時間遅れ項を含む単独粘性保存則における
任意の平衡解に対する安定性解析

上田好寛 [*]

時間遅れを考慮した単独粘性保存則について考察を行う．

$$\partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \partial_x (\rho V(\rho_\tau)) = 0 \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

ここで，$\rho = \rho(t, x)$ は未知関数であり，ν は粘性係数とよばれる正定数である．また，時間遅れを表す正値パラメータ τ を用いて $\rho_\tau(t, x) = \rho(t - \tau, x)$ と表す．さらに, $V(\rho)$ は ρ にのみ依存する既知関数とする．

方程式 (1) に対し，形式的に $\tau = 0$ と定めたものを単独粘性保存則とよぶ．粘性項をもつ保存則は流体現象を記述する比較的単純な方程式として有名であるが，その適用例として交通流の数理モデルとしても知られている．時間遅れを考慮することで，方程式 (1) はより現実に即した交通流の数理モデルと捉えることもできる．

方程式 (1) において，初期履歴

$$\rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x), \qquad -\tau \le \theta \le 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

を課した Cauchy 問題に対し，論文 [1] では以下の時間大域解の存在と漸近安定性が導かれた．

Theorem 1 ([1])**.** V は C^1 級関数であり，任意の $v \in \mathbb{R}$ に対し $|V'(v)| \le V_*$ を満たす正定数 V_* が存在すると仮定する．また，$\rho_0 \in C([-\tau, 0]; H^1)$ とする．このとき，

$$\sqrt{\frac{\tau}{\nu}\left(e + \frac{\tau}{\nu}|V(0)|^2\right) C_0(1 + I_0^4)} V_* I_0 < \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

を満たすならば，*Cauchy* 問題 (1), (2) の一意な時間大域解 $\rho \in C([-\tau, \infty); H^1)$ が存在し，次のエネルギー評価式が成り立つ．

$$\|\rho(t)\|_{H^1}^2 + \frac{\nu}{4}\int_0^\infty \|\partial_x \rho(s)\|_{H^1}^2 ds \le C_0(1 + I_0^4) I_0^2.$$

ここで，

$$I_0 := \left(\sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|\rho_0(\theta)\|_{H^1}^2 + \int_{-\tau}^0 \|\partial_x \rho_0(\theta)\|_{L^2}^2 d\theta\right)^{1/2},$$

$$C_0 := \left(2 + \frac{1}{8e}\right)\left\{1 + \frac{2^{11}}{\nu^4}\left(1 + \frac{1}{16e}\right)^2 V_*^4\right\}.$$

と定めた．

またさらに，時間大域解 ρ に対して $\lim_{t\to\infty} \|\rho(t)\|_{L^\infty} = 0$ も成り立つ．

[*]神戸大学大学院海事科学研究科

定理 1 は自明な平衡解の非線形安定性を示しており，非線形安定性を導くための初期履歴と時間遅れパラメータの条件を導出している．また，本結果は初期履歴と時間遅れパラメータの両方について小ささを仮定していない点が大きな特徴となっている．一方，(1) の非自明な平衡解の安定性については結果が知られておらず，非自明な平衡解の安定性を得るための条件について考察することが本研究の主題である．

ここでは，方程式 (1) の線形安定性を導くために，線形化方程式に対する固有値問題を解析する．任意の定数 $\rho_* \in \mathbb{R}$ を平衡状態とし，新たに関数 $u := \rho - \rho_*$ を導入する．このとき，摂動の満たす方程式は

$$\partial_t u - \nu \partial_x^2 u + V(\rho_* + u_\tau)\partial_x u + (\rho_* + u)V'(\rho_* + u_\tau)\partial_x u_\tau = 0 \tag{3}$$

で表され，線形化方程式は

$$\partial_t u - \nu \partial_x^2 u + V(\rho_*)\partial_x u + \rho_* V'(\rho_*)\partial_x u_\tau = 0 \tag{4}$$

で記述される．対応する固有値問題を導くため，(4) にフーリエ変換を適用すると次が得られる．

$$\partial_t \hat{u} + \nu\xi^2 \hat{u} + V(\rho_*) i\xi \hat{u} + \rho_* V'(\rho_*) i\xi \hat{u}_\tau = 0. \tag{5}$$

ここで，$\xi \in \mathbb{R}$ はフーリエ変数を示す．方程式 (5) は時間遅れを考慮した常微分方程式とみなされ，解の挙動は対応する固有値問題と次の特性方程式

$$\lambda + \nu\xi^2 + V(\rho_*) i\xi + \rho_* V'(\rho_*) i\xi e^{-\tau\lambda} = 0 \tag{6}$$

の固有値 $\lambda = \lambda(\xi)$ で特徴付けられることが知られている．この特性方程式の根に関する主結果を以下に述べる．

Theorem 2 ([3])**.** 特性方程式 (6) の全ての根は以下を満たす．

$$\limsup_{|\xi|\to 0} \mathrm{Re}\lambda(\xi) \le 0, \qquad \lim_{|\xi|\to\infty} \mathrm{Re}\lambda(\xi) = -\infty.$$

さらに，ν, τ, ρ_*, V が次の *3* つの条件のいずれかを満たす場合またはその場合に限り，任意の $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し $\mathrm{Re}\lambda(\xi) < 0$ が成り立つ．

条件 (i):

$$\frac{\tau}{\nu}\rho_* V'(\rho_*)(V(\rho_*) + \rho_* V'(\rho_*)) \le 1, \qquad \frac{\tau}{\nu}\rho_* V(\rho_*)V'(\rho_*) \ge -\frac{\pi}{2}.$$

条件 (ii):

$$\frac{\tau}{\nu}\rho_* V'(\rho_*)(V(\rho_*) + \rho_* V'(\rho_*)) \le 1, \qquad -\frac{3\pi}{2} < \frac{\tau}{\nu}\rho_* V(\rho_*)V'(\rho_*) < -\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\tau}{\nu}V(\rho_*)^2\left(\sqrt{\frac{\tau^2}{\nu^2}\rho_*^2 V(\rho_*)^2 V'(\rho_*)^2 - \frac{\pi^2}{4}} + \frac{\tau}{\nu}\rho_*^2 V'(\rho_*)^2 - 1\right) \le \frac{\pi^2}{2}.$$

条件 (iii):

$$\frac{\tau}{\nu}\rho_* V'(\rho_*)(V(\rho_*) + \rho_* V'(\rho_*)) \le 1, \qquad -\frac{3\pi}{2} < \frac{\tau}{\nu}\rho_* V(\rho_*)V'(\rho_*) < -\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\tau}{\nu}V(\rho_*)^2\left(\sqrt{\frac{\tau^2}{\nu^2}\rho_*^2V(\rho_*)^2V'(\rho_*)^2-\frac{\pi^2}{4}}+\frac{\tau}{\nu}\rho_*^2V'(\rho_*)^2-1\right)>\frac{\pi^2}{2},$$

$$\frac{\tau}{\nu}\rho_*V'(\rho_*)\left(\rho_*V'(\rho_*)\theta_*-V(\rho_*)\right)\sqrt{1-\theta_*^2}<\frac{3\pi}{2}-\mathrm{Arccos}(\sqrt{1-\theta_*^2}).$$

ここで，

$$\theta_*:=\frac{1}{4|\rho_*V'(\rho_*)|}\left(\sqrt{V(\rho_*)^2+8\left(\rho_*^2V'(\rho_*)^2+\frac{\nu}{\tau}\right)}-|V(\rho_*)|\right)$$

と定めた．

定理 2 の証明の鍵となるのは，特性方程式 (6) の詳細な解析である．そのためには，複素係数 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対する特性方程式

$$\lambda+\alpha-\beta e^{-\tau\lambda}=0$$

の根の解析が必要であるが，Nishiguchi [2] により特性根の実部が負となるための必要十分条件が示されている．よって，Nishiguchi [2] による結果に対し，$\alpha=\nu\xi^2+V(\rho_*)i\xi$, $\beta=-\rho_*V'(\rho_*)i\xi$ を代入することで定理 2 が示される．

定理 2 によって線形安定性に関する必要十分条件が示されたことになるが，非線形安定性については更なる解析が必要となる．ここでは，非線形安定性について得られた結果についても紹介したい．方程式 (3) に対し，初期履歴

$$u(\theta,x)=u_0(\theta,x),\qquad -\tau\le\theta\le 0,\quad x\in\mathbb{R}\tag{7}$$

を課した Cauchy 問題を考察する．ここで，$u_0:=\rho_0-\rho_*$ と定めた．このとき，次の定理が成り立つ．

Theorem 3. V は C^2 級関数であり，任意の $v\in\mathbb{R}$ に対し $|V'(v)|\le V_*$ を満たす正定数 V_* が存在すると仮定する．また，

$$\frac{\tau}{\nu}|\rho_*V'(\rho_*)|\left(|V(\rho_*)|+|\rho_*V'(\rho_*)|\right)<1$$

が成り立つとし，$u_0\in C([-\tau,0];H^1)$ と定める．このとき，

$$\sqrt{\frac{\tau}{\nu}}W\left(\sqrt{C_1}I_1\right)\sqrt{C_1}I_1<c_\tau$$

を満たすならば，*Cauchy* 問題 (3), (7) の一意な時間大域解 $u\in C([-\tau,\infty);H^1)$ が存在し，次のエネルギー評価式が成り立つ．

$$\|u(t)\|_{H^1}^2+\int_0^\infty\left(\frac{1}{\nu}\|\partial_t u(s)\|_{L^2}^2+\frac{\nu c_\tau}{4}\|\partial_x u(s)\|_{H^1}^2\right)ds\le C_1I_1^2.$$

ここで，

$$V_2(M):=\sup_{|v|\le M}|V''(\rho_*+v)|,\qquad W(M):=2\sqrt{2}\left(2V_*+|\rho_*|V_2(M)\right),$$

$$c_\tau:=\begin{cases}\dfrac{|\rho_*V'(\rho_*)|}{6(|V(\rho_*)|+|\rho_*V'(\rho_*)|)}\left(1-\dfrac{\tau}{\nu}|\rho_*V'(\rho_*)|(|V(\rho_*)|+|\rho_*V'(\rho_*)|)\right), & \rho_*V'(\rho_*)\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\tau}{\nu}|V(\rho_*)|^2+1\right)^{-1}, & \rho_*V'(\rho_*)=0,\end{cases}$$

$$I_1 := I_0\sqrt{2+I_0^4}, \qquad I_0 := \left(\sup_{-\tau\le\theta\le 0}\|u_0(\theta)\|_{H^1}^2 + \int_{-\tau}^0 \|\partial_x u_0(\theta)\|_{L^2}^2 d\theta\right)^{1/2},$$

$$C_1 := 23 + \frac{\tilde{C}_1(1+\nu^2)}{\nu^4 c_\tau}, \qquad \tilde{C}_1 := 168(2V(\rho_*)^2 + 2\rho_*^2 V_*^2 + 168^2 V_*^4)$$

と定めた．

またさらに，時間大域解 u に対して $\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{L^\infty} = 0$ も成り立つ．

定理 3 の証明はエネルギー法によるものであり，論文 [1] で適用された手法をより厳密に用いることで，期待されるアプリオリ評価を導くことができる．

定理 2 と定理 3 を比較すると，線形安定性を導くために必要な条件に対して更なる条件を課すことで非線形安定性が示されることがわかる．この二つの結果の差にはまだ未解決な部分があり，今後も更なる考察が期待される．

参考文献

[1] T. Kubo, Y. Ueda, *Existence theorem for global in time solutions to Burgers equation with a time delay*, Journal of Differential Equations **333** (2022), 184–230.

[2] J. Nishiguchi, *On parameter dependence of exponential stability of equilibrium solutions in differential equations with a single constant delay*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **36**, (2016), 5657–5679.

[3] Y. Ueda, *Linear stability of the non-zero equilibrium state for the viscous Burgers equation with time delay*, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, (2025).