_0 - p_a$  である。ただし、 $h = 0$  となる音圧を  $p_M (= P_0 - k h_0)$  とすると  $p_a \leq p_M$  でリードは閉じてしまうので、 $\Delta p_M \equiv P_0 - p_M$  とすると、 $\Delta p \geq \Delta p_M$  で  $h = 0$  となる。

口腔の体積が、リードスリットを通過する体積流量  $U$  に比べて十分に大きいと考えれば、口腔内の流速はほぼゼロであり、Bernoulli の定理を使うと、 $h > 0$  の時の  $v$ ,  $p_a$ ,  $P_0$  の関係は以下式で与えられる。

$$P_0 = p_a + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \quad (14)$$

この近似の妥当性は実験を交えて様々な角度から議論されていて、準静的領域では妥当であり、体積流量  $U$  は、以下の式でほぼ与えられると結論づけられている [4,32-34]。

$$U = h w v = \begin{cases} h w \sqrt{2|P_0 - p_a|/\rho_0} \operatorname{sgn}(P_0 - p_a) = h w \sqrt{2|\Delta p|/\rho_0} \operatorname{sgn}(\Delta p) & (\Delta p < \Delta p_M) \\ 0 & (\Delta p \geq \Delta p_M) \end{cases} \quad (15)$$

ここで、符号関数  $\operatorname{sgn}$  を導入したのは、 $p_a > P_0$  の時の逆流  $U < 0$  を考慮するためである。ただし、実験によれば発振状態で逆流が起きることはない [7,35-37]。(13), (15) 式より、 $U$  は以下式で与えられる [4,40]。

$$U = \begin{cases} u_0 \left(1 - \frac{\Delta p}{\Delta p_M}\right) \sqrt{\frac{|\Delta p|}{\Delta p_M}} \operatorname{sgn}(\Delta p) & (\Delta p < \Delta p_M) \\ 0 & (\Delta p \geq \Delta p_M) \end{cases} \quad (16)$$

ここで、 $u_0 = w h_0 \sqrt{2k h_0 / \rho_0}$  である。これは、吹鳴圧  $P_0$  が与えられたときの音圧  $p_a$  と体積流量  $U$  の関係を与える式である。(11) 式と組み合わせると、その交点より現時刻の  $p_a(t)$  と  $U(t)$  が求まる。

## 2.6 遅延写像モデルの分岐現象

準静的モデル (16) と (11) 式を組み合わせると遅延写像方程式を構成できる。(16) 式は、 $\Delta p < \Delta p_M$  の領域で上に凸の曲線なので、以下の式のような 2 次関数に置き換えたモデルでも、楽器の発振の基本的な特徴を

調べることができる [24, 38]。

$$U = \begin{cases} C(p_a - p_M)(P_0 - p_a) & (p_a > p_M) \\ 0 & (p_a \leq p_M) \end{cases} \quad (17)$$

ここで、 $C = u_0/\Delta p_M^2$  である。図 4 に、 $Z_0 = 1$ ,  $C = 1$ ,  $P_0 - p_M = 1$ ,  $P_0 = 0.8$  の時の準静的モデル (17) と (11) 式の関係を示す。交点が現時刻の  $p_a$  と  $U$  になる。

遅延写像モデルを構築するために、時間を離散化して、 $t_i = i\Delta t$  とし、離散時間における力学量  $x(t)$  の値を  $x_i = x(t_i)$  のように書くと、畳み込み積分 (12) は、以下のように書き直せる。

$$p_{inc,i} = \sum_{j=1}^{\infty} r_j(p_{a,i-j} + Z_0 U_{i-j})\Delta t \quad (18)$$

図 4 から分かるように、直線 (11) は  $p_{inc}$  の値によってスライドする。したがって、 $p_{inc,i}$  の値が決まれば、交点から現時刻の  $p_{a,i}$  と  $U_i$  が求まり、 $p_{a,i}$  と  $U_i$  から次の時刻の  $p_{inc,i+1}$  が求まる。 $\Delta t$  を十分に小さく取れば良い精度の計算が可能である。簡単のために完全開口端反射を考え、反射関数を

$$r(t) = -\delta(t - n\Delta t) \quad (19)$$

と置き、 $r_n\Delta t = 1$ ,  $r_j = 0 (j \neq n)$  とすると、(18) 式は以下のようにになる。

$$p_{inc,i} = -(p_{a,i-n} + Z_0 U_{i-n}) \quad (20)$$

さらに、 $n = 1$  と置き、(11) 式に代入し、(17) 式との交点を求め、(20) 式を再び使えば、 $p_{inc,i}$  から  $p_{inc,i+1}$  への一次元写像が求まる。

$$p_{inc,i+1} = f(p_{inc,i}) \quad (21)$$

ここで、 $f(p_{inc,i})$  は、以下の式で与えられる [38]。

$$f(p_{inc,i}) = \begin{cases} p_{inc,i} + (a - P_0 - p_M) - \sqrt{(P_0 - p_M)^2 - 2a(p_M + P_0) + a^2 + 4ap_{inc,i}} & (p_{inc,i} > p_M) \\ -p_{inc,i} & (p_{inc,i} \leq p_M) \end{cases} \quad (22)$$

ここで、簡単のために  $Z_0 = 1$ ,  $a = 1/C$  と置いた。写像 (21) は、吹鳴圧  $P_0$  を分岐パラメーターにとると、図 5 に示すように周期倍分岐を起こし、楽器が発振した状態を再現する。この図のパラメーター設定では、周期倍分岐は  $P_0 = 0.5$  で 1 回だけ起きカオスになることはない [38]。図は、(a) 分岐前 ( $P_0 = 0.4$ ) の固定点へ漸近する解 (発振しない状態) と、(b) 分岐後 ( $P_0 = 0.8$ ) の周期解へ漸近する解 (発振した状態) を表す。

図 3(b) のような反射関数を与えた場合は、Hopf 分岐による発振が起きるが、分岐のメカニズムはほぼ写像系に近い。しかし、2つのピークを持つ反射関数を用いると分岐現象の様相は大きく変化する。通常、遅延系は潜在的に発振可能なモードが複数ある多重アトラクター系であるが、2重遅延系の場合には、最初に発振するモードの周波数は遅延時間比によって極めて敏感に変化する [38]。1重遅延系では、発振可能なモードは基音や倍音だけであるが、2重遅延系では、それらの他にリードバルブの非線形性と遅延の相乗効果により、波形が極端に変形した振動、2種類のモードが混合したような波形をもつ振動、さらに、準周期的な振動も観測される [8, 38, 39]。(16) 式を用いたより精密なモデルでも同様な分岐が起き発振する [4, 40]。

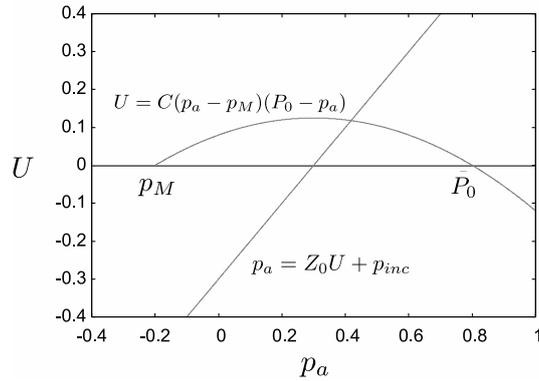


図4 準静的モデル (17) と (11) 式:  $Z_0 = 1$ ,  $C = 0.5$ ,  $P_0 - p_M = 1$ ,  $P_0 = 0.8$

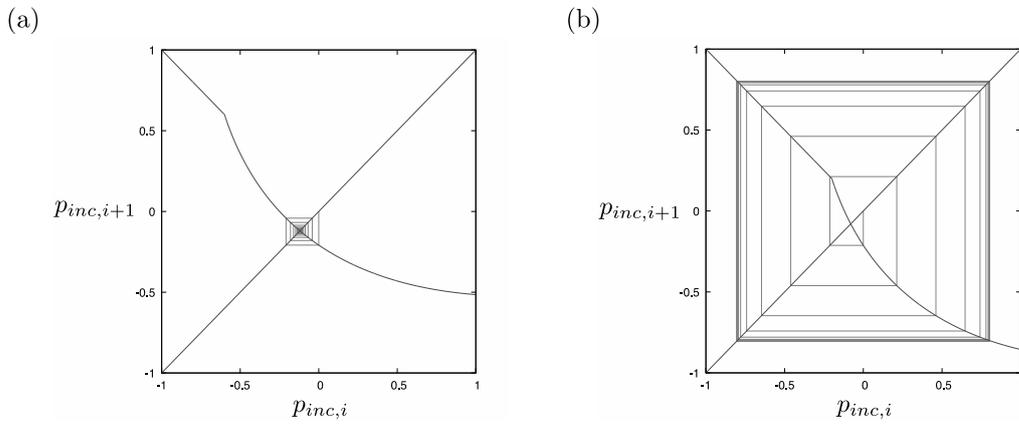


図5 写像モデル (22) の分岐 (文献 [38] の図を描き直した):  $Z_0 = 1$ ,  $C = 0.5$ ,  $P_0 - p_M = 1$  (a)  $P_0 = 0.4$   
(b)  $P_0 = 0.8$

## 2.7 遅延微分方程式モデル

リード振動や空気流を微分方程式で記述すれば、遅延微分方程式モデルを作ることができる。リードは、圧力差  $p_a - P_0$  で駆動される減衰調和振動子と見なせば、以下の方程式で記述される [25]。

$$\ddot{h} + g_r \dot{h} + \omega_0^2 (h - h_0) = \frac{p_a - P_0}{\mu}, \quad (23)$$

ここで、 $\mu$  は実効質量、 $g_r$  は実効減衰定数、 $\omega_0$  はリードの角振動数である。この式の右辺に Bernoulli 力の項を付け加える場合もあるが [25]、通常は小さいので無視することが多い。この式で求めたリード開口高さ  $h$  を (15) 式に代入すれば体積流量  $U$  が求まり、(11) 式と組み合わせると遅延微分方程式モデルになる [26]。リード振動に微分方程式モデルを用い、空気流に準静的モデルを用いるので、不整合なモデルのように思えるが、取り扱うのが簡単なので使われることが多い。特に、4 章で議論する時間領域のモード方程式モデルを扱うにはこの形式のモデルが適している [29, 30]。

リードを通過する体積流量を記述する微分方程式は、Schumacher によって与えられた [25]。

$$M_e \dot{U}_f = P_0 - p_a - \frac{|U_f|^{3/2} \text{sgn}(U_f)}{A^{3/2} h^2}, \quad (24)$$

ここで、 $U_f$  は口腔から流れ込む体積流量であるが、リードバルブ内の全体積流量  $U$  は、

$$U = U_f - S_r \dot{h} \quad (25)$$

で与えられ、(11) 式の計算には  $U$  が使われる。 $S_r$  はリードの実効面積で、 $-S_r \dot{h}$  は振動するリードが作り出す体積流量であるが、この項は  $U_f$  比べ相対的に小さいので無視される場合もある。 $M_e$  は Sivian によって計算されたリードスリットを通過する空気の実効質量で、以下の式で与えられる [41]。

$$M_e(h) = \frac{\rho_0}{2\pi w} \sqrt{\frac{w}{h}} \left(1 + 2 \ln\left(\frac{2w}{h}\right)\right) \quad (26)$$

(24) 式の左辺で  $\dot{U}_f = 0$  とすれば準静的な状態が得られるが、右辺は、Bernoulli の定理を使って求めた (15) 式に一致しない。これは、右辺の最後の項を Backus の実験によって得られた準静的な状態のリード開口高さ  $h$  と体積流量  $U_f$  の関係に合わせたためである [42]。ただし、その後のより精密な実験により  $h$  と  $U_f$  の関係は Bernoulli の定理から求めたものに近いことが示されているので [32–34]、この項は見直す必要がある。このような問題点はあるが、大雑把に見れば (24) 式は 1 次元の Euler 方程式に近いものであり、右辺の最後の項は移流項のような働きをしていると言える。(23)–(26) 式を (11) 式と組み合わせると遅延微分方程式モデル (Schumacher モデル) が得られる。

## 2.8 管体の反射関数

### 2.8.1 インピーダンスと反射関数

この節では、管体の特性関数である入力インピーダンス  $Z_I(\omega)$  と反射関数  $r(t)$  の計算方法とその特徴について解説する [2, 25]。時間領域の特性関数である反射関数  $r(t)$  は遅延構造を与え、周波数領域の特性関数である入力インピーダンス  $Z_I(\omega)$  は管体の共鳴構造 (共鳴ピーク) を与える。入力インピーダンス  $Z_I(\omega)$  は等価回路理論を用いて計算可能であり、 $Z_I(\omega)$  が与えられると反射関数  $r(t)$  が計算できる [25, 43, 44]。

等価回路理論では、音圧  $p_a$  と体積流量  $U$  をそれぞれ電気回路の電圧  $V$  と電流  $I$  とみなす。管体は図 6 (a) に示す 4 端子回路になる。周波数領域における入力端と出力端の音圧と体積流量を、それぞれ  $\tilde{p}_I(\omega)$ ,  $\tilde{U}_I(\omega)$ ,  $\tilde{p}_E(\omega)$ ,  $\tilde{U}_E(\omega)$  とすると、これらは伝搬行列  $T$  を用いて以下のように関係付けられる [44]。

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_I \\ \tilde{U}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_E \\ \tilde{U}_E \end{pmatrix} \quad (27)$$

入力端の音圧と体積流量の比  $Z_I(\omega) = \tilde{p}_I(\omega)/\tilde{U}_I(\omega)$  を入力インピーダンスと言う。いま、出力端が管端だとすると、そこでの音圧と体積流量の比は放射インピーダンスと呼ばれ、 $Z_R(\omega) = \tilde{p}_E(\omega)/\tilde{U}_E(\omega)$  で与えられる。図 6 (b) に示すように、放射インピーダンスは音響的な負荷として働く。伝搬行列  $T$  と放射インピーダンス  $Z_R(\omega)$  が与えられると、入力インピーダンス  $Z_I(\omega)$  は以下のように求まる。

$$Z_I(\omega) = \frac{t_{11}(\omega)Z_R(\omega) + t_{12}(\omega)}{t_{21}(\omega)Z_R(\omega) + t_{22}(\omega)} \quad (28)$$

次に、反射関数について考える。管内の波は進行波と後退波の重ね合わせで表せる。入力端  $x = 0$  における角周波数  $\omega$  の音圧の進行波  $p_+(t, x; \omega)$  と後退波  $p_-(t, x; \omega)$  は、

$$\begin{aligned} p_+(t, x = 0; \omega) &= \tilde{p}_+(\omega) e^{i(\omega t - kx)}|_{x=0} \\ p_-(t, x = 0; \omega) &= \tilde{p}_-(\omega) e^{i(\omega t + kx)}|_{x=0} \end{aligned} \quad (29)$$

で与えられる。一方、(1) 式を考慮すると、体積流量の進行波  $U_+(t, x; \omega)$  と後退波  $U_-(t, x; \omega)$  は、

$$\begin{aligned} Z_0 U_+(t, x = 0; \omega) &= \tilde{p}_+(\omega) e^{i(\omega t - kx)}|_{x=0} \\ Z_0 U_-(t, x = 0; \omega) &= -\tilde{p}_-(\omega) e^{i(\omega t + kx)}|_{x=0} \end{aligned} \quad (30)$$

で与えられる。音圧  $p_a$  と体積流量  $U$  は、それぞれの進行波と後退波の重ね合わせになるので、入力端 ( $x = 0$ ) の  $\tilde{p}_I(\omega)$  と  $\tilde{U}_I(\omega)$  は、

$$\begin{aligned} \tilde{p}_I(\omega) &= \tilde{p}_+(\omega) + \tilde{p}_-(\omega) \\ Z_0 \tilde{U}_I(\omega) &= \tilde{p}_+(\omega) - \tilde{p}_-(\omega) \end{aligned} \quad (31)$$

となる。 $\tilde{p}_I = Z_I \tilde{U}_I$  を考慮して、この式から  $\tilde{p}_+(\omega)$  と  $\tilde{p}_-(\omega)$  を書き下すと

$$\begin{aligned} \tilde{p}_+(\omega) &= \frac{1}{2}(\tilde{p}_I(\omega) + Z_0 \tilde{U}_I(\omega)) = \frac{1}{2}(Z_I(\omega) + Z_0) \tilde{U}_I(\omega) \\ \tilde{p}_-(\omega) &= \frac{1}{2}(\tilde{p}_I(\omega) - Z_0 \tilde{U}_I(\omega)) = \frac{1}{2}(Z_I(\omega) - Z_0) \tilde{U}_I(\omega) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。したがって、周波数領域の反射率  $\tilde{r}(\omega)$  は、

$$\tilde{r}(\omega) = \frac{\tilde{p}_-(\omega)}{\tilde{p}_+(\omega)} = \frac{Z_I(\omega) - Z_0}{Z_I(\omega) + Z_0} \quad (33)$$

与えられ、これを逆 Fourier 変換  $\mathcal{F}^{-1}$  で時間領域に変換すると反射関数  $r(t)$  が求まる [25]。

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1} \frac{Z_I(\omega) - Z_0}{Z_I(\omega) + Z_0} \quad (34)$$

ここで、 $r(t)$  は遅延応答関数で  $t > 0$  で定義されているので、 $t \leq 0$  で、 $r(t) = 0$  とおいて形式的に Fourier 変換を行い、 $\omega = 0$  とすれば、

$$\int_0^\infty r(t) dt = \mathcal{F} r(t)|_{\omega=0} = \tilde{r}(\omega = 0) = \frac{Z_I(\omega = 0) - Z_0}{Z_I(\omega = 0) + Z_0} \quad (35)$$

となる。 $Z_I(0)$  は直流抵抗になるので、抵抗がない場合 ( $Z_I(0) = 0$ ) には、(35) 式は (8) 式になる。直流抵抗は、円筒管の場合は Hagen-Poiseuille の式を用いれば求まる。任意の形状の管体では、短い円筒管を繋いだもので形状を近似して計算をすればよい。クラリネットでは、積分 (35) は  $-0.98$  程度の値になる [25]。

## 2.8.2 伝搬行列と放射インピーダンス

最初に、理想的な場合として、長さ  $L$  の閉管で直流抵抗がなく管端が完全な開口端の場合を考える。管内を減衰しない平面波が伝搬するので、多少の計算の後、伝搬行列は以下のように求まる [2]。

$$T = \begin{pmatrix} \cos kL & iZ_0 \sin kL \\ iZ_0^{-1} \sin kL & \cos kL \end{pmatrix} \quad (36)$$

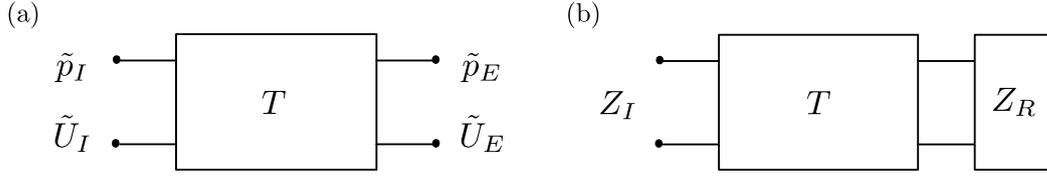


図6 管体の等価回路モデル (a) 4端子回路 (b) 管体の等価回路

完全な開口端を考慮するので、管端で体積流量  $U$  は有限の値を取るが、音圧は  $p_a = 0$  となるので、 $Z_R = 0$  となる。したがって、(28) 式に、(36) 式の行列要素を代入し、 $Z_R = 0$  とすると、 $Z_I$  は以下のように求まる。

$$Z_I(\omega) = iZ_0 \tan kL = Z_0 \frac{1 - e^{-i2kL}}{1 + e^{-i2kL}} = Z_0 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-i2nkL}\right) \quad (37)$$

ここで、最右辺の展開は数学的には問題があるが、物理的には理にかなった結果をもたらす。実際、この結果を用いて (33) 式を書き直すと、

$$\tilde{r}(\omega) = \frac{Z_I(\omega) - Z_0}{Z_I(\omega) + Z_0} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-i2nkL}}{2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-i2nkL}} = -e^{-i2kL} \quad (38)$$

となり、 $k = \omega/c_0$  を考慮して、逆 Fourier 変換を行うと、

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1} \tilde{r}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{r}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = -\delta(t - 2L/c_0) \quad (39)$$

となる。これより、時刻  $t = 2L/c_0$  で負の  $\delta$  パルスが戻ってくるので予想通りの結果である。さらに、(37) 式からモード周波数も求まる。入力端を完全に閉じているとすると、常に  $U = 0$  であるが、共鳴状態では  $p_a$  は有限の値を取るなので、入力インピーダンスは  $Z_I \rightarrow \infty$  となる。 $\tan kL$  が  $kL = \pi/2 + n\pi$  で発散するので、モード周波数は  $\omega_{2n+1} = (2n+1)\pi c_0/2L$  となり、閉管の奇数次のモードが得られる。

現実の管体では、粘性等による減衰があり、開口端における反射も完全ではなく音波の一部は透過し演奏音になり、それらは周波数に依存して変化する。まず、管体内の音波の波数を  $k \rightarrow k - i\kappa$  と書き直すと

$$\begin{aligned} p_+(t, x; \omega) &= \tilde{p}_+(\omega) e^{i(\omega t - kx) - \kappa x} \\ p_-(t, x; \omega) &= \tilde{p}_-(\omega) e^{i(\omega t + kx) + \kappa x} \end{aligned} \quad (40)$$

となり伝搬するにつれ減衰する波が得られる。これらを用いて伝搬行列を計算すると

$$T = \begin{pmatrix} \cosh \Gamma L & \zeta_0 \sinh \Gamma L \\ \zeta_0^{-1} \sinh \Gamma L & \cosh \Gamma L \end{pmatrix} \quad (41)$$

となる [44]。ここで、 $\Gamma = \kappa + ik$  と  $\zeta_0 = \frac{i\rho_0\omega}{S\Gamma}$  である。先端を切り取った円錐管体に対する伝搬行列を計算するには、減衰する平面波ではなく減衰する球面波を考えればよい。減衰がある場合の円筒管と円錐管の伝搬行列のより厳密な計算は、文献 [43, 44] で与えられている。

現実の管体は、単純な円筒管や円錐管ではない。開口端には通常ベル (別名朝顔) と呼ばれる広がっていく部分がある。また、マウスピースの形状は楽器によって様々であり、シングルリードのマウスピースでは断面が円でない部分もある。さらに、曲がった管体を持つ楽器もある。その様な場合、音波は管体の中心軸に沿って伝搬すると仮定し、中心軸を直線になるように変形し、断面が円でないものは同じ面積を持つ円に変換し、

管体を軸対称にする。このような管体を等価音響管と呼ぶ。実際の等価音響管は、図7に示すような複雑な形状をしているが、これを複数の円筒管や円錐管で近似する。各部分の伝搬行列を  $T_i$  とすると、管全体の伝搬行列は以下のように伝搬行列の積で表すことができる。

$$T = T_1 T_2 \cdots T_n \quad (42)$$

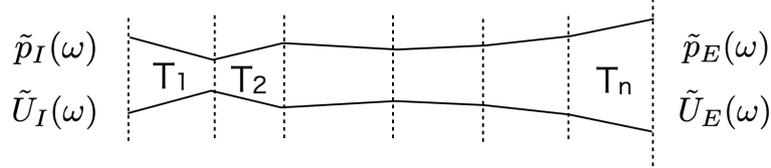


図7 等価音響管と伝搬行列

理論的に放射インピーダンス  $Z_R(\omega)$  が計算できるのは、フランジ付きパイプとフランジなしパイプである [2]。フランジ付きパイプは、平板にパイプ断面と同じ形状の穴を開けそれに垂直にパイプを繋げたものである。フランジ付きパイプの放射インピーダンスは、Rayleigh によって計算され、 $Z_R(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$  とし、パイプの半径を  $a$  とすると、以下ようになる [45]。

$$R(\omega) = Z_0 \left( 1 - \frac{J_1(ka)}{ka} \right) \approx Z_0 \left( \frac{(ka)^2}{2} - \frac{(ka)^4}{2^2 \cdot 3} + \frac{(ka)^6}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} - \cdots \right) \quad (43)$$

$$X(\omega) = \frac{Z_0 \mathbf{H}_1(2ka)}{ka} \approx \frac{Z_0}{\pi k^2 a^2} \left( \frac{(2ka)^3}{3} - \frac{(2ka)^5}{3^2 \cdot 5} + \frac{(2ka)^7}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \cdots \right) \quad (44)$$

ここで、 $J_1$  は Bessel 関数、 $\mathbf{H}_1$  は Struve 関数である。フランジなしパイプの放射インピーダンスは、Levine と Schwinger によって与えられたが [46]、積分を含む複雑な式になるので、以下の様な近似式を用いると便利である [44]。

$$Z_R(\omega) \approx \begin{cases} Z_0 (0.25(ka)^2 + 0.082(ka)^4 \ln ka - 0.023(ka)^6 \\ \quad + i(0.6133ka - 0.036(ka)^3 + 0.034(ka)^3 \ln ka - 0.0187(ka)^5)) & (ka < 1.5) \\ iZ_0 \tan\left(ka\mathcal{L} + i\frac{1}{2} \ln \mathcal{R}\right) & (1.5 \leq ka \leq 3.5) \end{cases} \quad (45)$$

ここで、 $\mathcal{R}$  と  $\mathcal{L}$  は以下の式で与えられる。

$$\mathcal{R} = e^{-ka} \sqrt{\pi ka} \left( 1 + \frac{3}{32(ka)^2} \right) \quad (46)$$

$$\mathcal{L} = 0.634 - 0.1102ka + 0.0018(ka)^2 - 0.00005(ka)^{4.9} \quad (47)$$

これらのインピーダンスは、共通の定性的な性質を持つ。無次元量  $ka$  が  $ka < 1$  の領域では、虚部は  $X \propto ka$ 、実部は  $R \propto (ka)^2$  となり、 $X > R$  となるので虚部が支配的になる。この領域の開口端補正  $\Delta L$  は  $X/kZ_0$  で与えられ、フランジ付きパイプでは  $\Delta L \approx \frac{8a}{3\pi} \approx 0.85a$ 、フランジなしパイプでは  $\Delta L \approx 0.6113a$  となる。一方、 $ka \gg 1$  の領域では、実部は  $R \rightarrow Z_0$  となるが、虚部  $X$  は、 $(ka)^{-1}$  程度で減衰するので、 $ka \rightarrow \infty$  では  $Z_R \rightarrow Z_0$  となり半無限の円筒管の特性インピーダンス  $Z_0$  収束するので、波は反射せずにすべて透過する。

### 2.8.3 円筒管と円錐管

ここでは、円筒管と円錐管の入力インピーダンスと反射関数の違いを具体的な形状を与えて示す。図 8 に計算に用いた円筒管と円錐管の形状を示す。管長はどちらも  $L = 60\text{cm}$ 、円筒管の半径は  $a_1 = 7.5\text{mm}$ 、円錐管の入力端と開口端の半径は  $a_1 = 7.5\text{mm}$ 、 $a_2 = 30\text{mm}$  で、クラリネットやソプラノサクソフォンに近いものである。円筒管と円錐管の伝搬行列とフランジなしの放射インピーダンスに適切なパラメータを与えて入力インピーダンスと反射関数を計算した [44]。その結果を図 9 に示す。図 9(a) の入力インピーダンスを見ると、円筒管 (cylinder) では、基音のピークが一番大きく、倍音はほぼ奇数倍の周波数を持ち周波数の増大と共に小さくなる。円錐管の基音の周波数は円筒管のそれよりも高いが、この円錐管は頂点部分を切り取ったものなので周波数は 2 倍にはならない。倍音の周波数は基音のほぼ整数倍になる。2 倍音のピークは基音のピークよりも若干高いが、これは円錐管体の楽器によく見られる特徴である。図 9(b) の円筒管の反射関数を見ると、 $t = 0.035\text{sec}$  付近に開口端で反射された負のピークを持ち、図 3(b) の模式図と近いものになる。この円筒管の力学モデルは 1 重遅延系で近似可能である。一方、円錐管の反射関数には、開口端からのピークの他に、円錐管側面からの連続的な反射が作り出す  $t = 0 \text{ sec}$  から始まる負の逆三角形の連続的な分布が見られる [7]。また、開口端反射のピークの後に連続的な分布が見られるが、これは開口端反射で戻ってきた反射波の一部が、入力端近傍で再反射されて管体に送り出され、それがさらに側面反射や開口端反射により戻ってきたものと考えられる。側面反射による連続分布の面積は、開口端反射のピークの面積と同等かそれ以上なので、(12) 式で定義される畳み込み積分  $p_{inc}$  に大きな影響を与える。したがって、円錐管の力学モデルは連続遅延系になる。このように、管体形状の違いは、遅延構造に大きな違いをもたらす。また、遅延構造だけからは共鳴モードの構造を予想することは難しく、逆に、共鳴モードのわずかな違いが遅延構造の大きな違いを生み出すことがある。

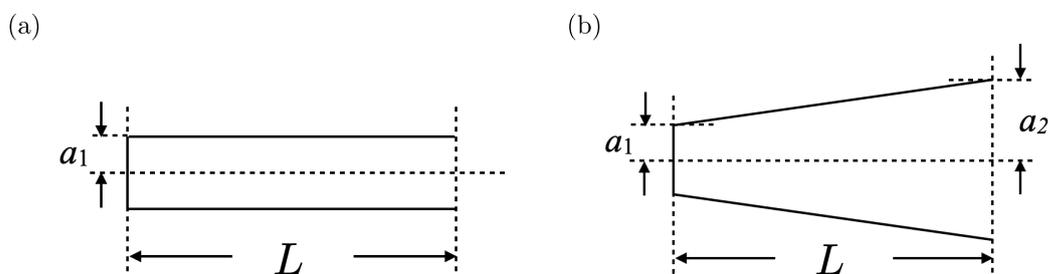


図 8 円筒管と円錐管モデルの形状:  $L = 60\text{cm}$ ,  $a_1 = 7.5\text{mm}$ ,  $a_2 = 30\text{mm}$  (a) 円筒管 (b) 円錐管

### 2.8.4 音孔の効果

管体の開けられた音孔は分岐管として取り扱うことが可能であり、比較的簡単な計算により、大雑把なインピーダンスを計算することは可能である [2]。より正確で実用的な音孔のインピーダンスの計算は Keefe によって行われた [47–49]。図 15(a) に音孔の断面を示す。管の半径を  $a$  とすると、音孔は、音孔の半径  $b$  と高さ  $t_h$  で特徴付けられる。音孔があると体積流量  $U$  は、管と音孔の二手に分かれが、分岐点での音圧  $p_a$  は同じである。したがって、等価回路は、図 15(b) に示すよう T 字型回路になる。右端に音響負荷を付ければ並列回路になる。Keefe は管体部分と音孔部分の Green 関数を計算し、それらの整合性を議論することで、図 15(b) の  $Z_s$  および  $Z_a$  を計算した。 $Z_s$  は音孔部分に音圧の腹が来る対称な波の寄与であり、 $Z_a$  は節が来る

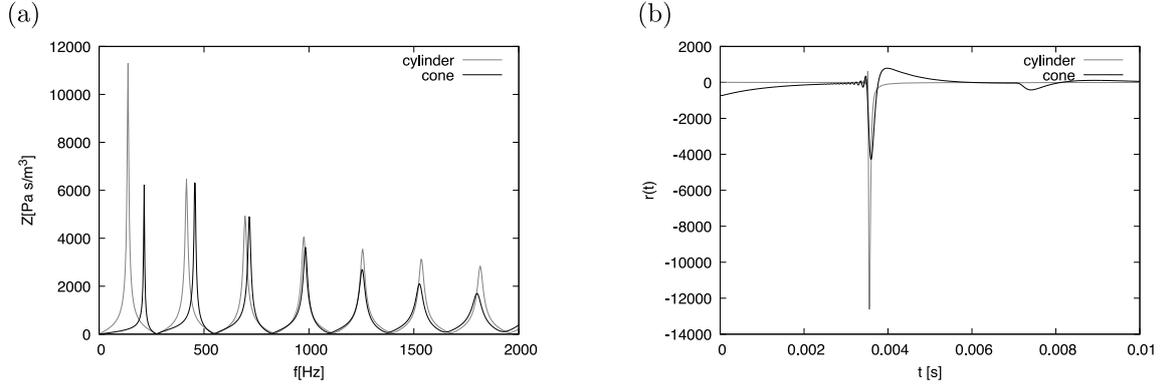


図9 円筒管と円錐管の入力インピーダンスと反射関数 (a) 入力インピーダンス (b) 反射関数

反対称な波の寄与である。この等価回路の伝搬行列は、

$$H = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_a}{2Z_s} & Z_a(1 + \frac{Z_a}{4Z_s}) \\ \frac{1}{Z_s} & 1 + \frac{Z_a}{2Z_s} \end{pmatrix} \quad (48)$$

で与えられる。通常、 $|Z_a/Z_s| \ll 1$  となるので、粗い近似では、 $Z_a/Z_s$  を無視することができる。音孔が閉じた時と開いた時のインピーダンス  $Z_s$  は、

$$Z_s = Z_0 \frac{a^2}{b^2} \times \begin{cases} i \cot k\bar{t} & (\text{closed}) \\ ikt_e + \xi_e & (\text{open}) \end{cases} \quad (49)$$

で与えられ、インピーダンス  $Z_a$  は、

$$Z_a = Z_0 \frac{a^2}{b^2} \times (-ikt_a^{(c),(o)}) \quad (\text{closed or open}) \quad (50)$$

で与えられる。ここで、管の特性インピーダンスは  $Z_0 = \rho_0 c_0 / \pi a^2$  で与えられるので、 $Z_0 \frac{a^2}{b^2}$  は音孔の特性インピーダンスになる。 $\bar{t}$ ,  $t_a^{(c)}$ ,  $t_a^{(o)}$  は、音孔の形状から決まるある種の音孔の実効高さである。変数  $t_e$  は、以下の式で与えられる開いた音孔の高さに関係した変数である。

$$t_e \approx \frac{(1/k) \tan k\bar{t} + c_1}{1 - c_2 k b \tan k\bar{t}} \quad (51)$$

$c_1$  と  $c_2$  は音孔の形状から計算される定数で、音孔を閉じるのに使うパッドがある時とない時では値が異なる。開口端の特性抵抗  $\xi_e(k)$  は、形状から求まる係数を含む  $k$  の2次多項式となる。

Keefe のモデルは、低周波数領域では良い近似を与え、モード周波数を正しく計算するが、高周波数領域では近似が悪くなる。特に、閉じた時の音響インピーダンスには不自然な振る舞いをする。(49) 式で与えられる閉じた時の  $Z_s$  は、 $\cot k\bar{t}$  を含むが、 $k\bar{t} = \pi/2 + n\pi$  で  $Z_s = 0$  となり、伝搬行列 (48) の要素が発散するので計算は破綻する。例えば、実効高さが  $\bar{t} = 5\text{mm}$  の場合には、可聴領域 (2 万 Hz 以下) でこのような破綻が起きるので実用的ではない。音孔を開いた場合でも不自然なノイズの発生が起きる。Keefe モデルが提案された後に様々な改良発展が行われ、現状では Lefebvre と Scavone が提案したモデルが最も信頼性が高いとされているが [50]、モデルの本質的な部分は上記の式で与えられるものと同じであり、高周波領域での再現性は良くない。音孔モデルを改良するためには、3次元の音響解析やさらに流体と音波の相互作用を考慮した圧縮性流体解析が必要となるが、計算コストの面で全ての周波数領域を調べることは不可能である。

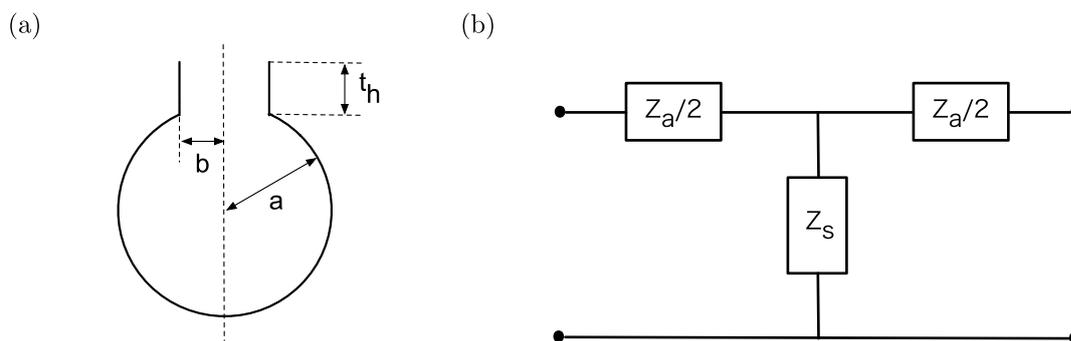


図 10 音孔の断面と等価回路 (a) 音孔の断面 (b) 等価回路

Lefebvre & Scavone モデルを用いて、円筒管に音孔を取り付けたモデルの入力インピーダンスと反射関数を計算した結果を示す。入力インピーダンスに音孔の効果を取り入れるためには、図 11 のように、音孔の中心で管体を分離し、左右の伝搬行列  $T_1$  と  $T_2$  の間に、音孔の等価回路  $H(48)$  を、 $T = T_1 H T_2$  のように挿入すればよい [49]。図 12 に、図 9(a) の円筒管体の開口端近くに音孔 (半径  $b = 5.5\text{mm}$ 、高さ  $t_h = 5\text{mm}$ ) を取り付けたものを示す。図 13 は、音孔を取り付けた円筒管の入力インピーダンスと反射関数を音孔のない円筒管のそれらと比較したものである。図 13(a) のインピーダンスの共鳴ピークを見ると、基音および倍音列の共鳴周波数が音孔を開けることにより高くなり、期待された結果が得られた。図 13(b) の反射関数を見ると、音孔を開けると開口端からの反射のピークは弱くなり、音孔からの反射に対応するピークが現れる。また、それらのピークの近傍に連続的な遅延のピークが現れるが、これは音孔内部の複雑な共鳴反射によるものと推察される。(51) 式で与えられる  $t_e$  は、 $\tan k\bar{t}$  を含むが、(37) 式との類似性から、音孔のインピーダンスと見なせるので、音孔の内部共鳴を考慮していることになる。このように詳細な問題はあがるが、音孔が 1 つ付いた円筒管は、大雑把に言えば 2 重遅延系と考えることができる。次章で議論するクラリネットのレジスターホールの解析では、入力端に近い位置に音孔があり、より 2 重遅延に近い反射関数が得られる。

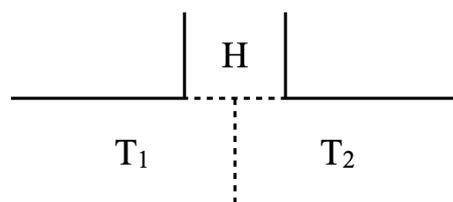


図 11 音孔と伝搬行列

### 3 シングルリード木管楽器の力学的な特徴

#### 3.1 クラリネットのレジスターホール

クラリネットは、円錐管体を持つ他の木管楽器に比べ広い音域をもつ木管楽器である。実際、クラリネットの音域が 3 オクターブ半程度に対し、サキソフォンの音域は 2 オクターブ半程度である。このような広い音域の発音を可能としては、クラリネットが片端の閉じた円筒管体 (閉管) を持ち、かつ、レジスターホール (レ

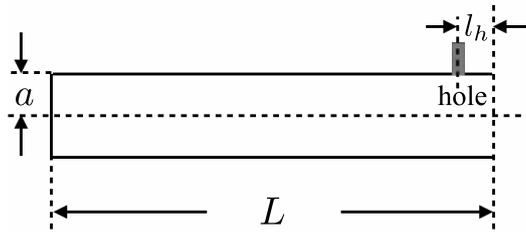


図 12 円筒管 (図 9(a)) に音孔を取り付けたモデル:  $L = 60\text{cm}$ ,  $a = 0.75\text{mm}$ ,  $l_h = 5\text{cm}$ , 音孔半径  $b = 5.5\text{mm}$ , 音孔高さ  $t_h = 5\text{mm}$

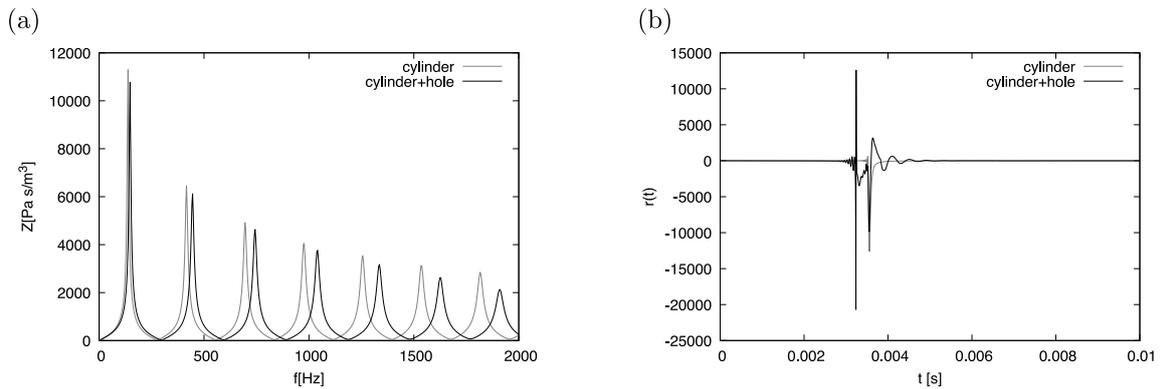


図 13 音孔のない円筒管と比較した音孔を取り付けた円筒管の入力インピーダンスと反射関数 (a) 入力インピーダンス (b) 反射関数

ジスターキー) と呼ばれる高い音域の演奏を可能にする音孔を持っているからである [2,3]。歴史的には、18世紀の初頭に、ドイツの楽器職人 J.C.Denner とその息子たちが、民族楽器のシャリュモアの音域を拡大するために複数のキー (音孔) を付け加え、高い音域の演奏ができるクラリネットを発明した [3]。付け加えたキーの1つが、現在のクラリネットのレジスターホールに対応する機能を持っていたと考えられる。

図 14 に示すように、レジスターホールは歌口にもっと近い音孔で、その半径は 1.5mm 程度で他の音孔の半径 (2.5 ~ 6.0mm) に比べて小さい。B $\flat$  管を例にとると、シャリュモア音域 ( $D_3$ (レ) ~  $D_4^\#$ (レ #)) の音は、他の音孔の運指をそのままにしてレジスターホールを開くことで、1 オクターブと 5 度 (約 3 倍) 高いクラリオン音域 ( $A_4$ (ラ) ~  $A_5^\#$ (ラ #)) に変化する [3]。音名の数字の添え字がオクターブの順番を表すので、1 オクターブと半音の音域の音を 3 倍音に変化させたことになる。サクソフォンにもレジスターホールに対応するオクターブホールと呼ばれる音孔があり、オクターブ高い音域の音の演奏に使われるが、機能する音域はレジスターホールに比べて狭い [3]。

レジスターホールが広い音域で機能することを説明するために、円筒管を持つクラリネットを 2 重遅延系とみなす。シャリュモア音域の音名の音波の 1/4 波長を実効管体長と考え、マウス端から見た時のレジスターホールの実効位置 (約 14cm) との関係を考えて、その比がほぼ 1:2 ~ 1:4 の範囲で機能することになる [40]。図 15(a) にそのようすを示す。図に示された 3 倍音の音波の波形は、音圧波形ではなく、流体的粒子の変位または体積流量の波形である。したがって、閉端では節、開口端では腹になる。下段の図は、シャリュモア音域の最低音に対応し、レジスターホールと実効管体長はほぼ 1:4 の比を持つ。中段の図は、最高音に対



図 14 クラリネットのレジスターホール (堤元気氏提供)

応しほぼ 1:2 の比を持つ。上段は、最もレジスターホールが機能する 1:3 の比の場合である。音孔は、開口として働くので、音孔の位置に波の腹がくるのが理想的であり、1:3 の比のときは 3 倍音はその条件を満たし、基音よりも発振しやすいと考えられる。しかし、1:2 や 1:4 の比の時はそのような条件を満たす奇数次倍音は存在しないが、それに関わらずレジスターホールが小さい時は、3 倍音の方が基音よりも条件に近いので発振しやすくなると推測される。図 15(b) に、レジスターホールの径が大きい場合を示す。この場合でも、1:3 の比では 3 倍音は発振しやすいと考えられる。しかし、1:2 や 1:4 の比の時は、大きな音孔が波の腹が来ることを強く要求するので、3 倍音よりも高次の奇数次倍音の方が発振しやすくなると推測される。これは、極めて直感的な説明であるが、小さなレジスターホールがなぜ 3 倍音の発振を促進するかをうまく説明している。

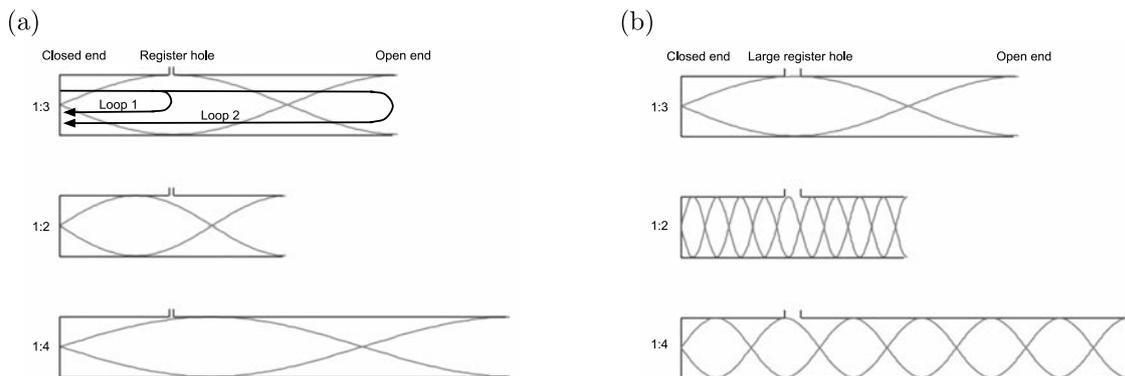


図 15 レジスターホールの機能 (文献 [40] から転載) (a) 通常のリジスターホール (b) 径の大きなリジスターホール

2重遅延系モデルを用いてこのことを確かめる。図 15(a) の上段に示すように、この系を大雑把に見れば、レジスターホールからの遅延  $t_1$  と開口端からの遅延  $t_2$  の 2つの遅延を持つ系である。図 16 は、図 9(a) の円筒管に、遅延比が  $t_1 : t_2 = 1 : 4$  になるようなレジスターホールを取り付けたモデルである。図 17 に、円筒管モデルと比較したインピーダンスと反射関数を示す。インピーダンスを見ると、レジスターホールを開くことにより、基音のピークは大幅に小さくなり周波数は少し上昇する。一方、3 倍音のピークの高さと周波数はほぼ同じである。高次倍音のピークも大きく変動することはない。したがって、3 倍音の発振が促進される。図には示さないが、レジスターホールの径を大きくすると 3 倍音のピークは大きくなるが、周波数が高くなるので演奏に適さなくなる。一方、管体長を半分 ( $t_1 : t_2 = 1 : 2$ ) にすると、基音のピークは小さくなるが 3 倍音のピークより若干小さい程度であり、3 倍音が優位と言い切れない。さらに、レジスターホールの径を大きくすると、基音のピークは再び大きくなり周波数が上昇するが、3 倍音のピークは小さくなって行く。高次倍音のピークはほぼ同じ高さのままである。この場合、どのモードが発振しやすいか判断できない。

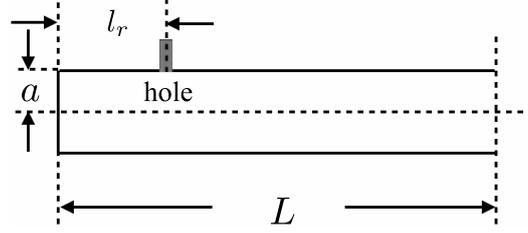


図 16 円筒管 (図 9(a)) にレジスターホールに対応する音孔を取り付けたモデル:  $L = 60\text{cm}$ ,  $a = 0.75\text{mm}$ ,  $l_r = 15\text{cm}$ , 音孔半径  $b = 1.5\text{mm}$ , 音孔高さ  $t_h = 12\text{mm}$

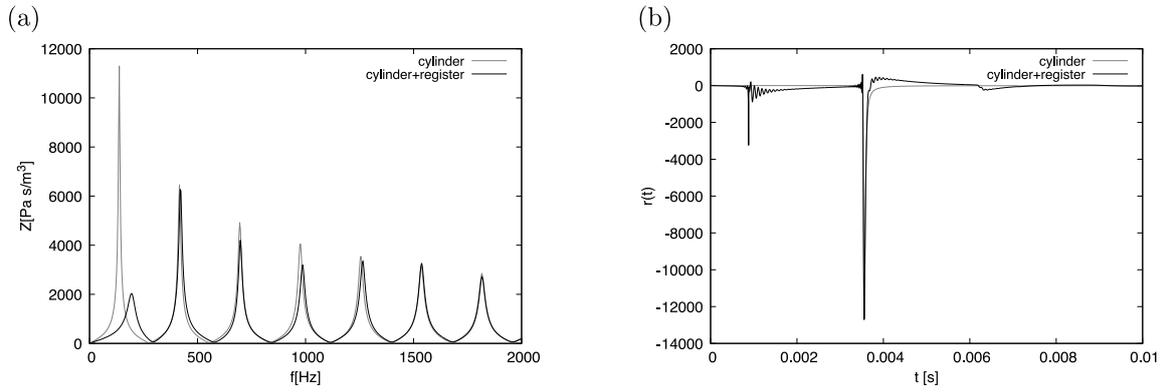


図 17 レジスターホールのない円筒管と比較したレジスターホールを取り付けた円筒管 (図 16) の入力インピーダンスと反射関数 (a) 入力インピーダンス (b) 反射関数

図 17(b) の反射関数を見ると、レジスターホールに対応する短い遅延を持つ小さなピークと、開口端に対応する長い遅延を持つ大きなピークがある。短い遅延ピークは細かな振動ピークを伴うが、これはレジスターホール内の共振振動に起因すると推察される。文献 [40] では、レジスターホールの機能を明らかにするために、準静的モデル ((13),(16) 式) を用いて、2重遅延系の解析を行った。そこでは、簡単のために、反射関数を以下のように置き換えた。

$$r(t) = -a_1 f_r(t - t_1; \tau_\gamma) - a_2 f_r(t - t_2; \tau_\gamma), \quad (52)$$

ここで、関数  $f_r(t - t_i; \tau_\gamma)$  は、以下のように与えた。

$$f_r(t - t_i; \tau_\gamma) = \frac{1}{\tau_\gamma} \exp\left(-\frac{1}{\tau_\gamma}(t - t_i)\right) H(t - t_i), \quad (53)$$

$H(x)$  は、Heaviside の階段関数である。(8) 式を満たすために、 $a_1 + a_2 = 1$  とした。等価音響管モデルより、レジスターホールの実効位置は、 $l_r \approx 14\text{cm}$  と推定されるので、 $c_0 = 340\text{m/s}$  とすると  $t_1 = 8.25 \times 10^{-4}\text{s}$  となる。長い遅延  $t_2$  を  $1 \leq t_2/t_1 \leq 5.5$  の範囲に設定し、遅延ピークの幅は  $\tau_\gamma = 4 \times 10^{-5}\text{s}$  とした。

管楽器は、複数のモードが発振可能な多重アトラクター系である。そこで、吹鳴圧  $P_0$  を分岐パラメータにとり、最初に発振するモードを最も発振しやすいモードと考える。シミュレーションでは、 $P_0$  をゆっくりと上昇させ発振モードの次数を調べた。図 18 は、発振モードの次数を遅延比  $t_2/t_1$  の関数として描いたものである。ピーク比  $a_1/a_2 = 0.1$  は、通常のレジスターホールに対応し、 $2.1 \leq t_1/t_2 \leq 4.2$  の領域で3倍音の

発振が見られ、レジスターホールの機能をほぼ再現している。ピーク比  $a_1/a_2 = 1$  は、大きすぎる径を持つレジスターホールに対応する。この場合、3倍音の発振領域は小さくなり、遅延比  $t_2/t_1 = 2$  と  $t_2/t_1 = 4$  の近傍で高次倍音の発振が見られる。これは、図 15(b) で予想したものである。ピーク比  $a_1/a_2 = 0.01$  は、小さすぎる径を持つレジスターホールに対応し、3倍音の発振領域が右側にシフトするので、レジスターホールの機能を再現していない。したがって、レジスターホールの機能は2重遅延モデルでほぼ再現され、レジスターホールの径は適度に小さい必要があるが、小さすぎても機能しないことが分かった。

このような発振特性は、楽器モデルの特有な性質ではなく、あるクラスの2重遅延系の共通の特性である。例えば、以下のような2重遅延系を考える [40]。

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dx}{dt} = -x + \mu a_1 f[x(t - t_1)] + \mu a_2 f[x(t - t_2)], \quad (54)$$

ここで、 $f(x)$  は、

$$f(x) = \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{\Delta x^2}\right]. \quad (55)$$

で与えられる。パラメーターを  $x_0 = 0.2$ 、 $\Delta x = 0.5$ 、 $\gamma = 105$  とし、短い遅延時間を  $t_1 = 1/3$  とし、 $\mu$  を分岐パラメーターとして最初に発振するモードを  $1 \leq t_2/t_1 \leq 5.5$  の範囲で調べると、定性的に同じ発振特性が得られる。この系は、線形安定性解析を用いて分岐現象を調べられるので、数学的な解析に向いている。

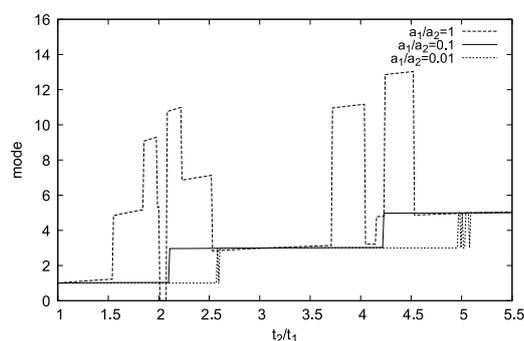


図 18 2重遅延を持つ準静的モデルで得られた発振モードの変化 (文献 [40] の図を描き直した)

### 3.2 円筒管と円錐管の発音機構の違い

円筒状の管体を持つクラリネットと円錐状の管体を持つサクソフオンは、ともにシングルリード木管楽器であるが、その音色や発音特性は大きく異なる。クラリネットは閉管であるので、演奏音の周波数スペクトルを見ると奇数次モードが優位に含まれている。また、初心者がクラリネットを演奏すると、しばしば高く不快な金切り音を出すことがある。一方、サクソフオンは開管と同じ特性を持つので、周波数スペクトルには、偶奇両方のモードが含まれるが、特に、2倍音や3倍音の成分が豊富に含まれる。そのため、より高次のモードは相対的に小さく、不快な金切り音は出にくい。この章では、このような特性の違いを力学的に見るとどの様に特徴付けられるかを考察する。

### 3.2.1 人工吹鳴実験に現れる複雑な分岐現象

リード木管楽器が複雑な多重アトラクター系であることを初めて明らかにしたのは井戸川らによる一連の人工吹鳴実験である [7-9, 35-37, 51-53]。彼らは、全ての音孔を閉じ吹鳴圧をゆっくり上昇または下降させ発振する波形の観測を行った。その結果、複数の発振モード (アトラクター) を履歴的に遷移する現象を発見した。そして、履歴的遷移の全体像を示す図を transition diagram (遷移ダイアグラム) と呼んだ。

図 19 に、シングルリード木管楽器の実験で使われた人工口腔を示す [7, 35-37]。この図で、 $P(t)$ ,  $v(t)$ ,  $x(t)$ ,  $p(t)$  は、吹鳴圧、リード入口の流速、リード開口高さ、マウスピース内音圧である (この節では、井戸川ら実験に合わせた物理量の表記法を用いる)。一定圧力の空気流がコネクター 1 から供給され吹鳴圧  $P$  を作り出す。シリコンラバーの人工唇 2 とリード先端の距離を  $l$  とする。彼らは、演奏条件を決めるパラメーターとして、リード静止開口高さ  $x_0$  と距離  $l$  の組  $(x_0, l)$  を lip adjustment と呼んだ。流速  $v$  は熱線流速計 4 で測定され、リード開口高さ  $x$  は、楽器の開口端から入射させたレーザー光の強度をフォトダイオード 5 で測定し、その強度から換算して求める。吹鳴圧  $P$  と音圧  $p$  はプローブマイクロフォンで測定される。

クラリネット (YAMAHA YLC-451) の実験結果を考察する [7, 35-37]。図 20 に、lip adjustment を変えた時に見られる 2 つの遷移ダイアグラムを示す。図 21 に、図 20(b) の遷移ダイアグラムに現れるモードのマウスピース内音圧波形の例を示す。音名の数字の添え字はオクターブの順番を表すので、 $C_6^\#$  (ド #)、 $E_6$  (ミ)、 $F_6$  (ファ) の音は、演奏音  $D_3$  より 3 オクターブ高い音域にあり、7 ~ 9 倍の高調波とみなせる。 $X$  は高い周波数成分を持つが明確なピッチがなく準周期またはカオス振動と考えられる。 $D_{3L}$  と  $D_{3H}$  は、演奏音  $D_3$  に高いピッチの音を重ねあわせた音で、聴覚上でも明確に区別できる。図 20 の実線の矢印は吹鳴圧上昇時の遷移を表し、破線は下降時の遷移を表す。それらの線に添えられた数字は遷移が起きた時の吹鳴圧 [kPa] である (注：一部数字が欠けている)。吹鳴圧がある閾値を超えると発振が止まる。これは、リードが「内向き閉開ドア」型のために、閾値を超えて  $P - p$  が大きくなると閉まるためである。遷移ダイアグラムには、スーパークリティカル分岐による可逆的なものとサブクリティカル分岐による履歴的なものが入り混じっていて、かなり複雑である。2 つの遷移ダイアグラムの共通の特徴として、吹鳴圧上昇時に最初に発振するのは演奏音ではない高い音で、その後に演奏音  $D_3$  に遷移する。さらに吹鳴圧を上昇させると、演奏音が変形した  $D_{3H}$  が現れる。また、不規則音  $X$  は、低い吹鳴圧領域に現れる。したがって、大雑把に遷移ダイアグラムの傾向をまとめると、図 22(a) のようになり、吹鳴圧の低い領域に高次倍音または不規則な音があり、高い領域に演奏音とその亜種があり、吹鳴圧の上昇下降によりそれらの間を履歴的に遷移する [54, 55]。井戸川らの論文では、遷移ダイアグラムの中に演奏音が現れる場合だけを報告しているが、彼らとの私信によれば、lip adjustment の取り方で演奏音が発振しない遷移ダイアグラムも存在する。井戸川らは、音圧  $p$  と流速  $v$  の関係も調べている [7, 35-37]。演奏音  $D_3$  の場合は、準静的仮定のもとで Bernoulli の定理から求めた (14) 式をほぼ満たしているが、高次倍音ではかなり変調する。さらに、 $D_{3H}$  や  $X$  では、リード振動が不安定になり、 $p$  と  $v$  の関係は (14) 式から大きく外れる。このことから、準静的モデルを用いた解析では、遷移ダイアグラムを再現できない。

彼らは、ソプラノサキソフォン (Yamaha, YSS-62) についても 1 例ではあるが報告している [51]。図 23 に、遷移ダイアグラムを示す。なお、この図は橘によって描き直されたものである [39]。結果は不完全ではあるが、サキソフォンの特徴を大体捉えている。紙面の都合上音圧波形は示さないが、その形状は台形を繋げたような形で、クラリネットの演奏音  $D_3$  の波形の負の音圧部分を短くしたようなものである。図中の記号  $F$  は演奏音  $G_3^\#$  (ソ #) を、 $H_2$  と  $H_3$  は、2 倍音  $G_4^\#$  と 3 倍音  $D_5^\#$  を表す。 $F_a$  は演奏音に近いピッチを持つが、うなりを伴う音で、準周期的な波形である。太線の部分については不明であるが、分類が難しい複雑な振動が

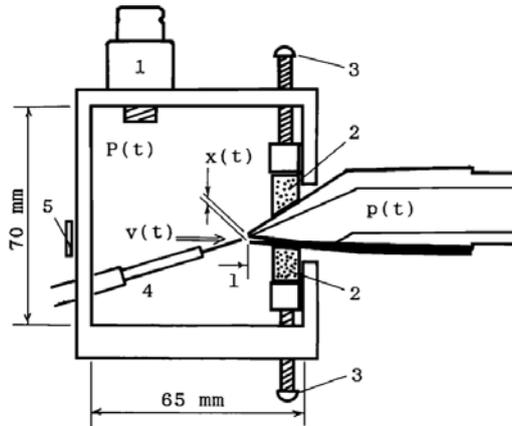


図 19 実験に使われた人工口腔 (文献 [35] から転載)

p(a)

(b)



図 20 クラリネットの遷移ダイヤグラム (a)  $l = 4.5\text{mm}$ ,  $x_0 = 0.37\text{mm}$  (文献 [35] から転載) (b)  $l = 7.0\text{mm}$ ,  $x_0 = 0.71\text{mm}$  (文献 [37] から転載)

発生していると考えられる。吹鳴圧を上昇させると、演奏音には入らず 2 倍音または 3 倍音が発振する。その状態から吹鳴圧を下げて行くと演奏音が発振する。これは、低次倍音の方が演奏音よりも発振しやすいこと示していて、円錐管の特徴と考えられる。図 9(a) の円錐管のインピーダンスを見ると、2 倍音のピークが基音のピークよりも若干高い、さらにマウスピースの影響により、2 倍音や 3 倍音が出やすくなると考えられる。ソプラノサクソフォンの遷移ダイヤグラムをまとめると図 22(b) のようになり、吹鳴圧の低い領域に演奏音とその亜種があり、高い領域に低次倍音があり、吹鳴圧の上昇下降によりそれらの間を履歴的に遷移する。

小野寺は、クラリネットのマウスピースに円筒管 (長さ 519mm) を取り付けた擬似楽器:Cylindrical Pipe with Clarinet Mouthpiece (CPCM) の人工吹鳴実験を行い、複数の遷移ダイヤグラムを観測した [52,56,57]。その例を、図 24 に示す。この場合の演奏音に対応する基音  $F$  は、 $C_3^\#$  (ド #) でクラリネットより半音低い、 $F_a$  と  $F_b$  はその亜種である。 $H_{6.9}$  と  $H_{8.7}$  は、 $B_5$  (シ) と  $F_6^\#$  の高次倍音である。 $X_{6.9}$  は、 $H_{6.9}$  に近い準周期振動である。したがって、CPCM の大域的な遷移構造はクラリネットと基本的に同じであり、図 22(a) に示す大域的な遷移構造は、円筒形状の管体を持つシングルリード楽器の特徴であると言える。

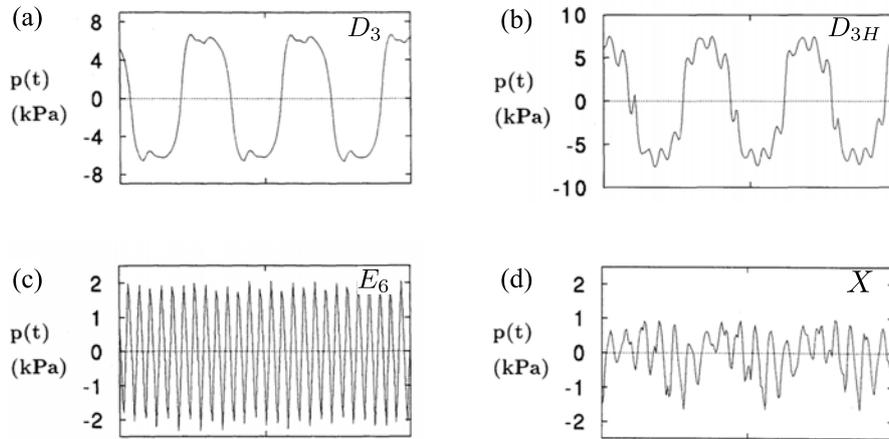


図 21 図 20(b) の遷移ダイアグラムで現れたモードのマウスピース内音圧波形の例 (文献 [37] の図を修正)

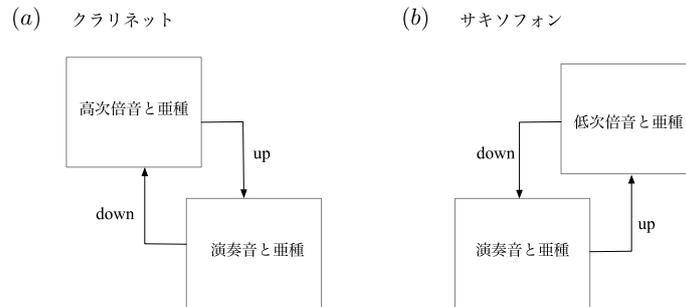


図 22 クラリネットとサキソフォンの遷移ダイアグラムの概要

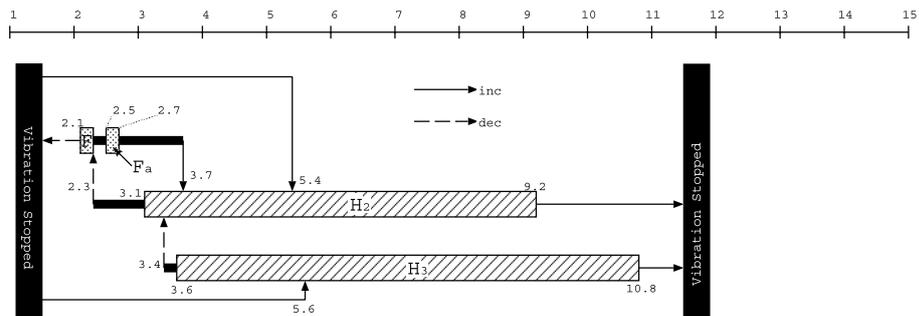


図 23 ソプラノサキソフォンの遷移ダイアグラム (文献 [51] の図を橋 [39] が描き直した)

### 3.2.2 Schumacher モデルを用いた遷移ダイアグラムの再現

井戸川らの実験より、クラリネットのマウスピースに円筒管を接続した CPCM モデルは、クラリネットとほぼ同じ遷移ダイアグラムを持つことが分かった。そこで、CPCM とクラリネットのマウスピースにソプラノサキソフォンに近い円錐管体を接続したモデル: Truncated Cone with Clarinet Mouthpiece (TCCM)

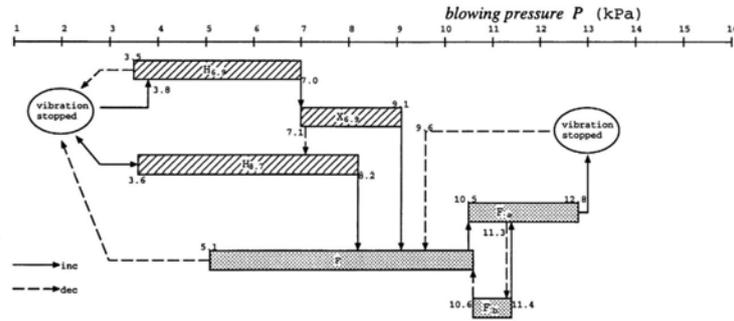


図 24 CPCM の遷移ダイアグラム:  $l = 7.0\text{mm}$ ,  $x_0 = 0.78\text{mm}$  (文献 [52] の図を橋 [39] が描き直した)

の Schumacher モデルを用いた数値解析を行い、円筒管体楽器と円錐管体楽器の遷移ダイアグラムの違いについて考察した [39, 54–57]。解析に用いた CPCM と TCCM の等価音響管モデルの形状を図 25 に示す [39, 54, 55]。クラリネットマウスピースは、複雑な形状をしていて、それを等価音響管にすると図 25(c) のような段差のある形状になる。図 26 の反射関数を見ると、この段差は短い遅延の鋭いピーク (mouthpiece) を作り出し反射関数に大きな影響を及ぼす。ただし、このピークの幅が細いので、開口端反射のピーク (open end) に比べ面積は小さく、畳み込み積分  $p_{inc}$  (12) への影響は相対的に小さい。TCCM では、円錐側面からの連続反射 (cone) の面積は、開口端反射のピークと同等度であり大きな影響を及ぼす。このように、マウスピース部分の反射の効果は相対的に小さいが、CPCM の遷移ダイアグラムを作り出すのに重要な役割をする。事実、このピークを取り去ると、基音の発振が優勢になり高次倍音の発振は抑制される。

数値解析を行うと、リード静止開口高さ  $h_0$  の設定値に応じ様々な遷移ダイアグラムが得られた。図 27 に、数値解析で得られた CPCM と TCCM の遷移ダイアグラムの例を示す [55]。図 27(a) の CPCM の遷移ダイアグラムで、 $F$  は基音、 $QF_x$  は準周期要素の入った基音に近い振動、 $Cp_x$  は方形波と高調波が合体した合成波で、 $CR$  は挿入図にあるように、高次倍音が準周期化した振動  $Qp_x$  とカオス化した振動  $Ch_x$  を含む複雑な発振領域である。低い吹鳴圧領域に現れる高調波の摂動を受けた基本波の亜種も含め、高周波成分を含む振動は主に低い吹鳴圧領域に現れるので、実験で得られた CPCM の遷移ダイアグラムと大域的な構造は同じで、図 22(a) はその構造を大まかに捉えている。図 27(b) の TCCM の遷移ダイアグラムでは、 $F_x$  が基音で、 $H2_x$  が倍音に当たる。図では分かりにくいですが、吹鳴圧を上昇させると倍音  $H2_x$  が発振し、そこから下げると基音  $F_a$  が発振するので、ソプラノサクソフォンの実験に近い遷移ダイアグラムが得られる。ただし、吹鳴圧の高い領域に基音  $F_b$  が再び現れる。 $h_0$  の値を大きく取ると、 $F_a$  と  $F_b$  が合体し基音の発振が優勢になり、上昇時に基音が最初に発振する。図 22(b) の遷移ダイアグラムに近いものは、開口端の径を少し小さくしたもの (直径:  $47.8\text{mm}$ ) で現れる。その理由は、この円錐部分の形状が、ソプラノサクソフォンのベルを除いた円錐部分に近いと考えられる。

このように、CPCM と TCCM の Schumacher モデルを用いた解析は、定性的にはあるがクラリネットとソプラノサクソフォンの遷移ダイアグラムの特徴を捉えている。このことからマウスピースの段差は、低音域の演奏音の発振を抑制するので、無用で邪魔なものに見える。しかし、高音域の演奏では、この段差が優位に働いていると推測される。例えば、クラリネットの最も高い音域では複雑な運指を用いるが、マウスピースのない管体での解析を行うと、インピーダンスにおける所望の音のピークがより低周波数の音のピークに比べて優勢ではないので、発音させるのが難しい。しかし、マウスピースの段差を考慮したモデルを用いるとその

ピークが優位になることが確認できる。クラリネットやソプラノサキソフンの管体をモデル化した解析も可能であり、音孔モデルを取り込むと、全ての運指に対応する音を再現できる [58]。その場合でも、吹鳴圧を上昇させる解析を行うと、低い音域で図 22 の遷移ダイアグラムに近い遷移が観測される。さらに、運指の変化を模擬する動的な反射関数を作成することで、楽曲の再現も可能である [59]。3.1 節のレジスターホールの解析では、2重遅延系モデルを用いて解析を行った。マウスピースの段差を考慮したモデルでもレジスターホールの機能を再現できるか調べる必要がある。(52) 式の反射関数に段差のピークを付け加えて、準静的モデルを用いて解析を行うと、マウスピースの段差の影響でレジスターホールの機能が不完全になる。しかし、クラリネットの管端のベルの効果を模擬するために、開口端反射のピークを幅の広いものに取り替えて解析すると、レジスターホールの機能を再び再現できるので、ベルはマウスピースの段差の影響を抑制するのに必要であることが分かる [60]。したがって、2重遅延モデルを用いたレジスターホールの解析は、レジスターホールの機能を理解するための基本的なアイデアを与えるものと言える。

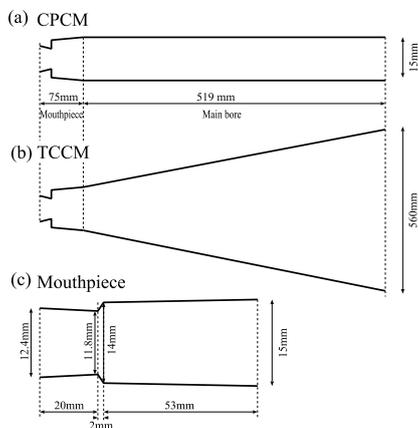


図 25 CPCM と TCCM の形状 (文献 [55] から転載) (a) CPCM (b) TCCM (c) マウスピース部分

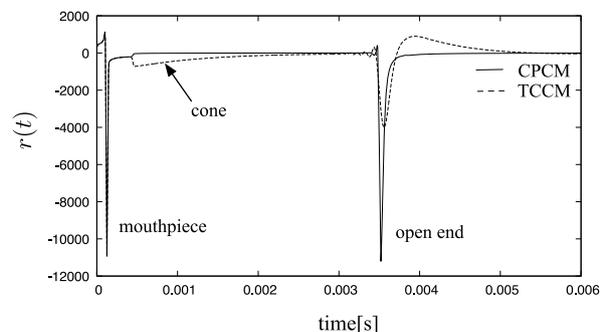


図 26 CPCM と TCCM の反射関数 (文献 [9] から転載)

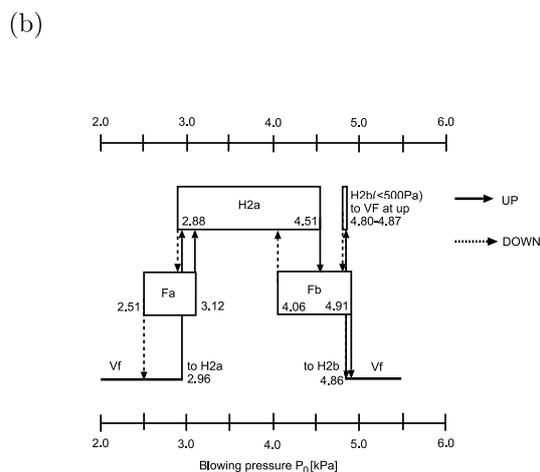
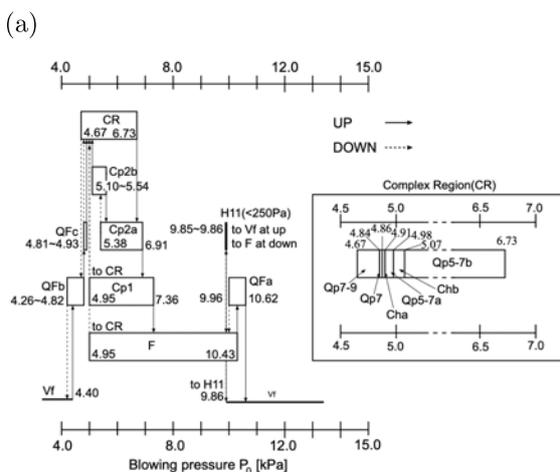


図 27 CPCM と TCCM の遷移ダイアグラム (文献 [55] から転載) (a) CPCM  $h_0 = 0.8\text{mm}$  (b) TCCM  $h_0 = 0.4\text{mm}$

## 4 時間領域のモード方程式モデル

この章では、音響モードの入力端での振動を減衰調和振動子として記述することで、遅延方程式を用いずに多自由度常微分方程式で記述するモデルを紹介し、その利点と問題点について議論する [29,30]。出発点となるのは、リードバルブ内の音圧  $p_a$ 、体積流量  $U$  の関係である。周波数領域でこれらの関係を表すと、

$$\tilde{p}_a(\omega) = Z_I(\omega)\tilde{U}(\omega) \quad (56)$$

となる。ここで、入力インピーダンス  $Z_I(\omega)$  は、低周波数領域であれば、基音と倍音のピークで構成され比較的単純である。そこで、共鳴ピークに対応する各モードを独立した振動子と考え減衰調和振動子で近似する。共鳴モード間の相互作用は、非線形な駆動力であるリードバルブ (動的な境界条件) を介して持たせられると仮定する。ただし、減衰調和振動子による管内モードの記述は近似なので、管内モードを正確に再現するためには、高次の近似としてそれらの間の線形相互作用を考えなければならないが、無視できるほど小さいと仮定する。一方、高周波数領域では、共鳴モードのピークの並びは複雑になり、音孔モデルの精度は極端に下がるので、数値的に求めた  $Z_I(\omega)$  の精度は低くなる。さらに、音波の波長が管径と同程度になると、1次元近似が成り立たなくなり断面上のモードも励起され、変数分離可能な管形状で無い場合はこれらのモードは軸方向のモードと相互作用する。したがって、各モードを独立した振動子とするこの手法は、低周波領域の共鳴モードの構造が比較的単純で、発振波形が低次モードで十分に記述できる場合に限り有効である。

モード方程式を構築するために、 $\tilde{p}_a(\omega)$  と  $Z_I(\omega)$  をモード分解すると、

$$\tilde{p}_a(\omega) = \sum_{l=1}^n \tilde{p}_l(\omega) \quad (57)$$

$$Z_I(\omega) = \sum_{l=1}^n Z_l(\omega) \quad (58)$$

となる。等価回路的には、各モードを負荷と考え直列接続したものになるので、体積流量  $\tilde{U}(\omega)$  はモード分解しない。各モードのインピーダンスを減衰調和振動子で近似するので、 $Z_l(\omega)$  を以下のように近似する。

$$Z_l(\omega) \approx \frac{a_l}{r_l + i\omega m_l + \frac{m_l \omega_l^2}{i\omega}} = \frac{i\omega \frac{a_l}{m_l}}{i\omega \frac{r_l}{m_l} - \omega^2 + \omega_l^2} \quad (59)$$

ここで、 $\omega_l$  と  $r_l$  は、モードピークの形状から決まる角振動数と減衰定数である。定数  $a_l$  は複素数値を取り、モード間の相対な強度と位相によって決まる。したがって、周波数領域の各モードの方程式は、

$$\tilde{p}_l(\omega) \equiv \frac{i\omega \frac{a_l}{m_l}}{i\omega \frac{r_l}{m_l} - \omega^2 + \omega_l^2} \tilde{U}(\omega) \quad (60)$$

となる。この式を形式的に逆フーリエ変換すると以下のようになる。

$$\ddot{p}_l + \frac{r_l}{m_l} \dot{p}_l + \omega_l^2 p_l = \frac{a_l}{m_l} \dot{U} \quad (61)$$

これが、時間領域のモード方程式である。体積流量の時間微分  $\dot{U}$  が駆動力になっている。したがって、Schumacher 方程式は、体積流量の式 (24) の最高次微分項が  $\dot{U}$  となるで連立させることはできない。連立で

きる方程式は、 $f(h, \dot{h}, \ddot{h}, p_a, U(h, p_a); P_0) = 0$  または  $f(p_a, h(p_a), U(h, p_a); P_0) = 0$  のように、 $U$  が  $h$  と  $p_a$  で与えられるものである。ここで、 $p_a(t)$  は、

$$p_a(t) = \sum_{l=1}^n p_l(t) \quad (62)$$

で与えられる。実際の解析では、完全に準静的なモデルではなく、 $U$  は準静的な関係式 (15) で与えられるが、リードの方程式は減衰調和振動子 (23) で与えられるモデルを用いることが多い [29, 30]。

このモデルの利点は、有限次元の常微分方程式で記述されるので、分岐現象の解析が比較的容易で、Lyapunov 指数等の計算も可能である。実際、少数のモードを取り込んだモデルでも、分岐による発振をかなり正確に捉えられる。また、この手法は金管楽器やエアリード楽器にも適用可能である [30, 31]。このモデルの最大の利点は、円錐管体を持つ楽器の分岐現象が簡単に解析できる点である。遅延モデルを使う場合、円錐管体は連続遅延を作り出し、離散遅延系での解析手法が使えないので、解析は容易ではない。

一方、以下のような欠点が挙げられる。準静的な関係式 (15) を用いるので、 $U$  が  $p_a$  と  $h$  によって決まり、実験で観測される (15) 式では記述できない複雑な発振状態を再現できない。また、実験では、管体のモードと非線形なリードバルブの相互作用により、カオスアトラクターを含む様々なモード (アトラクター) が生み出される。このような複雑なモードは、Schumacher 方程式を用いると定性的に再現可能であるが、モード方程式モデルでの再現可能性は低いと考えられる。今後、遅延方程式モデルとモード方程式モデルの関係を調べるのは重要な課題である。

## 5 おわりに

本稿では、シングルリード木管楽器を例に取り、管楽器の遅延方程式モデルとその周辺の事柄について解説した。管楽器のモデルを構築するにあたり、リードバルブ内に流入する体積流量  $U$  と流体音の発生音圧  $p_U$  と関係が  $p_U = Z_0 U$  で与えられると仮定する。この仮定の妥当性を検証するのは、流体音響学の問題であり本稿の範囲を超えているのでここでは触れなかった。しかし、この問題が解決されれば、流体音がどこでどの程度発生するかが明確になるので、リードバルブと管体は仮想的に分離可能であるというもう 1 つの仮定に理論的な根拠を与えると考えられる。この方向の研究には、圧縮性流体の大規模解析が必要であるが、まだ始まったばかりであり将来的な発展を待たなければならない [9, 16, 22, 23]。一方、これらの仮定のもとで作られた力学モデルは、管楽器の発音過程をかなり正確に再現する。そこで、ここでは本文で触れなかった他の管楽器のモデルの概要述べ、その力学的な特徴についてコメントする。なぜなら、楽器の種類ごとに、非線形振動子であるリードバルブのメカニズムが異なり、遅延を作り出す管体形状も異なるからである。

金管楽器は、シングルリード木管楽器とともに信頼できる力学モデルが提案されている楽器であり、遅延方程式モデルの他にモード方程式モデルも提案されている [27, 28, 30]。図 1 (d) に示すように、金管楽器のリードバルブは人間の唇であり、その機構はシングルリード木管楽器とは異なり、「外向き発振型リード」または「外向き開閉ドア」と呼ばれる機構と「横向き発振型リード」または「引き戸型」と呼ばれる機構があり、唇の動きの多様性からこの 2 つの機構が共存し、演奏技術として使い分けられている [2, 27]。外向き発振型リードは、 $P_0 > p_a$  の領域で唇が外側に開くリードで、質量制御領域で駆動されるので、唇の開閉運動は  $p_a$  に比べて位相が  $\pi$  程度遅れる。一方、横向き発振型リードは、Bernoulli 力によりリードスリットの圧力が下がることで閉じるタイプのリードであり、内向き発振型リードと同じ弾性制御領域で駆動されるので、そのメカニズムはシングルリードに近い。そのため、2 つの演奏法で発振周波数が異なり、外向き発振型リードは横向き発振

型リードよりもピッチが高くなる [27]。金管楽器の管体は円筒管と円錐管を途中で繋ぎ合わせたものに近く、規則的なモード周波数を持つ管体を設計するのは難しい [2]。図 28 に、ホルンのインピーダンスを示す。(a) の管体みの場合に比べ (b) のマウスピースを取り付けた方が、中間領域の共鳴ピークが相対的に高くなっている。これは、マウスピースが Helmholtz 共鳴器として働き、その共鳴周波数近傍の管体の共鳴モードの強度を押し上げるからである [2]。当然、反射関数も違いがあり、マウスピースの影響で正值の短い遅延ピークが見られる。モード周波数を見ると、基音以外のピークはほぼ等間隔に並んでいるのに対し、基音のピークはやや低い方に外れている。そのため基音はペダルトーンと呼ばれる。個々の共鳴モードが演奏音になる。唇は能動的なリードであり、筋肉を緊張させて固有振動数を所望の管体モードに (ほぼ) 合わせて演奏するが、上に述べたように演奏法に依存してピッチが若干上下する [27]。唇に明確な固有振動数を持たせるために、その減衰定数は小さい。基音以外のモードは調和的に並び、マウスピースにより強度が強められているので演奏しやすい。しかし、基音は他の音に対して調和的でないので発音が難しく通常の演奏には使われない。これらの金管楽器の特性は力学モデルを用いてかなり正確に再現可能である [27, 28]。

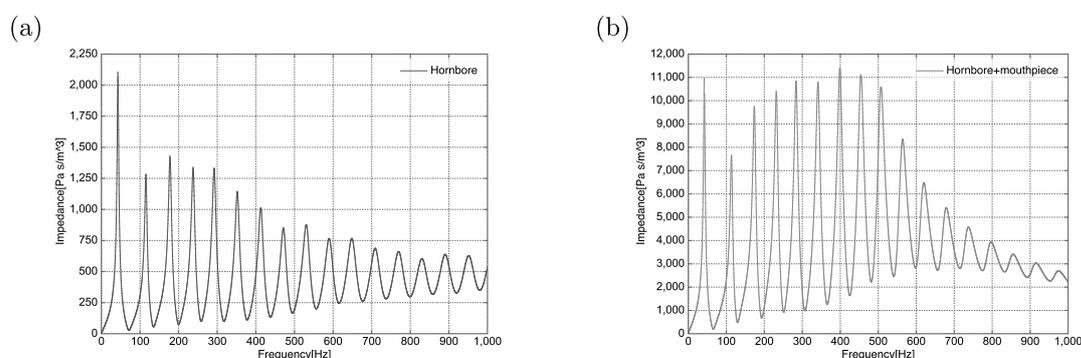


図 28 ホルンのインピーダンス (文献 [3] から転載) (a) 管体のみ (b) 管体 + マウスピース

ダブルリード木管楽器は最も解析が難しい管楽器である。それは、図 1 (b) に示すようにリードが細い流路を持つために、そこを通過する空気流が複雑な振る舞いをするからである。実際、流体粘性の効果が無視できないので、Bernoulli 定理の適用範囲内であるか明らかでなく、流体的な渦が発生する可能性もある。そのため、リード内部のどの部分でどの程度流体音が発生するかを予測するのは簡単ではない。さらに、井戸川らの実験によれば、オーボエやバスーンの遷移ダイヤグラムには、基音、2 倍音、3 倍音が変調した亜種が多数発生し、それらの間の遷移構造は極めて複雑になることが報告されている [7, 51, 53]。これらの問題の解決には、実験や圧縮性流体解析によりリード内部の流体音響的な振る舞いを明らかにする必要がある。しかし、実験を行うには流路の細さが問題になる。また、数値解析を行うにも、リード振動と流体運動の連成解析が必要であり、これからの研究の発展を待たなければならない。余談ではあるが、バスーンのように管体が途中で 180 度折れ曲がった楽器に対し、等価音響管モデルを用いるのは注意が必要である。実際、折れ曲がった管の部分がモード周波数にどのような影響を与えるかは明確に分かっていない [2]。この問題の解決には、3 次元音響解析や流体の効果を含めた 3 次元圧縮性流体解析が必要になると考えられる。

図 1 (c) に示すように、エアリード楽器の歌口は、リード木管楽器や金管楽器とは大きく異なる。まず、歌口は閉端ではなく開口端として振る舞うので、入力インピーダンスのピークではなくアドミッタンスのピークが共鳴周波数を与える。そのため、等価回路を用いた解析では、アドミッタンスを用いた解析が必要であり、ジェットの力学モデルと組み合わせた周波数領域の解析を行うと、ジェットの流速と発振モード周波数の関係

をかなり正確に予測できる [2,61]。ジェットは、歌口の音響的粒子速度  $v$  の影響を受けて振動し、管体内に体積流を送り込みそれが音圧に変化する。この過程をジェットの力学モデルと物理的な保存則を用いて解析し、ジェットのアドミッタンスを計算する [2,15,62]。これと歌口の開口端アドミッタンス及び管体のアドミッタンスを並列に置いた等価回路を作成し、その発振条件から発振周波数を求める [2,15,61]。ジェットは、エネルギー供給源なので、コンダクタンス (アドミッタンスの実部) が負値を取ることが発振条件になる。この解析で発振周波数は求まるが、楽器の動的な挙動はわからない。近年、圧縮性流体を用いた解析で、楽器の発振状態がかなり正確に再現できるようになった [15–19]。さらに、Howe のエネルギー推論と呼ばれる流体音響理論を用いることで [12]、流体音の発生場所とその強度を実験または数値解析で予測することが可能になった [13,14,16,62]。それによれば、流体音の発生は歌口のエッジ近傍のジェットから起きている。これらの知識を用いれば、現状の単純な時間領域の力学モデルを改良し、より高い精度の力学モデルを構築できる可能性がある。最も簡単な力学モデルでは、ジェットの垂直方向の変位と管体に供給される体積流量または発生する流体音の音圧を  $\tanh$  関数等で与えるが [24,31]、この部分の力学的な改善が望まれる。近年、モード方程式モデルが提案されている [31]。そのモデルでは、ジェットがノズルからエッジに到達するまでの時間を時間遅れとして取り込んでいるので遅延微分方程式となる。モード方程式を求める時にアドミッタスを用いるので、体積流量  $U$  の減衰調和振動子となり、音圧  $p_a$  が強制外力になる。ただし、筆者の個人的な見解であるが、モード方程式の構成過程に力学的に不確かな部分があるように思える。余談ではあるが、フルーオルガンパイプにはフットと呼ばれる空気溜めがあり、そこからノズルを通して歌口にジェットが送り込まれる。最近の筆者らの圧縮性流体解析によれば、フットは Helmholtz 共鳴器の機能を持ち、楽器の発振の安定性に影響を与えている [63]。実験により確認にされることを期待したい。一方、リコーダーの演奏において口腔が同じような役割をしているという報告がある [64,65]。また、リード木管楽器や金管楽器の演奏でも口腔が同じような役割をしている可能性がある。事実、シングルリード木管楽器の実験で口腔内の圧力変動が観測されている [7,37]。周波数領域の解析では、口腔の音響インピーダンスを計算し、リードバルブモデルと組み合わせる手法がある [2]。遅延方程式モデルやモード方程式モデルに口腔の影響をどの様に取り込むかは今後の課題である。

## 謝辞

本稿を執筆するにあたり、九州大学、秋田株式会社的小林泰三博士には様々な助言を頂いた。また、井戸川徹筑波大学名誉教授 (故) および小島時彦博士には研究初期の段階で楽器の基本知識および人工吹鳴実験についてご教授して頂いた。遅延系の基礎知識は、池田研介立命館大学名誉教授にご教授して頂いた。さらに、共同研究者および著者が九州工業大学在職時に指導した学生諸氏の研究成果を多数引用した。特に、橘崇哲博士 (故) の功績は極めて大きい。

## 参考文献

- [1] Helmholtz, H. L. F.: *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*, 3rd English ed., (Longmans, Green, and Co., London, New York, 1895).
- [2] Fletcher, N. H. & Rossing, T. D.: *The physics of musical instruments*, 2nd ed., (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [3] 柳田益造 編著, 高橋公也, 西口磯春, 若槻尚斗 共著: 日本音響学会 編: 音響入門シリーズ A-5 「楽器の音」, (コロナ社, 2024).

- [4] Hirschberg, A., Kergomard, J. & Weinreich, G. (eds.): *Mechanics of musical instruments*, (Springer-Verlag, Vienna and New York, 1995).
- [5] Fabre, B., Gilbert, J., Hirschberg, A. & Pelorson, X.: Aeroacoustics of musical instruments, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 44 (2011) 1–25.
- [6] Adachi, S.: Principles of sound production in wind instruments, *Acoust. Sci. & Tech.*, 25 (2004) 400–405.
- [7] 井戸川徹: 楽器の非線形振動 –木管楽器について–, 物性研究, Vol.55, No.2 (1990) 154–176.
- [8] 高橋公也, 池田研介: 管楽器吹鳴の非線形現象とその解釈をめぐって, 物性研究, Vol.64, No.1 (1995) 26–88.
- [9] 高橋公也: シングルリード木管楽器, *ながれ*, vol.43 (2024) 297–303.
- [10] Lighthill M. J.: On sound generated aerodynamically. Part I: General theory, *Proc. Roy. Soc. London A*, 211 (1952) 564–587.
- [11] Goldstein, M. E.: *Aeroacoustics*, (McGraw-Hill, New York, 1976).
- [12] Howe, M. S.: *Acoustics of fluid-structure interactions*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
- [13] Bamberger, A.: Vortex sound in flutes using flow determination with endo-piv, *Proc. Forum Acusticum Budapest 2005, 4th Eur. Cong. Acoustics*, Budapest, Hungary, (2005) 665–670.
- [14] Yoshikawa, S., Tashiro, H. & Sakamoto, Y.: Experimental examination of vortex-sound generation in an organ pipe: A proposal of jet vortex-layer formation model, *J. Sound. Vib.*, 331 (2012) 2558–2577.
- [15] Miyamoto, M., Ito, Y., Iwasaki, T., Akamura, T., Takahashi, K., Takami, T., Kobayashi, K., Nishida, A. & Aoyagi, M.: Numerical study on acoustic oscillations of 2D and 3D flue organ pipe like instruments with compressible LES., *Acta Acust. united Ac.*, 99 (2013) 154–171.
- [16] Tabata, R., Matsuda, R., Koiwaya, T., Iwagami, S., Midorikawa, H., Kobayashi, T. & Takahashi K.: Three-dimensional numerical analysis of acoustic energy absorption and generation in an air-jet instrument based on Howes energy corollary, *J. Acoust. Soc. Am.*, 149 (2021) 4000–4012.
- [17] Giordano, N.: Direct numerical simulation of a recorder, *J. Acoust. Soc. Am.*, 133 (2013) 1111–1118.
- [18] Giordano, N.: Simulation studies of a recorder in three dimensions, *J. Acoust. Soc. Am.*, 135 (2014) 906–916.
- [19] Yokoyama, H., Miki, A., Onitsuka, H. & Iida, A.: Direct numerical simulation of fluid-acoustic interactions in a recorder with tone holes, *J. Acoust. Soc. Am.*, 138 (2015) 858–873.
- [20] da Silva, A. R., Scavone, G. P. & van Walstijn, M.: Numerical simulations of fluid-structure interactions in single-reed mouthpieces, *J. Acoust. Soc. Am.*, 122 (2007) 1798–1809.
- [21] Yoshinaga, T., Yokoyama, H., Shoji, T., Miki, A. & Iida, A.: Numerical investigation of effects of lip stiffness on reed oscillation in a singlereed instrument, *J. Acoust. Soc. Am.*, 149 (2021) 1623–1632.
- [22] Wang, S.: *Aeroacoustic analyses of the saxophone mouthpiece with applications to mouthpiece design*, ph.D. dissertation, (McGill University, 2023).
- [23] Wang, S., Maestre, E. & Scavone, G.: Characterization of Single-Reed Instrument Sound Generation Based on Ffowcs Williams-Hawkings Analogy, *Proc. SMAC*, Stockholm, Sweden, (2023) 56–62.
- [24] McIntyre, M. E., Schumacher, R. T. & Woodhouse, J.: On the oscillations of musical instruments, *J. Acoust. Soc. Am.*, 74 (1983) 1325–1345.
- [25] Schumacher, R. T.: Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet, *Acustica*, 48 (1981) 71–85.

- [26] Dalmont, J.-P., Gazengel, B., Gilbert, J. & Kergomard, J.: Some Aspects of Tuning and Clean Intonation in Reed Instruments, *Appl. Acoust.*, 46 (1995) 19-60.
- [27] Adachi, S. & Sato, M.: Time-domain simulation of sound production in the brass instrument, *J. Acoust. Soc. Am.*, 97 (1995) 3850-3861.
- [28] Adachi, S. & Sato, M.: Trumpet sound simulation using a two-dimensional lip vibration model, *J. Acoust. Soc. Am.*, 99 (1996) 1200-1209.
- [29] Silva, F., Debut, V., Kergomard, J., Vergez, C., Deblevid, A. & Guillemain, P.: Simulation of single reed instruments oscillations based on modal decomposition of bore and reed dynamics, *Proc. ICA2007*, Madrid, Spain, (2007).
- [30] Silva, F., Vergez, C., Guillemain, P., Kergomard, J. & Debut, V.: MoReeSC: A framework for the simulation and analysis of sound production in reed and brass instruments, *Acta Acust. United Acust.*, 100 (2014) 126-138.
- [31] Terrien, S., Vergez, C. & Fabre B.: Flute-like musical instruments: A toy model investigated through numerical continuation, *J. Sound. Vib.*, 332 (2013) 3833-3848.
- [32] Hirschberg, A., van der Laar, R. W. A., Marrou-Mauriere, J. P., Wijnands, A. P. J., Dane H. J., Kruijswijk, S. G. & Houtsma, A. J. M.: A quasi-stationary model of air flow in the reed channel of single-reed wind instruments, *Acustica*, 70 (1990) 146-154.
- [33] van Zon, J., Hirschberg, A., Gilbert, J. & Wijnands, A. P. J.: Flow through the reed channel of a single reed music instrument, *Sup. J. Phys. Colloque de Physique, Paris*, 51 (1990) 821-824.
- [34] Dalmont, J.-P., Gilbert, J. & Ollivier S.: Nonlinear characteristics of single-reed instruments: Quasi-static volume flow and reed opening measurements, *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 (2003) 2253-2262.
- [35] Idogawa, T., Kobata, T., Komuro, K. & Iwaki, M.: Nonlinear vibrations in the air column of a clarinet artificially blown, *J. Acoust. Soc. Am.*, 98 (1993) 540-551.
- [36] Kobata, T. & Idagawa, T.: Pressure in the mouthpiece, reed opening, and air-flow speed at the reed opening of a clarinet artificially blown, *J. Acoust. Soc. Jpn.(E)*, 14 (1993) 417-428.
- [37] 小島時彦: 「クラリネットの発音機構」(博士論文), (筑波大学, 1995).
- [38] 橋崇哲: シングルリード木管楽器の発音機構, 物性研究, vol. 67, No.4 (1997) 468-510.
- [39] 橋崇哲: 「シングルリード木管楽器の発音機構」(博士論文), (九州工業大学, 2002).
- [40] Takahashi, K., Goya, K. & Goya, S.: Mode Selection Rules for Two-Delay Systems: Dynamical Explanation for the Function of the Register Hole on the Clarinet, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 83 (2014) 124003.
- [41] Sivian, L. J., Acoustic impedance of small orifices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 7 (1935) 94-101.
- [42] Backus, J.: Small-vibration theory of the clarinet, *J. Acoust. Soc. Am.*, 35 (1963) 305-313.
- [43] Plitnik, G. & Strong, W.: Numerical-method for calculating input impedances of the oboe, *J. Acoust. Soc. Am.*, 65 (1979) 816-825.
- [44] Caussé, R., Kergomard, J. & Lurton, X.: Input impedance of brass musical-instruments – comparison between experiment and numerical models, *J. Acoust. Soc. Am.*, 75 (1984) 241-254.
- [45] Rayleigh, J. W. S.: *The Theory of Sound vol.2*, (Dover, New York, 1945).
- [46] Levine, H. & Schwinger, J.: On the radiation of sound from an unranaged circular pipe, *Phys.Rev.*, 73 (1948) 383-406.

- [47] Keefe, D.: Theory of the single woodwind tone hole, *J. Acoust. Soc. Am.*, 72 (1982) 676–687.
- [48] Keefe, D.: Experiments on the single woodwind tone hole, *J. Acoust. Soc. Am.*, 72 (1982) 688–699.
- [49] Keefe, D.: Woodwind air column models, *J. Acoust. Soc. Am.*, 88 (1990) 35–51.
- [50] Lefebvre, A. & Scavone, G. P.: Characterization of woodwind instrument toneholes with the finite element method, *J. Acoust. Soc. Am.*, 131 (2012) 3153–3163.
- [51] Idogawa, T., Shimizu, M. & Iwaki, M.: Acoustical behaviors of an oboe and a soprano saxophone artificially blown, *Proc. Symp. on Some Problems on the Theory of Dynamical Systems in Applied Science*, (World Scientific, Singapore, 1992) 71–93.
- [52] 小野寺健一: クラリネットに類似な系の人工吹鳴, 筑波大学第三学群基礎工学類卒業論文, (1991).
- [53] Shimizu, M., Naoi, T. & Idogawa, T.: Vibrations of the reed and the air columns in the bassoon, *J. Acoust. Soc. Jpn.(E)*, 10 (1989) 269–278.
- [54] Tachibana, T. & Takahashi, K.: Sounding mechanism of a cylindrical pipe fitted with a clarinet mouthpiece, *Prog. Theor. Phys.*, 104 (2000) 265–288.
- [55] Takahashi, K., Kodama, H., Nakajima, A. & Tachibana, T.: Numerical Study on Multi-Stable Oscillations of Woodwind Single-Reed Instruments, *Acta Acust. united Ac.*, 95 (2009) 1123–1139.
- [56] Tachibana, T., Onodera, K., Takahashi, K. & Idogawa, T.: Experimental and Numerical study of hysteretic transitions between vibration states excited in a cylindrical air column blown by the clarinet mouthpiece, *Proc. ASVA97*, Tokyo, Japan, (1997) 659–666.
- [57] Tachibana, T., Man'syo, K., Onodera, K., Takahashi, K. & Idogawa, T.: Sounding mechanism of a single-reed instrument with a cylindrical air-column, *Proc. ISMA1998*, Leavenworth, USA., (1998) 221–226.
- [58] Takahashi, K., Kodama, H., Nakajima, A. & Tachibana, T.: Numerical study on change of sounding mechanism of single reed instruments depending on fingerings, *Proc. ISMA 2007*, Barcelona, Spain, (2007), CD-Rom 1-S1-3.
- [59] 合屋 沙耶, 西山 裕樹, 合屋 佳奈, 高橋 公也: シューマツハモデルを用いたクラリネットのシミュレーターの最適解探索, 音楽音響会資料, Vol.30, No.6 (2011) 1–6.
- [60] Takahashi, K., Goya, K., Goya, S., Tsutsumi, G. & Kobayashi, T.: Numerical study on the function of the register hole of the clarinet, *Proc. ISMA 2019*, Detmold, Germany, (2019) 219–226.
- [61] Coltman, J. W.: Jet driven mechanisms in edge tones and organ pipes, *J. Acoust. Soc. Am.*, 60 (1976) 725–733.
- [62] Takahashi, K., Iwagami, S., Kobayashi, K. & Takami, T.: Theoretical Estimation of the Acoustic Energy Generation and Absorption Caused by Jet Oscillation, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 85 (2014) 044402.
- [63] Ikoga, S., Onomata, T., Tabata, R., Iwagami, S., Kobayashi, T. & Takahashi K.: Numerical study on role of foot of a flue organ pipe: relative phases in oscillations among pipe, foot and jet, *Acta Acoust.*, 8 (2024) 50.
- [64] Chen, J.-M., Laurin, D., Smith, J. & Wolfe, J.: Vocal track interactions in recorder performance, *Proc. ICA2017*, Madrid, Spain, (2007) 5565–5572.
- [65] Auvray, R., Ernoult, A., Terrien, S., Lagrée, P. Y., Fabre, B. & Vergez, C.: Effect of changing the vocal tract shape on the sound production of the recorder: an experimental and theoretical study, *Acta Acust. united Ac.*, 101 (2015) 317–330.